Министерство образования и науки Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Я.С. Гриншпон

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ, ФИЗИЧЕСКИЕ И ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ, СВОДЯЩИЕСЯ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Учебное пособие

Томск
Издательство Томского государственного университета
систем управления и радиоэлектроники
2011

УДК 517.91, 51.7
ББК 22.161.6я73
Г85

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, проф. каф. высшей математики Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники **А.А. Ельцов**;
канд. физ.-мат. наук, доц. каф. мат. анализа Томск. гос. ун-та **Э.Н. Кривякова**

Гриншпон Я.С.
Г85 Геометрические, физические и экономические задачи, сводящиеся к дифференциальным уравнениям: учеб. пособие / Я.С. Гриншпон. – Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2011. – 74 с.
ISBN 978-5-86889-547-0

Приведены геометрические, физические и экономические задачи, сводящиеся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Все задачи снабжены подробными решениями. Может использоваться как дополнительное учебное пособие при изучении дифференциальных уравнений в курсах высшей математики и математического анализа для технических и экономических специальностей вузов.

УДК 517.91, 51.7
ББК 22.161.6я73

Учебное издание
Гриншпон Яков Самуилович

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ, ФИЗИЧЕСКИЕ И ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ, СВОДЯЩИЕСЯ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ
Учебное пособие
Корректор Л.И. Кирпиченко
Компьютерная верстка Я.С. Гриншпона
Подписано в печать . . . Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 4,42. Заказ . Тираж экз.

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники.
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40.
Тел. 8 (3822) 533018.

ISBN 978-5-86889-547-0

Предисловие

Многие студенты технических специальностей, проходящие курс высшей математики на младших курсах, высказывают мнение, что «математика — это сухая теория, не имеющая практического значения». Конечно же, впоследствии, постоянно сталкиваясь с математическим аппаратом на специальных предметах, они изменят свое мнение. Но для лучшего усвоения материала и усиления заинтересованности в процессе обучения важно объяснить практическую ценность математических знаний именно в период их получения, т.е. на первом и втором курсах.

Данное пособие призвано хотя бы частично помочь в решении поставленной проблемы. В нем рассматриваются достаточно простые прикладные задачи, сводящиеся к дифференциальным уравнениям. Отметим, что для решения всех предложенных задач не требуется никаких дополнительных знаний из области физики, геометрии или экономики, так как все необходимые сведения из этих областей приводятся в начале каждого параграфа. Однако так как данное пособие предназначено для использования в курсе высшей математики, то сведения из других наук не претендуют на полноту и общность и для более глубокого их изучения следует воспользоваться специализированной литературой по данным предметам.

Пособие подготовлено с использованием работ [1–12].

Глава 1. Геометрические задачи

1.1. Задачи на положение касательной

Известно, что угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, равен значению производной $f'(x)$ в точке x_0. Другими словами, если $y = kx + b$ — уравнение касательной, то $k = f'(x_0) = y'_0$. Так как, кроме того, касательная проходит через точку графика $(x_0; y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, то получим:

$$y = y'_0(x - x_0) + y_0 \text{ — уравнение касательной.}$$

Если $y'_0 \neq 0$ и $y'_0 \neq \infty$, то, полагая $y = 0$, а затем $x = 0$, найдем точки пересечения касательной с осями координат:

$\left(x_0 - \dfrac{y_0}{y'_0}; 0\right)$ — точка пересечения касательной с осью абсцисс,

$\left(0; y_0 - y'_0 x_0\right)$ — точка пересечения касательной с осью ординат.

Если же $y'_0 = 0$, то уравнение касательной приобретает вид $y = y_0$ — это прямая, параллельная оси абсцисс и пересекающая ось ординат в точке $(0; y_0)$. А если $y'_0 = \infty$, то касательная задается уравнением $x = x_0$ — это прямая, параллельная оси ординат и пересекающая ось абсцисс в точке $(x_0; 0)$.

Напомним также, что угловой коэффициент любой прямой, в частности касательной, равен тангенсу угла наклона этой прямой к положительному направлению оси абсцисс. При этом для возрастающей функции угол наклона касательной является внутренним для прямоугольного треугольника, образованного касательной и ординатой, проходящими через точку $(x_0; y_0)$, и осью абсцисс, поэтому $y_0' = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{BC}{AB}$ (рис. 1). А для убывающей функции он является внешним, и поэтому $-y_0' = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \dfrac{BC}{AB}$ (рис. 2).

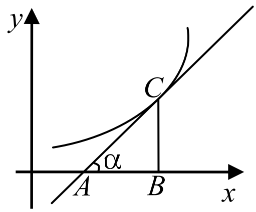

Рис. 1

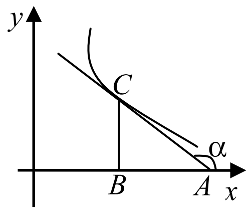

Рис. 2

С помощью касательной определяется понятие угла между двумя кривыми. Если графики двух дифференцируемых функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ пересекаются в точке с абсциссой x_0, то углом между этими кривыми называют наименьший угол между их касательными. Для тангенса этого угла верна формула $\operatorname{tg}\gamma = \left|\dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$, где k_1 и k_2 — угловые коэффициенты касательных, т.е. $k_1 = f'(x_0) \neq \infty$ и $k_2 = g'(x_0) \neq \infty$. В частности, кривые будут перпендикулярными ($\operatorname{tg}\gamma = \infty$), если $k_1 k_2 = -1$, где k_1 и k_2 отличны от нуля и бесконечности, или если одна из этих касательных горизонтальна, а другая — вертикальна, т.е. $k_1 = 0$, $k_2 = \infty$ или, наоборот, $k_1 = \infty$, $k_2 = 0$. Кривая, которая в каждой своей точке перпендикулярна некоторой линии семейства $y = f(x, a)$, где параметр a принимает любые действительные значения, называется ортогональной траекторией к данному семейству.

Задача 1. Записать уравнения кривых, для которых площадь любого треугольника, образованного касательной и ординатой, проведенными из некоторой точки кривой, и осью абсцисс, равна единице. Начертить все непрерывные кривые, удовлетворяющие условию задачи и проходящие через точку (1; 2).

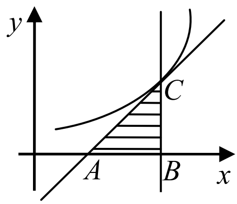

Рис. 3

Решение. Из чертежа (рис. 3) видно, что искомый треугольник возникает только тогда, когда касательная не параллельна осям координат, т.е. $y_0' \neq 0$ и $y_0' \neq \infty$. Запишем координаты вершин треугольника: $A\left(x_0 - \dfrac{y_0}{y_0'};0\right)$, $B\left(x_0;0\right)$ и $C\left(x_0;y_0\right)$, и вычислим длины катетов: $AB = \left|\dfrac{y_0}{y_0'}\right|$ и $BC = \left|y_0\right|$. Следовательно, площадь треугольника $S_{ABC} = \dfrac{AB \cdot BC}{2} = \dfrac{y_0^2}{2\left|y_0'\right|}$.

В силу произвольности выбора точки $(x_0; y_0)$ можем записать дифференциальное уравнение $\dfrac{y^2}{2\left|y'\right|} = 1$. Это уравнение с разделяющимися переменными.

Рассмотрим два случая. Если $y' > 0$, то $y^2 = 2y'$. Разделяя переменные, получим $dx = \dfrac{2dy}{y^2}$, $x = c - \dfrac{2}{y}$ и $y = \dfrac{2}{c - x}$, что удовлетворяет рассматриваемому случаю, так как $y' = \dfrac{2}{(c-x)^2} > 0$. Если же $y' < 0$, то $y^2 = -2y'$, $dx = -\dfrac{2dy}{y^2}$,

$x = c + \dfrac{2}{y}$ и $y = \dfrac{2}{x-c}$, причем $y' = -\dfrac{2}{(x-c)^2} < 0$. Итак, искомыми кривыми являются графики функций $y = \pm\dfrac{2}{x-c}$.

При $x = 1$ и $y = 2$ получим, что через точку (1; 2) проходят верхние ветви гипербол $y = \dfrac{2}{x}$ и $y = \dfrac{2}{2-x}$ (рис. 4).

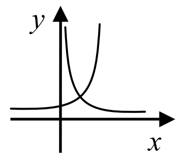

Рис. 4

Ответ: $y = \pm\dfrac{2}{x-c}$ — общее решение; $y = \dfrac{2}{x}$ и $y = \dfrac{2}{2-x}$, где $y > 0$, — частные решения.

Задача 2. Записать уравнения кривых, для которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, отличающуюся в два раза от абсциссы точки касания. Начертить все непрерывные кривые, удовлетворяющие условию задачи и проходящие через точку (–1; 1).

Решение. Рассмотрим особые случаи, когда $y_0' = 0$ и $y_0' = \infty$. В первом случае касательная либо параллельна оси абсцисс, либо совпадает с ней, что не удовлетворяет условию задачи. Во втором случае абсциссы точки пересечения и точки касания равны. Следовательно, они могут отличаться в два раза только в том случае, когда $x_0 = 0$. Имеем, что прямая $x = 0$ является решением задачи.

Пусть теперь $y_0' \neq 0$ и $y_0' \neq \infty$. Абсцисса точки пересечения касательной с осью абсцисс равна $x_0 - \dfrac{y_0}{y_0'}$. Считая

$(x_0; y_0)$ произвольной точкой кривой, получим дифференциальные уравнения $x - \frac{y}{y'} = 2x$ или $2\left(x - \frac{y}{y'}\right) = x$.

Преобразуем первое уравнение: $y = -y'x$, $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$, $\ln|y| = \ln c - \ln|x|$ и $y = \frac{c}{x}$. Так как производная $y' = -\frac{c}{x^2}$ не должна равняться нулю, то $c \neq 0$ (действительно, прямая $y = 0$, очевидно, не удовлетворяет условию задачи).

Аналогично для второго уравнения: $2y = y'x$, $\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$, $\ln|y| = \ln c + 2\ln|x|$ и $y = cx^2$. Из условия $y' = 2cx \neq 0$ следует, что $c \neq 0$ и начало координат не принадлежит искомым кривым, т.е. получаем семейство парабол с выколотой точкой (0; 0).

Через точку (–1; 1) проходят левые ветви параболы $y = x^2$ и гиперболы $y = -\frac{1}{x}$ (рис. 5).

Ответ: $y = \frac{c}{x}$ и $y = cx^2$, где $x \neq 0$ и $c \neq 0$, — общее решение; $x = 0$ — особое решение; $y = x^2$ и $y = -\frac{1}{x}$, где $x < 0$, — частные решения.

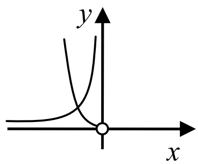

Рис. 5

Задача 3. Записать уравнения кривых, для которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и от начала координат. Начертить все непрерывные кривые, удовлетворяющие условию задачи и проходящие через точку (–1; 1).

Решение. В особом случае $y_0' = 0$ касательная либо не имеет точек пересечения с осью абсцисс, либо имеет бесконечно много точек пересечения, и задача не имеет смысла. Если же $y_0' = \infty$, то точка пересечения имеет координаты $(x_0;0)$, а искомые расстояния равны $|y_0|$ и $|x_0|$. Если потребовать равенства этих расстояний для любой точки кривой, т.е. $|y| = |x|$, или $y = \pm x$, то тогда $y' \neq \infty$. Итак, особых решений нет.

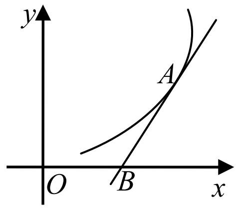

Рис. 6

Сделаем чертеж (рис. 6) и найдем координаты точек: $A\left(x_0;y_0\right)$, $B\left(x_0 - \dfrac{y_0}{y_0'};0\right)$ и $O\left(0;0\right)$. Из условия $AB = OB$, верного для всех точек $A\left(x_0;y_0\right)$, запишем уравнение $\sqrt{\left(\dfrac{y}{y'}\right)^2 + y^2} = \left|x - \dfrac{y}{y'}\right|$, или $\left(\dfrac{y}{y'}\right)^2 + y^2 = \left(x - \dfrac{y}{y'}\right)^2$. Очевидными преобразованиями получаем однородное уравнение $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$, которое заменой $y = xu$ и $y' = u + xu'$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными $xu' = \dfrac{2x^2u}{x^2 - x^2u^2} - u = \dfrac{u^3 + u}{1 - u^2}$. Заметим, что при сокращении на x мы не потеряли решение, так как выше было показано, что прямая $x = 0$ не удовлетворяет условию задачи.

Разделим переменные: $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{1-u^2}{u^3+u}du$. Проинтегрируем отдельно правую часть: $\displaystyle\int\frac{1-u^2}{u(u^2+1)}du=\int\frac{(1+u^2)-2u^2}{u(u^2+1)}du=$

$=\displaystyle\int\frac{du}{u}-\int\frac{2u\,du}{u^2+1}=\ln|u|-\ln\left|u^2+1\right|+\ln c=\ln\left|\frac{cu}{u^2+1}\right|$. Значит, $\ln|x|=\ln\left|\dfrac{cu}{u^2+1}\right|$ или $x(u^2+1)=cu$. Возвращаясь к переменной y, имеем $x\left(\dfrac{y^2}{x^2}+1\right)=\dfrac{cy}{x}$, или $y^2+x^2=cy$.

Проверим условия неравенства производной нулю и бесконечности. Для этого продифференцируем общее решение $2yy'+2x=cy'$ и выразим $y'=\dfrac{2x}{c-2y}$. Видно, что $y'=0$ при $x=0$. Подставляя в общее решение, находим $y=0$ и $y=c$. А значит, точки (0; 0) и (0; c) необходимо исключить из кривой. Далее, $y'=\infty$ при $y=\dfrac{c}{2}$ и $x=\pm\dfrac{c}{2}$, т.е. выполняется условие $y=\pm x$, и эти точки удовлетворяют условию задачи. Итак, решениями являются окружности $y^2+x^2=cy$ с выколотыми точками (0; 0) и (0; c).

Через точку (–1; 1) проходит левая половина окружности с центром в точке (0; 1) единичного радиуса (рис. 7).

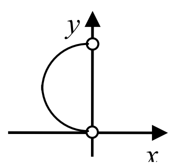

Рис. 7

Ответ: $y^2+x^2=cy$, где $x\neq 0$, — общее решение; $x=-\sqrt{2y-y^2}$ — частное решение.

Задача 4. Записать уравнения кривых, для которых точка пересечения любой касательной с биссектрисой первого и третьего координатных углов имеет абсциссу, отличающуюся в два раза от абсциссы точки касания.

Решение. В данной задаче особым будет являться случай $y_0' = 1$. Действительно, в этом случае угловые коэффициенты касательной и биссектрисы первого и третьего координатных углов равны, а значит, эти прямые либо параллельны, либо совпадают. В случае же $y_0' = \infty$ аналогично задаче 2 имеем особое решение $x = 0$.

Пусть теперь $y_0' \neq 1$ и $y_0' \neq \infty$. Координаты точки пересечения касательной $y = y_0'(x - x_0) + y_0$ с биссектрисой $y = x$ равны $\dfrac{y_0 - y_0' x_0}{1 - y_0'}$. Получаем дифференциальные уравнения $\dfrac{y - y'x}{1 - y'} = 2x$ или $\dfrac{2(y - y'x)}{1 - y'} = x$.

Преобразуем первое уравнение: $y - y'x = 2x - 2xy'$, или $y'x + y = 2x$ — это линейное уравнение первого порядка. Соответствующее ему однородное уравнение $y'x + y = 0$ имеет решение $y = \dfrac{c}{x}$. Варьируя константу, получим $\dfrac{c'x - c}{x^2} \cdot x + \dfrac{c}{x} = 2x$, $c' = 2x$ и $c = x^2 + \tilde{c}$. Окончательно общее решение записывается в виде $y = \dfrac{x^2 + c}{x}$ или $y = x + \dfrac{c}{x}$. Из условия $y' = 1 - \dfrac{c}{x^2} \neq 1$ следует, что $c \neq 0$, т.е. прямая $y = x$ не является решением задачи.

Аналогично для второго уравнения: $2y - 2y'x = x - xy'$, $y'x - 2y = -x$, $y = cx^2$ — решение однородного уравнения

$y'x-2y=0$. Решая методом вариации постоянной неоднородное уравнение $(c'x^2+2xc)x-2cx^2=-x$, получим $c'=-\dfrac{1}{x^2}$, $c=\dfrac{1}{x}+\tilde{c}$ и $y=\left(\dfrac{1}{x}+c\right)x^2=x+cx^2$, где $c\neq 0$.

Ответ: $y=x+\dfrac{c}{x}$ и $y=x+cx^2$, где $c\neq 0$, — общее решение; $x=0$ — особое решение.

Задача 5. Записать уравнения ортогональных траекторий к семейству эллипсов с центром в начале координат и осями, параллельными осям координат, причем одна из этих осей в два раза больше другой.

Решение. В зависимости от того, какая из осей больше другой, уравнения эллипсов можно записать в виде $x^2+4y^2=R^2$ или $4x^2+y^2=R^2$. Пусть $(x_0;y_0)$ — точка пересечения эллипса с ортогональной траекторией. Обратим внимание на то, что начало координат не принадлежит ни одному эллипсу из нашего семейства, а значит, x_0 и y_0 не могут одновременно равняться нулю.

Продифференцировав в точке $(x_0;y_0)$ уравнения эллипсов $2x_0+8y_0y_0'=0$ или $8x_0+2y_0y_0'=0$, находим угловые коэффициенты касательных к эллипсам $k_1=y_0'=-\dfrac{x_0}{4y_0}$ или $k_1=y_0'=-\dfrac{4x_0}{y_0}$. Пусть теперь k_2 — это угловые коэффициенты ортогональных траекторий.

Рассмотрим особые случаи. Если $k_1=0$, то $x_0=0$ и $k_2=\infty$, а если $k_1=\infty$, то $y_0=0$ и $k_2=0$. Следовательно, прямые $x=0$ и $y=0$ с выколотой точкой (0; 0) представляют собой искомые ортогональные траектории.

Если же $k_1 \neq 0$ и $k_1 \neq \infty$, то для касательной к ортогональной траектории в любой точке этой траектории верно соотношение $k_2 = -\frac{1}{k_1}$. Отсюда получаем дифференциальные уравнения $y' = \frac{4y}{x}$ или $y' = \frac{y}{4x}$, решениями которых являются функции $y = cx^4$ и $y = c\sqrt[4]{|x|}$, где $x \neq 0$. Заметим, что решение $y = 0$ входит в полученные общие решения при $c = 0$.

Ответ: $y = cx^4$ и $y = c\sqrt[4]{|x|}$, где $x \neq 0$, — общее решение; $x = 0$, где $y \neq 0$, — особое решение.

Задача 6. Записать уравнения кривых, образующих в каждой своей точке угол 45° с некоторой параболой из семейства $y = ax^2$.

Решение. Пусть $(x_0; y_0) \neq (0; 0)$ — точка пересечения искомой кривой с параболой $y = ax^2$. Тогда $a = \frac{y_0}{x_0^2}$ и $k_1 = y_0' = 2ax_0 = 2 \cdot \frac{y_0}{x_0^2} \cdot x_0 = \frac{2y_0}{x_0}$. Так как тангенс угла между кривыми равен единице, то, используя формулу $\operatorname{tg}\gamma = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$, получаем уравнение $\pm\left(\frac{2y}{x} - y'\right) = 1 + \frac{2yy'}{x}$.

Уравнение $\frac{2y}{x} - y' = 1 + \frac{2yy'}{x}$ является однородным. После замены $y = ux$ и $y' = u'x + u$ оно приобретет вид $2u - (u'x + u) = 1 + 2u(u'x + u)$, или $u'x(2u + 1) = u - 1 - 2u^2$. Разделим переменные: $\frac{(2u + 1)du}{2u^2 - u + 1} = -\frac{dx}{x}$, и проинтегрируем левую часть: $\int \frac{2u+1}{2u^2-u+1}du = \int \frac{u+0,5}{u^2-0,5u+0,5}du =$

$$= \int \frac{u-0,25}{(u-0,25)^2+0,4375}du + \int \frac{0,75}{(u-0,25)^2+0,4375}du =$$

$$= \frac{\ln\left|u^2-0,5u+0,5\right|}{2} + \frac{0,75}{\sqrt{0,4375}}\operatorname{arctg}\frac{u-0,25}{\sqrt{0,4375}} + c =$$

$= \frac{\ln\left|2u^2-u+1\right|}{2} + \frac{3}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4u-1}{\sqrt{7}} + c$. Следовательно, общее решение имеет вид $\frac{c}{x} = \sqrt{2u^2-u+1}\cdot\exp\left(\frac{3}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4u-1}{\sqrt{7}}\right)$, или $c = \sqrt{2y^2-yx+x^2}\cdot\exp\left(\frac{3}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4y-x}{\sqrt{7}x}\right)$. При делении на x мы не потеряли решение, так как прямая $x=0$ имеет только одну точку пересечения с любой параболой данного семейства.

Аналогично для уравнения $y' - \frac{2y}{x} = 1 + \frac{2yy'}{x}$ получаем $u'x + u - 2u = 1 + 2u(u'x+u)$, $\frac{(2u-1)du}{2u^2+u+1} = -\frac{dx}{x}$ и $c = \sqrt{2y^2+yx+x^2}\cdot\exp\left(-\frac{3}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4y+x}{\sqrt{7}x}\right)$.

Заметим, что из области определения полученных кривых видно, что они не содержат начало координат, поэтому сделанное в начале решения допущение $(x_0;y_0)\neq(0;0)$ правомерно. Также необходимо заметить, что в условии идет речь о параболах $y=ax^2$, а это означает, что параметр a подразумевается отличным от нуля. Следовательно, из решений выкалываются точки с нулевой ординатой.

Ответ: $c=\sqrt{2y^2 \pm yx + x^2}\cdot\exp\left(-\frac{3}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x\pm 4y}{\sqrt{7}x}\right)$, где $y \neq 0$, — общее решение.

Задача 7. Найти такие поверхности вращения, чтобы все лучи, исходящие из источника света, расположенного на оси вращения этой поверхности, отражались параллельно этой оси.

Решение. Рассмотрим плоскую фигуру, вращением которой получается искомая поверхность, при этом источник света поместим в начало координат, а ось ординат направим по оси вращения. Выберем произвольную точку $A(x_0; y_0)$

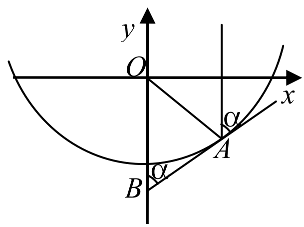

Рис. 8

на кривой и через $B(0; y_0 - y_0' x_0)$ обозначим точку пересечения касательной с осью ординат (рис. 8). Тогда $OA=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$ и $OB = y_0' x_0 - y_0$. Кроме того, так как отраженный луч параллелен оси ординат, то он с касательной образует тот же угол α, что и угол между касательной и осью ординат. Из оптики известно, что угол падения равен углу отражения, а значит, $\angle OAB = \angle OBA$ и треугольник OAB равнобедренный, т.е. $OA = OB$. Получаем однородное уравнение $y'x - y = \sqrt{x^2+y^2}$, или $y' = \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$. Замена $y = ux$ приведет это уравнение к виду $u'x=\sqrt{1+u^2}$, откуда $\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{dx}{x}$, $\ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right| = \ln|x| + \ln c$, $\sqrt{1+u^2} = xc - u$, $1+u^2 = x^2c^2 - 2xuc + u^2$, $x^2c^2 = 1 + 2xuc$. Возвращаясь к переменной y, получим $x^2c^2 = 1 + 2yc$, или $y = \frac{cx^2}{2} - \frac{1}{2c}$ — это уравнение параболы. Записав это уравнение в каноническом виде $x^2 = \frac{2}{c}\left(y - \frac{1}{2c}\right)$, видим, что параметр параболы $p = \frac{1}{c}$, а следовательно, ее фокус находится в начале координат (из аналитической геометрии известно, что фокус находится на расстоянии $\frac{p}{2} = \frac{1}{2c}$ от вершины параболы).

Ответ: параболоиды вращения, у которых источник света находится в фокусе вращающейся параболы.

1.2. Задачи на площадь криволинейной трапеции

Напомним, что криволинейной трапецией называют плоскую фигуру, которая в декартовой системе координат ограничена осью абсцисс, прямыми $x = a$ и $x = b$ и графиком непрерывной функции $y = f(x)$. Если $a < b$, то площадь криволинейной трапеции равна значению определенного интеграла $\int_a^b |f(x)|dx$. Отметим, что под площадью криволинейной трапеции мы здесь подразумеваем сумму площадей фигур, расположенных над и под осью абсцисс (рис. 9). Если $f(x) > 0$, то, зная площадь криволинейной трапеции, также можно вычислить координаты $(x_c; y_c)$ центра

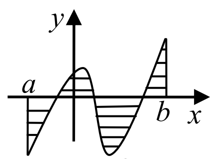

Рис. 9

тяжести этой трапеции: $x_c = \frac{1}{S}\int\limits_a^b xf(x)\,dx$ и $y_c = \frac{1}{2S}\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$, где $S = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ — площадь трапеции.

Из указанных формул видно, что задачи, связанные с криволинейной трапецией, как правило, сводятся к интегральным уравнениям. Однако дифференцирование обеих частей уравнения и использование факта, что производная от интеграла с переменным верхним пределом равна подынтегральной функции, позволяет в большинстве случаев перейти от интегральных уравнений к дифференциальным.

Задача 8. Записать уравнения кривых, обладающих следующим свойством: если через любую точку данной кривой провести прямые, параллельные осям координат, до пересечения с этими осями, то площадь полученного прямоугольника делится кривой в отношении 1:3. Начертить все непрерывные кривые, удовлетворяющие условию задачи и проходящие через точку (1; –1).

Решение. Выберем точку $A\left(x_0; y_0\right)$ на кривой. Условие задачи подразумевает, что x_0 и y_0 отличны от нуля и что дуга искомой кривой от начала координат O до точки A не выходит за рамки прямоугольника с вершинами в этих точках. Тогда кривая делит прямоугольник на две части, одной из которых является криволинейная трапеция (рис. 10). Находим, что площадь прямоугольника равна $\left|x_0 y_0\right|$, а площадь

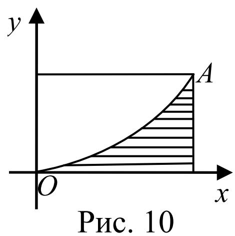

Рис. 10

трапеции — $\int\limits_0^{x_0}\left|y\right|dx$ для положительных x_0 и $\int\limits_{x_0}^{0}\left|y\right|dx$ для отрицательных x_0, при этом площадь трапеции должна составлять 1/4 или 3/4 от площади прямоугольника.

Возможны четыре случая. Если точка A лежит в первой четверти, то $4\int_0^x ydx = xy$ или $4\int_0^x ydx = 3xy$. Дифференцируя, получаем уравнения с разделяющимися переменными $4y = y + xy'$ или $4y = 3y + 3xy'$, общие решения которых имеют вид $y = cx^3$ и $y = c\sqrt[3]{x}$.

Аналогично если A лежит во второй четверти, то получаем уравнения $4\int_x^0 ydx = -xy$ или $4\int_x^0 ydx = -3xy$; если в третьей — уравнения $-4\int_x^0 ydx = xy$ или $-4\int_x^0 ydx = 3xy$; и если в четвертой — уравнения $-4\int_0^x ydx = -xy$ или $-4\int_0^x ydx = -3xy$. Все эти случаи приводят к тем же решениям $y = cx^3$ и $y = c\sqrt[3]{x}$.

Ответ: $y = cx^3$ и $y = c\sqrt[3]{x}$, где $x \neq 0$ и $c \neq 0$, — общее решение; правые ветви кубических парабол $y = -x^3$ и $y = -\sqrt[3]{x}$ — частные решения.

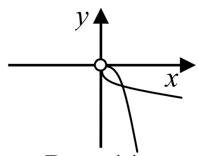

Рис. 11

Задача 9. Записать уравнения кривых, для любой точки которых абсцисса центра тяжести криволинейной трапеции, ограниченной осями координат, дугой этой кривой и отрезком, соединяющим данную точку с ее проекцией на ось абсцисс, составляет 90 % от абсциссы этой точки.

Решение. Будем считать, что кривая находится в верхней полуплоскости, так как из соображений симметрии очевидно, что при отображении кривой относительно оси абсцисс координата x_c центра тяжести не меняется. Тогда для любой точки $A(x_0; y_0)$, где $x_0 > 0$, должно выполняться условие $\frac{1}{S}\int\limits_0^{x_0} xy\,dx = \frac{9x_0}{10}$, или $10\int\limits_0^{x_0} xy\,dx = 9x_0 S$. Подставив в это соотношение формулу площади трапеции и перейдя к произвольной точке $(x; y)$, получим интегральное уравнение $10\int\limits_0^{x} xy\,dx = 9x\int\limits_0^{x} y\,dx$. Продифференцируем его по переменной x: $10xy = 9\int\limits_0^{x} y\,dx + 9xy$ — снова интегральное уравнение. Приведем подобные и еще раз продифференцируем: $y + xy' = 9y$ — дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Общее решение имеет вид $y = cx^8$. Легко проверить, что уравнение $10\int\limits_x^{0} xy\,dx = 9x\int\limits_x^{0} y\,dx$, верное для отрицательных x_0, приводит к этому же ответу. Итак, задача решена для положительных y, т.е. для $c > 0$, но, как было отмечено выше, ответ верен и для отрицательных y, т.е. для $c < 0$. Однако при нулевом y, т.е. $c = 0$, задача теряет смысл.

Ответ: $y = cx^8$, где $x \neq 0$ и $c \neq 0$, — общее решение.

Глава 2. Физические задачи

2.1. Задачи на движение

При прямолинейном движении мгновенные скорость и ускорение определяются как первая и вторая производные соответственно от перемещения (пути), т.е. скорость $v(t) = s'(t)$ и ускорение $a(t) = s''(t) = v'(t)$, где $s(t)$ — перемещение точки за время t. Напомним, что если при прямолинейном движении тело не меняет направления движения, то понятия перемещения и пройденного пути совпадают.

Пусть теперь данное движение вызвано силой F, направленной вдоль прямой движения. Тогда по второму закону Ньютона $F = ma = ms''$. В обычно встречающихся задачах сила зависит от расстояния s или скорости v, что приводит к дифференциальному уравнению $ms'' = F(s)$ или $mv' = F(v)$. Далее мы рассмотрим три примера действующей силы: силу сопротивления, силу упругости и центробежную силу.

Сила сопротивления. Как показывает опыт, если тело при движении испытывает сопротивление среды, то сила этого сопротивления возрастает при увеличении скорости тела. При этом если скорость движения невелика и тело имеет малые размеры, то силу сопротивления можно считать пропорциональной скорости (например, сопротивление воды при движении плавучего средства по ее поверхности или при погружении небольшого объекта в воду). Если же скорость и размеры предмета велики, то сопротивление становится пропорциональным квадрату скорости (например, свободное падение большого тела в воздухе). Итак, сила сопротивления $F_r = \mu v$ или $F_r = \mu v^2$, где μ — коэффициент сопротивления. Часто для удобства коэффициент μ уменьшают в m раз, где m — масса движущегося тела, т.е. записывают $F_r = \mu m v$ или $F_r = \mu m v^2$, что позволяет сократить на ненулевой множитель второй закон Ньютона. Действительно, если, например, на тело действует только сила сопротивления, то получаем уравнения $mv' = -\mu m v$ или $mv' = -\mu m v^2$, которые сокращаются до $v' = -\mu v$ или $v' = -\mu v^2$. Знак минус в этих уравнениях показывает, что сила сопротивления (а значит, и вызываемое ею ускорение) имеет направление, противоположное скорости движения тела.

Сила упругости. Если пружина находится в состоянии покоя, то по первому закону Ньютона, равнодействующая всех сил, действующих на нее, равна нулю. Однако закон Гука утверждает, при небольшой деформации пружины, т.е. при изменении ее длины, возникает сила упругости, пропорциональная величине этого изменения, которая стремится вернуть пружину в исходное положение. Следовательно, при рассмотрении колебаний пружины достаточно рассматривать силу упругости $F_e = ks$, где k — коэффициент жесткости пружины; s — отклонение от положения равновесия, и, возможно, силу сопротивления движению пружины, остальные же силы (в том числе сила тяжести) уравновешивают друг друга. Таким образом, второй закон Ньютона приводит к дифференциальному уравнению второго порядка $ms'' = -ks$, или $ms'' = -\mu s' - ks$, или $ms'' = -\mu (s')^2 - ks$. Здесь через m обычно обозначают массу груза, прикрепленного к пружине, массой же самой пружины, как правило, пренебрегают. Знак минус указывает на то, что сила упругости направлена в сторону, противоположную отклонению пружины, а сила сопротивления противоположна вектору скорости.

Центробежная сила. На тело массой m, движущееся по окружности радиуса r с угловой скоростью ω, действует центробежная сила $F_c = m\omega^2 r$, направленная от центра окружности вращения.

Также заметим, что если тело движется не по прямой, а в плоскости или в пространстве, то задача обычно сводится уже не к одному дифференциальному уравнению, а к системе двух или трех уравнений соответственно. Связано это с тем, что описанные выше соотношения приходится рассматривать для проекций векторов перемещения, скорости, ускорения и силы на оси координат. Например, векторное равенство $\vec{v} = \vec{s}'$ приводит к трем скалярным равенствам $v_x = x'$, $v_y = y'$ и $v_z = z'$, где v_x, v_y и v_z — проекции скорости; x, y и z — координаты движущейся точки.

Задача 10. Под действием сопротивления воды лодка за 1 мин замедлила свое движение с 6 до 1 км/ч. Какой путь пройдет лодка до полной своей остановки?

Решение. Пусть $v(t)$ — это скорость лодки в момент времени t. Лодка замедляет свое движение за счет силы сопротивления воды, пропорциональной скорости лодки: $F_r = \mu m v$. Тогда второй закон Ньютона приводит к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными $v' = -\mu v$, решение которого имеет вид $v = ce^{-\mu t}$. Воспользовавшись условиями $v(0) = 6$ и $v\left(\frac{1}{60}\right) = 1$, получим, что $c = 6$ и $6e^{-\frac{\mu}{60}} = 1$, откуда $e^{-\mu} = 6^{-60}$. Следовательно, скорость движения лодки задается уравнением $v = 6^{1-60t}$. Из данного равенства видно, что теоретически в любой конечный момент времени скорость лодки положительна и остановка может произойти только при $t = \infty$. Итак, путь

$s=\int\limits_0^{+\infty} 6^{1-60t}\,dt=-\left.\frac{6^{1-60t}}{60\ln 6}\right|_0^{+\infty}=\frac{1}{10\ln 6}\approx 0,05581$ км, т.е. чуть менее 56 м.

Отметим, что функция $v=6^{1-60t}$ очень быстро приближается к нулю. Например, уже через 10 мин скорость будет составлять меньше одной десятой миллиметра в час, т.е. практически равной нулю. Поэтому при расчете пути лодки до ее полной остановки несобственный интеграл можно заменить определенным $s=\int\limits_0^{\frac{1}{6}} 6^{1-60t}\,dt$, при этом погрешность будет крайне незначительной, меньшей, чем одна тысячная миллиметра.

Ответ: 55 м 81 см.

Задача 11. Мяч весом 400 г брошен вверх со скоростью 20 м/с. Известно, что на мяч, летящий со скоростью 1 м/с, воздух оказывает сопротивление 5 Н. Считая ускорение свободного падения равным 10 м/с^2, найти наибольшую высоту подъема мяча.

Решение. Пусть $v(t)$ — это скорость мяча в момент времени t. На движение мяча оказывают влияние направленные вниз сила тяжести $F_g=mg$ и сила сопротивления воздуха, пропорциональная квадрату скорости, $F_r=\mu m v^2$. Для нахождения коэффициента μ заметим, что если $v=1$ м/с и $m=400$ г, то $F_r=5$ Н. Следовательно, $\mu=\frac{F_r}{mv^2}=\frac{5}{400}=0,0125$ м$^{-1}$.

Теперь запишем второй закон Ньютона: $ma=-F_g-F_r$ или $mv'=-10m-0,0125mv^2$. Сокращая на массу, получим уравнение $v'=-10-0,0125v^2$. Разделим переменные:

$\dfrac{dv}{0,0125v^2+10}=-dt$, и проинтегрируем левую часть: $\displaystyle\int\frac{dv}{0,0125v^2+10}=80\int\frac{dv}{v^2+800}=2\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\frac{v}{20\sqrt{2}}+c$. Затем из найденного общего решения $2\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\dfrac{v}{20\sqrt{2}}=c-t$ выразим скорость: $v=20\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\dfrac{c-t}{2\sqrt{2}}$.

Наивысшей точки своего полета мяч достигает в тот момент, когда его скорость равна нулю, т.е. при $t=c$. Следовательно, наибольшую высоту можно найти как путь, пройденный в промежуток времени от $t=0$ до $t=c$, т.е.

$$h=20\sqrt{2}\int_0^c\mathrm{tg}\frac{c-t}{2\sqrt{2}}\,dt=80\ln\left|\cos\frac{c-t}{2\sqrt{2}}\right|\Bigg\|_{t=0}^{t=c}=-80\ln\left|\cos\frac{c}{2\sqrt{2}}\right|.$$

Итак, для получения окончательного ответа осталось найти значение константы *c*. По условию задачи $v(0)=20$. Подставив эти значения в общее решение, находим, что

$$c=2\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}},\quad h=-80\ln\left|\cos\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right|=40\ln\frac{3}{2}\approx16,22 \text{ м}$$

(мы использовали формулу $\cos\mathrm{arctg}\,a=\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$).

Ответ: 16 м 22 см.

Задача 12. Груз массой 320 г подвешен на легкой пружине и выведен из состояния покоя вытягиванием пружины на 8 см, при этом возникла сила упругости 1 Н. Затем груз подбросили вертикально вверх, придав ему начальную скорость 0,5 м/с. Найти период и амплитуду свободных колебаний груза, если движение происходит без сопротивления.

Решение. Обозначим через $s(t)$ отклонение груза от положения равновесия. Колебания вызываются силой упругости $F_e = ks$, причем так как при удлинении пружины на 8 см сила упругости составила 1 Н, то коэффициент жесткости $k = \frac{1}{0,08} = 12,5$ кг/с^2. Запишем второй закон Ньютона $ma = -ks$, откуда получим линейное однородное уравнение второго порядка $0,32s'' + 12,5s = 0$. Характеристическое уравнение $0,32\lambda^2 + 12,5 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm 6,25i$, значит, общее решение записывается в виде $s = c_1 \cos 6,25t + c_2 \sin 6,25t$.

Для нахождения констант заметим, что $s(0) = c_1 = 0,08$ и $v(0) = s'(0) = 6,25c_2 = 0,5$. Следовательно, $c_1 = 0,08$, $c_2 = 0,08$ и уравнение колебательного движения имеет вид $s = 0,08\cos 6,25t + 0,08\sin 6,25t$, или, если ввести вспомогательный угол, $s = 0,08\sqrt{2}\sin\left(6,25t + \frac{\pi}{4}\right)$. Таким образом, амплитуда колебания равна $0,08\sqrt{2} \approx 0,113$ м, а период — $\frac{2\pi}{6,25} \approx 1$ с.

Ответ: период — 1 с; амплитуда — 11 см 3 мм.

Задача 13. Найти уравнение движения груза массой 200 г, закрепленного на легкой вертикальной пружине с коэффициентом жесткости 5 кг/с^2, если первоначально груз был отклонен от положения равновесия на 2 см и затем отпущен без начальной скорости. Известно, что при движении данного груза со скоростью 10 м/с сопротивление воздуха составляет 1 Н.

Решение. Пусть $s(t)$ — это отклонение груза от положения равновесия в момент времени t. На груз действуют сила упругости пружины $F_e = 5s$ и сила сопротивления воздуха, которую будем считать пропорциональной скорости груза, т.е. $F_r = \mu v = \mu s'$, где $\mu = 0,1$ кг/с. Получим дифференциальное уравнение $0,2s'' = -0,1s' - 5s$, или $0,2s'' + 0,1s' + 5s = 0$. Характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_{1,2} = \dfrac{-0,1 \pm \sqrt{0,01-4}}{0,4} \approx -0,25 \pm 5i$, поэтому общее решение выглядит следующим образом: $s = e^{-0,25t}(c_1 \cos 5t + c_2 \sin 5t)$.

Дифференцируя, найдем скорость груза: $v = e^{-0,25t}(-0,25c_1 \cos 5t - 0,25c_2 \sin 5t - 5c_1 \sin 5t + 5c_2 \cos 5t)$, и из начальных условий $s(0) = 0,02$ и $v(0) = 0$ вычислим константы: $c_1 = 0,02$ и $c_2 = 0,001$. Следовательно, окончательно уравнение движения груза приобретает вид $s = e^{-0,25t}(0,02\cos 5t + 0,001\sin 5t)$.

Ответ: $s = e^{-0,25t}(0,02\cos 5t + 0,001\sin 5t)$.

Задача 14. Трубка с находящимся в ней шариком равномерно вращается вокруг перпендикулярной к ней вертикальной оси, причем за десять минут трубка делает три полных оборота. Чему станет равным расстояние от шарика до оси через минуту после начала вращения, если изначально оно равнялось 4 см и шарик имел нулевую скорость?

Решение. Пусть $r(t)$ — это расстояние от шарика до оси вращения в момент времени t. Угловая скорость вращения трубки равна $\dfrac{6\pi}{600} = 0,01\pi$ рад/с. Учитывая действующую на шарик центробежную силу $F_c = (0,01\pi)^2 mr$, где m — масса шарика, составим уравнение $mr'' = (0,01\pi)^2 mr$, или

$r'' - (0,01\pi)^2 r = 0$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - (0,01\pi)^2 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm 0,01\pi$, значит, $r = c_1 e^{0,01\pi t} + c_2 e^{-0,01\pi t}$.

Из начальных условий $r(0) = 0,04$ и $r'(0) = 0$ видно, что $c_1 = c_2 = 0,02$ и $r = 0,04\,\mathrm{ch}\,0,01\pi t$. Подставляя в качестве времени 60 с, получим $r = 0,04\,\mathrm{ch}\,0,6\pi \approx 0,135$ м.

Ответ: 13 см 5 мм.

Задача 15. Горизонтальная трубка вращается с угловой скоростью 0,2 рад/с вокруг вертикальной оси. В трубке находится пружина длиной 10 см и коэффициентом жесткости 0,48 кг/с^2, к концам которой прикреплены грузики массой 600 г и 400 г, причем в момент начала вращения пружина не растянута и грузики одинаково удалены от оси вращения. Найти зависимость изменения длины пружины от времени.

Решение. Пусть $r_1(t)$ и $r_2(t)$ — это расстояния в метрах от оси вращения до первого и второго грузиков соответственно (первым будем считать грузик в 600 г, а вторым — грузик в 400 г) в момент времени t.

В процессе вращения под действием центробежных сил $F_{c1} = 0,6 \cdot 0,2^2 \cdot r_1 = 0,024 r_1$ и $F_{c2} = 0,4 \cdot 0,2^2 \cdot r_2 = 0,016 r_2$ грузики начинают удаляться от оси вращения, что приводит к растягиванию пружины. Возникает сила упругости. Заметим, что удлинение пружины равно разности между длиной пружины в текущий момент времени и первоначальной длиной, т.е. $(r_1 + r_2 - 0,1)$ м. Следовательно, сила упругости составляет $F_e = 0,48(r_1 + r_2 - 0,1)$ Н, причем она направлена в сторону оси вращения, т.е. противоположна направлению центробежных сил.

Получаем систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} 0,6r_1'' = 0,024r_1 - 0,48(r_1 + r_2 - 0,1) \\ 0,4r_2'' = 0,016r_2 - 0,48(r_1 + r_2 - 0,1) \end{cases}$. Вычтя из первого уравнения второе $0,6r_1'' - 0,4r_2'' = 0,024r_1 - 0,016r_2$ и введя новую переменную $z(t) = 0,6r_1 - 0,4r_2$, получим линейное однородное уравнение второго порядка $z'' - 0,04z = 0$, общее решение которого имеет вид $z = c_1e^{0,2t} + c_2e^{-0,2t}$.

Возвращаемся к исходным переменным: $0,6r_1 - 0,4r_2 = c_1e^{0,2t} + c_2e^{-0,2t}$. В начальный момент времени грузики находились на расстоянии 5 см от оси вращения и имели нулевую скорость, т.е. $r_1(0) = r_2(0) = 0,05$ и $r_1'(0) = r_2'(0) = 0$. Эти условия приводят к системе уравнений $\begin{cases} c_1 + c_2 = 0,01 \\ 2c_1 - 2c_2 = 0 \end{cases}$, из которой $c_1 = c_2 = 0,005$ и $0,6r_1 - 0,4r_2 = 0,005\left(e^{0,2t} + e^{-0,2t}\right) = 0,01\operatorname{ch}0,2t$.

Из данного равенства выразим одну из переменных, например $r_2 = 1,5r_1 - 0,025\operatorname{ch}0,2t$, и подставим ее в любое уравнение искомой системы, например в первое: $0,6r_1'' = 0,024r_1 - 0,48(2,5r_1 - 0,025\operatorname{ch}0,2t - 0,1)$. После раскрытия скобок и приведения подобных уравнение примет вид $0,6r_1'' + 1,176r_1 = 0,012\operatorname{ch}0,2t + 0,048$. Характеристическое уравнение $0,6\lambda^2 + 1,176 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm 1,4i$, поэтому $r_1 = c_1\sin 1,4t + c_2\cos 1,4t$ — решение однородного уравнения $0,6r_1'' + 1,176r_1 = 0$.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $r_1 = A\operatorname{ch}0,2t + B\operatorname{sh}0,2t + C$. Тогда

$r_1'' = 0,04A\,\mathrm{ch}\,0,2t + 0,04B\,\mathrm{sh}\,0,2t$. После подстановки этих выражений искомое уравнение приобретает вид $1,2A\,\mathrm{ch}\,0,2t + 1,2B\,\mathrm{sh}\,0,2t + 1,176C = 0,012\,\mathrm{ch}\,2t + 0,048$, откуда $A = \dfrac{0,012}{1,2} = 0,01$, $B = 0$ и $C = \dfrac{0,048}{1,176} = \dfrac{2}{49}$. Значит, общее решение неоднородного уравнения записывается в виде $r_1 = c_1 \sin 1,4t + c_2 \cos 1,4t + \dfrac{\mathrm{ch}\,0,2t}{100} + \dfrac{2}{49}$.

Еще раз воспользовавшись начальными условиями $r_1(0) = 0,05$ и $r_1'(0) = 0$, получим $c_2 + 0,01 + \dfrac{2}{49} = 0,05$ и $1,4c_1 = 0$, откуда $c_2 = -\dfrac{1}{1225}$ и $c_1 = 0$. Следовательно, закон движения первого грузика окончательно описывается соотношением $r_1 = \dfrac{\mathrm{ch}\,0,2t}{100} - \dfrac{\cos 1,4t}{1225} + \dfrac{2}{49}$. А закон движения второго грузика имеет следующий вид: $r_2 = 1,5r_1 - 0,025\,\mathrm{ch}\,0,2t = \dfrac{3}{49} - \dfrac{\mathrm{ch}\,0,2t}{100} - \dfrac{3\cos 1,4t}{2450}$. Длина пружины равна сумме найденных расстояний: $r_1 + r_2 = \dfrac{5}{49} - \dfrac{\cos 1,4t}{490}$.

Ответ: $\dfrac{5}{49} - \dfrac{\cos 1,4t}{490}$.

Задача 16. Однородная цепь длиной 2,5 м соскальзывает с горизонтального стола, причем в начальный момент времени со стола свисает конец длиной 10 см. Пренебрегая трением и считая ускорение свободного падения равным 10 м/с^2, найти время соскальзывания всей цепи.

Решение. Пусть $l(t)$ — это длина в метрах свисающей со стола части цепи в момент времени t. Силой, под действием которой движется цепь, является сила тяжести свисающей части $F_g = mg = 10\rho l$, где через ρ обозначена линейная плотность цепи. Из второго закона Ньютона следует, что $F_g = Ma = 2,5\rho l''$ (здесь $m = \rho l$ — масса свисающей части цепи, а $M = 2,5\rho$ — масса всей цепи). Получаем дифференциальное уравнение $10\rho l = 2,5\rho l''$, или $2,5l'' - 10l = 0$ — это линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами второго порядка.

Характеристическое уравнение $2,5\lambda^2 - 10 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm 2$, значит, $l = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$. Неизвестные константы можно найти, исходя из начальных условий $l(0) = 0,1$ и $l'(0) = 0$, которые приводят к системе уравнений $\begin{cases} c_1 + c_2 = 0,1 \\ 2c_1 - 2c_2 = 0 \end{cases}$, откуда $c_1 = c_2 = 0,05$, и решение принимает вид $l = 0,05\left(e^{2t} + e^{-2t}\right) = 0,1\,\mathrm{ch}\,2t$.

Для нахождения времени соскальзывания всей цепи надо принять длину l равной $2,5 - 0,1 = 2,4$ м. Получим

$2,4 = 0,1\,\mathrm{ch}\,2t$ и $t = \dfrac{\mathrm{arcch}\,24}{2} = \dfrac{\ln\left(24 + \sqrt{24^2 - 1}\right)}{2} \approx 1,94$ с, т.е. чуть меньше двух секунд (мы воспользовались формулой $\mathrm{arcch}\,a = \ln(a + \sqrt{a^2 - 1})$).

Ответ: 1,94 с.

Задача 17. На противоположных берегах реки шириной 500 м расположены два пункта *A* и *B*, причем отрезок *AB* перпендикулярен берегам. Катер с собственной скоростью 8 км/ч переправляется из *A* в *B* так, что в любой момент времени его нос направлен в точку *B*. Найти время переправы, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

Решение. Введем систему координат, причем точку B поместим в начало координат, ось ординат расположим вдоль отрезка AB, а направление оси абсцисс выберем совпадающим с направлением течения реки (рис. 12). По условию задачи если в момент времени t катер находится в точке $C(t)=\left(x(t);y(t)\right)$, то

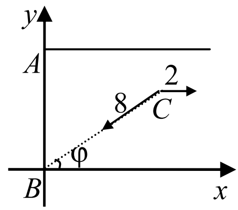

Рис. 12

вектор его скорости направлен вдоль отрезка CB. Обозначим через $\rho(t)$ длину отрезка CB, а через $\varphi(t)$ — угол между отрезком CB и осью абсцисс, т.е. фактически введем полярные координаты. Тогда из чертежа видно, что $x'=2-8\cos\varphi$ и $y'=-8\sin\varphi$.

Подставив в эти равенства формулы перехода к полярным координатам $x=\rho\cos\varphi$ и $y=\rho\sin\varphi$, получим систему дифференциальных уравнений с двумя неизвестными $\begin{cases}\rho'\cos\varphi-\rho\varphi'\sin\varphi=2-8\cos\varphi\\ \rho'\sin\varphi+\rho\varphi'\cos\varphi=-8\sin\varphi\end{cases}$. Разрешим данную систему относительно выражений ρ' и $\rho\varphi'$. По формулам Крамера найдем определители: $\Delta=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$;

$$\Delta_{\rho'}=\begin{vmatrix}2-8\cos\varphi & -\sin\varphi\\ -8\sin\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}=2\cos\varphi-8\cos^2\varphi-8\sin^2\varphi=$$
$$=2\cos\varphi-8;$$

$$\Delta_{\rho\varphi'}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & 2-8\cos\varphi\\ \sin\varphi & -8\sin\varphi\end{vmatrix}=-8\cos\varphi\sin\varphi-2\sin\varphi+8\cos\varphi\sin\varphi=$$
$$=-2\sin\varphi.$$

Тогда $\rho'=2\cos\varphi-8$ и $\rho\varphi'=-2\sin\varphi$.

Итак, нам удалось существенно упростить нашу систему уравнений: $\begin{cases}\rho'=2\cos\varphi-8\\ \rho\varphi'=-2\sin\varphi\end{cases}$. Теперь из второго уравнения выразим $\rho = -\dfrac{2\sin\varphi}{\varphi'}$, продифференцируем: $\rho' = -\dfrac{2(\varphi')^2\cos\varphi - 2\varphi''\sin\varphi}{(\varphi')^2} = \dfrac{2\varphi''\sin\varphi}{(\varphi')^2} - 2\cos\varphi$, и подставим в первое уравнение: $\dfrac{2\varphi''\sin\varphi}{(\varphi')^2} - 2\cos\varphi = 2\cos\varphi - 8$, или $\dfrac{\varphi''\sin\varphi}{(\varphi')^2} = 2\cos\varphi - 4$ — это уравнение второго порядка, не содержащее независимую переменную *t*.

Для решения этого уравнения сделаем замену $\varphi' = p(\varphi)$ и $\varphi'' = p'p$. Имеем $\dfrac{p'p\sin\varphi}{p^2} = 2\cos\varphi - 4$ — уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные: $\dfrac{dp}{p} = \dfrac{2\cos\varphi - 4}{\sin\varphi} d\varphi$. Проинтегрируем отдельно правую часть: $2\int \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi} d\varphi - 4\int \dfrac{d\varphi}{\sin\varphi} = 2\int \dfrac{d(\sin\varphi)}{\sin\varphi} - 4\int \dfrac{d(\operatorname{tg}\varphi/2)}{\operatorname{tg}(\varphi/2)} =$ $= 2\ln|\sin\varphi| - 4\ln|\operatorname{tg}(\varphi/2)| + \ln c$. Тогда общее решение для функции $p(\varphi)$ имеет вид $p = \dfrac{c\sin^2\varphi}{\operatorname{tg}^4(\varphi/2)}$. Чтобы найти константу *c*, заметим, что в начальный момент времени точки *A* и *C* совпадали, а значит, $\varphi(0) = \dfrac{\pi}{2}$ и $\rho(0) = 0,5$. Тогда из второго уравнения системы $\rho\varphi' = -2\sin\varphi$ видно, что $\varphi'(0) = -4$, а значит, $p\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -4$. Подставив эти значения в общее решение, найдем $c = -4$ и $p = -\dfrac{4\sin^2\varphi}{\operatorname{tg}^4(\varphi/2)}$.

Вернувшись от переменной p к переменной φ, получим уже уравнение первого порядка $\varphi' = -\dfrac{4\sin^2\varphi}{\operatorname{tg}^4(\varphi/2)}$, откуда $\dfrac{\operatorname{tg}^4(\varphi/2)}{\sin^2\varphi}d\varphi = -4dt$. Для интегрирования левой части еще раз применим основную тригонометрическую подстановку: $\displaystyle\int\frac{\operatorname{tg}^4(\varphi/2)}{\sin^2\varphi}d\varphi = \frac{1}{2}\int\operatorname{tg}^2(\varphi/2)\left(1+\operatorname{tg}^2(\varphi/2)\right)d\left(\operatorname{tg}(\varphi/2)\right) =$ $\displaystyle= \frac{1}{2}\int\operatorname{tg}^2(\varphi/2)d\left(\operatorname{tg}(\varphi/2)\right) + \frac{1}{2}\int\operatorname{tg}^4(\varphi/2)d\left(\operatorname{tg}(\varphi/2)\right) = \frac{\operatorname{tg}^3(\varphi/2)}{6} +$ $\displaystyle+\frac{\operatorname{tg}^5(\varphi/2)}{10} + c$, а затем для $\varphi(t)$ запишем общее решение $\dfrac{\operatorname{tg}^3(\varphi/2)}{6} + \dfrac{\operatorname{tg}^5(\varphi/2)}{10} = c - 4t$, или $5\operatorname{tg}^3(\varphi/2) + 3\operatorname{tg}^5(\varphi/2) =$ $= c - 120t$. Так как $\varphi(0) = \dfrac{\pi}{2}$, то $c = 8$.

Далее выразим ρ через φ. Для этого в выражение $\rho = -\dfrac{2\sin\varphi}{\varphi'}$ подставим $\varphi' = -\dfrac{4\sin^2\varphi}{\operatorname{tg}^4(\varphi/2)}$ и получим, что $\rho = \dfrac{\operatorname{tg}^4(\varphi/2)}{2\sin\varphi}$. Осталось заметить, что в момент окончания переправы радиус-вектор $\rho = 0$, а значит, $\dfrac{\operatorname{tg}^4(\varphi/2)}{2\sin\varphi} = 0$, откуда видно, что и угол $\varphi = 0$. Это условие позволяет из общего решения $5\operatorname{tg}^3(\varphi/2) + 3\operatorname{tg}^5(\varphi/2) = c - 120t$ выразить время переправы: $t = \dfrac{c}{120} = \dfrac{8}{120} = \dfrac{1}{15}$ ч, т.е. 4 мин.

Ответ: 4 мин.

2.2. Задачи на реактивное движение

При движении тела с переменной массой (например, космический корабль) второй закон Ньютона не применим, так как он справедлив только для тел с постоянной массой. В этом случае используют так называемое уравнение Мещерского $mv' = F + um'$, где $m(t)$ — масса тела; $v(t)$ — его скорость; $F(t)$ — действующая на него сила в момент времени t. Через $u(t)$ обозначена относительная (относительно самого движущегося тела) скорость частиц, присоединяющихся к телу, или, наоборот, отсоединяющихся от него. При движении космической ракеты u — это скорость истечения продуктов горения из сопла ракеты, причем в этом случае ускорение v' и скорость истечения газов u имеют противоположные направления.

Величину m', характеризующую скорость изменения массы тела, называют секундным расходом массы. Заметим, что если масса тела постоянна, то секундный расход равен нулю и уравнение Мещерского превращается во второй закон Ньютона. В случае же летательного аппарата с реактивным двигателем секундный расход отрицателен, так как масса аппарата уменьшается в ходе движения. В простейших моделях секундный расход топлива считают постоянным.

Задача 18. Ракета с нулевой начальной скоростью движется прямолинейно под действием отдачи от струи газа, исходящей со скоростью 2 км/с. Масса ракеты с полным запасом топлива равна 400 т, без топлива — 50 т. Найти скорость движения ракеты после сгорания всего топлива, пренебрегая силой тяжести и сопротивлением воздуха.

Решение. Пусть $m(t)$ и $v(t)$ — это масса и скорость ракеты соответственно в момент времени t. Тогда уравнение

Мещерского запишется в виде $mv' = -2m'$ или $m\frac{dv}{dt} = -2\frac{dm}{dt}$. Домножив обе части равенства на dt и введя в рассмотрение функцию $v(m)$, получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными $mdv = -2dm$. Имеем $dv = -2\frac{dm}{m}$ и $v = -2\ln m + c$ — общее решение. Из условия $v(400) = 0$ находим, что $c = 2\ln 400$ и $v = 2\ln\frac{400}{m}$ — частное решение. Подставив $m = 50$, получим, что после сгорания топлива скорость корабля достигнет значения $v = 2\ln\frac{400}{50} = 2\ln 8 \approx 4{,}16$ км/с.

Ответ: 4,16 км/с.

Комментарий. Отметим, что в ходе решения данной задачи мы фактически вывели формулу скорости космического аппарата $v = u\ln\frac{M}{m}$, которая впервые была получена Циолковским в 1897 году и сейчас носит его имя. В этой формуле через M и m обозначены начальная и конечная (после выработки топлива) массы космического аппарата, через u — скорость газовой струи. Скорость ракеты v, вычисляемую по формуле Циолковского, называют характеристической. Реальная же скорость, как правило, ниже характеристической из-за влияния сил гравитации и сопротивления среды, а также из-за потерь, вызванных затратами на управление движением космического корабля.

Задача 19. Ракета с начальной массой 250 т движется вертикально вверх под действием силы тяги реактивного двигателя. Скорость истечения газов и секундный расход топлива постоянны и равны 3 км/с и 1 т/с соответственно. На какую высоту поднимется ракета через минуту после старта, если на поверхности Земли скорость ракеты равна нулю? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Пусть $m(t)$ и $v(t)$ — это масса и скорость ракеты соответственно в момент времени t. На движение ракеты оказывают влияние сила тяги двигателя ракеты и сила тяжести Земли $F_g = mg$. Значит, уравнение Мещерского запишется в виде $mv' = -0,01m - 3m'$ (ускорение свободного падения считаем равным 0,01 км/с^2, численное значение расхода топлива пока не подставляем). Выразим ускорение: $v' = -0,01 - 3\dfrac{m'}{m}$, и проинтегрируем обе части по времени: $v = -0,01t - 3\ln m + c$. Так как в момент старта скорость ракеты нулевая, а масса составляет 250 т, то $c = 3\ln 250$ и $v = 3\ln\dfrac{250}{m} - 0,01t$.

Итак, для нахождения скорости ракеты в произвольный момент времени осталось выразить массу ракеты через время. Так как секундный расход топлива $m' = -1$ т/с, то, интегрируя, находим, что $m = c - t$, где при $t = 0$ видно, что $c = 250$ и $m = 250 - t$. Подставив выражение для массы ракеты в выведенную нами формулу скорости, получим $v = 3\ln\dfrac{250}{250-t} - 0,01t = -3\ln(1-0,004t) - 0,01t$.

Высоту подъема ракеты за одну минуту найдем как интеграл от скорости: $h = -3\int\limits_0^{60}\ln(1-0,004t)dt - 0,01\int\limits_0^{60} tdt =$
$= (750-3t)\ln(1-0,004t)\Big|_0^{60} + 3t\Big|_0^{60} - 0,005t^2\Big|_0^{60} = 570\ln 0,76 +$
$+180 - 18 \approx 5,571$ км.

Ответ: 5 км 571 м.

Комментарий. Достаточно небольшая высота подъема ракеты показывает, что напрямую использование аппаратов с реактивным двигателем для преодоления силы тяжести Земли нерационально. На практике в современной космонавтике используются более сложные многоступенчатые ракеты-носители. При этом расчеты скорости и высоты подъема каждой отдельной ступени осуществляются по тем же принципам, что и в приведенных в данном параграфе задачах.

2.3. Задачи на радиоактивный распад

Радиоактивным распадом называют самопроизвольное превращение ядер атомов некоторых элементов в ядра других элементов. Радиоактивный распад носит статистический характер: ядра атомов распадаются не одновременно все сразу, а в течение времени существования данного изотопа. Экспериментальным путем установлено, что мгновенная скорость радиоактивного распада пропорциональна количеству вещества, имеющемуся в данный момент, т.е. $m' = -\lambda m$, где m — масса нераспавшегося вещества; λ — постоянная распада. Знак минус берется потому, что масса вещества уменьшается, а значит, скорость его изменения отрицательна. Время, в течение которого распадается половина имеющегося вещества, называется периодом полураспада. Периоды полураспада основных радиоактивных изотопов приводятся в физических справочниках, например для радона он составляет около четырех суток, для радия — 16 веков, для плутония — более 24 тысячелетий, а для урана-238 — 4,5 миллиарда лет.

Задача 20. Согласно опытам в течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг. Через сколько лет распадется четверть имеющегося радия?

Решение. Пусть $m(t)$ — это масса оставшегося радия к моменту времени t, где время измеряется в годах. Закон радиоактивного распада приводит к уравнению с разделяющимися переменными $m' = -\lambda m$, общее решение которого имеет вид $m = ce^{-\lambda t}$. Подставив $t = 0$, увидим, что константа c совпадает с величиной массы радия в начальный момент времени, т.е. $c = m(0)$, и $m = m(0)e^{-\lambda t}$ — частное решение. Из условия задачи следует, что за год распадается 0,044 % имеющегося радия, следовательно, к концу первого года останется 99,956 % радия, т.е. $m(1) = 0,99956 \cdot m(0)$. Подставляя в частное решение, находим, что $e^{-\lambda} = 0,99956$ и $m = m(0) \cdot 0,99956^t$.

Если ко времени t распалась четверть радия, то $m(t) = 0,75m(0)$. Получим $0,75m(0) = m(0) \cdot 0,99956^t$, откуда, $t = \log_{0,99956} 0,75 \approx 653,679$ года, т.е. примерно 653 года 8 месяцев и 4 дня.

Ответ: 653 года 8 месяцев и 4 дня.

Задача 21. В куске горной породы содержится 100 мг урана и 13 мг уранового свинца. Известно, что при полном распаде 240 г урана образуется 208 г уранового свинца. Считая, что в момент образования горная порода не содержала свинца, определить возраст этой горной породы.

Решение. Пусть $m(t)$ — это масса в миллиграммах нераспавшегося изотопа урана через t лет после формирования породы. Тогда $m' = -\lambda m$ и $m = m(0)e^{-\lambda t}$. В момент образования породы, кроме 100 мг урана, в ней также содержалось некоторое количество урана, превратившегося затем в свинец. Следовательно, $m(0) = 100 + \dfrac{240}{208} \cdot 13 = 115$ мг и $m = 115e^{-\lambda t}$.

Зная, что период полураспада урана составляет около 4,5 миллиардов лет, вычислим, что через этот срок останется $0,5 \cdot 115 = 57,5$ мг урана, а значит, $57,5 = 115e^{-4,5 \cdot 10^9 \lambda}$. Отсюда $e^{-\lambda} = 2^{-4,5^{-1} \cdot 10^{-9}}$ и $m = 115 \cdot 2^{-4,5^{-1} \cdot 10^{-9} t}$. Осталось в эту формулу массы урана подставить $m = 100$ и выразить время: $t = -4,5 \cdot 10^9 \cdot \left(\log_2 100 - \log_2 115\right) \approx 907 \cdot 10^6$ лет.

Ответ: 907 миллионов лет.

2.4. Задачи на смеси

В сводящихся к дифференциальным уравнениям задачах на смеси обычно делается следующее допущение: перемешивание компонентов смеси происходит настолько интенсивно, что в любой момент времени смесь можно считать однородной, т.е концентрация ее компонентов одинакова во всей смеси. Если бы при этом концентрация p некоторого компонента была постоянной во времени, то, зная скорость изменения объема смеси v (л/с), можно было бы найти, что за время Δt объем компонента изменится на $\Delta V = pv\Delta t$ литров. Однако, как правило, концентрация зависит от времени, и поэтому можно лишь записать, что изменение объема компонента лежит в промежутке между числами $p(t) \cdot v\Delta t$ и $p(t + \Delta t) \cdot v\Delta t$. Если теперь эти неравенства разделить на Δt и перейти к пределу при $\Delta t \to 0$, то получим дифференциальное уравнение $V' = pv$.

Задача 22. В баке находится 150 л морской воды, содержащей 4 % соли. В бак непрерывно подается пресная вода со скоростью 4 л/мин. Полученная смесь перемешивается и вытекает со скоростью 6 л/мин. Какой станет концентрация соли через час?

Решение. Пусть $V(t)$ — это объем соли в литрах, находящейся в баке в момент времени t, где время измеряется в минутах. Так как каждую минуту из бака вытекает на два литра жидкости больше, чем втекает, то ко времени t в баке будет $(150-2t)$ литров жидкости, а значит, концентрация соли составит $\dfrac{V(t)}{150-2t}$.

За небольшой промежуток времени Δt из бака выльется $6\Delta t$ литров смеси. Если в течение этого промежутка концентрацию считать неизменной, то данные $6\Delta t$ литров смеси содержат $\dfrac{V(t)\cdot 6\Delta t}{150-2t}$ литров соли. На самом же деле концентрация уменьшается, поэтому верно неравенство $-\Delta V = V(t) - V(t+\Delta t) < \dfrac{V(t)\cdot 6\Delta t}{150-2t}$. Аналогично получаем неравенство $-\Delta V > \dfrac{V(t+\Delta t)\cdot 6\Delta t}{150-2t}$. Деля эти неравенства на Δt и устремляя его к нулю, получим выражение для скорости уменьшения объема соли $-V' = \dfrac{6V}{150-2t}$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Имеем $\dfrac{dV}{V} = \dfrac{3dt}{t-75}$, откуда $\ln V = 3\ln|t-75| + \ln c$, или $V = c|t-75|^3$. Так как в начальный момент времени концентрация соли составляла 4 % от 150 литров, то $V(0)=6$, поэтому $c = \dfrac{6}{75^3}$ и $V = 6\left|\dfrac{t}{75}-1\right|^3$. Через 60 мин объем и концентрация соли будут соответственно равны $V(60)=\frac{6}{5^3}$ и $\frac{6}{5^3\cdot(150-120)}=5^{-4}=0,0016=0,16\ \%$.

Ответ: 0,16 %.

Задача 23. Сосуд объемом 50 л содержит воздух (80 % азота и 20 % кислорода). В сосуд втекает 0,2 л азота в секунду, который непрерывно перемешивается, и вытекает такое же количество смеси. Через сколько времени в сосуде будет 90 % азота?

Решение. Пусть $V(t)$ — это объем азота в момент времени t. Тогда за время Δt в сосуд втечет $0,2\Delta t$, а вытечет не менее $\frac{V(t)\cdot 0,2\Delta t}{50}$ и не более $\frac{V(t+\Delta t)\cdot 0,2\Delta t}{50}$ литров азота (здесь $\frac{V}{50}$ — концентрация азота). Следовательно, изменение объема азота ΔV в сосуде удовлетворяет неравенству $0,2\Delta t+0,04V(t)\Delta t<\Delta V<0,2\Delta t+0,04V(t+\Delta t)\Delta t$. Деля данное соотношение на Δt и устремляя его к нулю, получим $V'=0,2-0,004V$. Разделим переменные: $\frac{dV}{0,2-0,004V}=dt$, или, домножая на (–250) знаменатели обеих частей, $\frac{dV}{V-50}=-\frac{dt}{250}$. Проинтегрируем: $\ln|V-50|=-\frac{t}{250}+\ln c$, и, учитывая, что объем азота меньше объема всего сосуда (т.е. $V<50$), выразим объем азота: $V=50-ce^{-0,004t}$.

Из начального условия $V(0) = 50 \cdot \dfrac{80}{100} = 40$ л находим частное решение $V = 50 - 10e^{-0,004t}$. Осталось в данную формулу подставить $V = 50 \cdot \dfrac{90}{100} = 45$ л и найти время $t = 250 \ln 2 \approx 173,3$ с, т.е. немного меньше трех минут.

Ответ: 2 мин 53 с.

2.5. Задачи на охлаждение и нагревание

В задачах на охлаждение или нагревание тела при взаимодействии с окружающей средой температуру окружающего пространства T_c принято считать постоянной. Согласно закону, установленному Ньютоном, скорость охлаждения или нагревания тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды, т.е. $T' = -k(T - T_c)$, при этом если в начальный момент времени температура тела T больше температуры окружающего пространства T_c, то происходит охлаждение и скорость T' отрицательна, а если $T < T_c$, — нагревание и $T' > 0$. Сделанное замечание объясняет, почему коэффициент пропорциональности k обычно записывают со знаком минус. Само значение величины k зависит как от физических свойств тела, так и от его геометрической формы. Для нахождения коэффициента, как правило, измеряют температуру тела в некоторый промежуточный момент времени.

Часто встречаются задачи о нагревании жидкости погруженным в нее электрическим прибором (металлический стержень, спираль, кипятильник и т.д.) с силой тока, мало меняющейся во времени. В этом случае опираются на явление, называемое Джоулевым теплом: если сила тока постоянна, то вся электрическая энергия превращается в тепловую.

Для нахождения тепловой энергии пользуются формулой $E = cm\Delta T$, где c — удельная теплоемкость жидкости (в частности, для воды $c \approx 4200$ Дж/(кг·°C)); m — масса жидкости; ΔT — изменение температуры, а для нахождения электрической энергии — формулой $E = \dfrac{U^2 \Delta t}{R}$, где U — напряжение, подаваемое на прибор; R — сопротивление прибора; Δt — продолжительность протекания тока. Как правило, считают, что температура не оказывает заметного влияния на теплоемкость жидкости, изменение же сопротивления прибора иногда учитывают, а иногда нет. В действительности сопротивление проводников немного увеличивается с повышением температуры, а именно верна формула $R = R_0\left(1 + \alpha(T - T_0)\right)$, где R_0 — сопротивление при начальной температуре T_0; α — температурный коэффициент сопротивления. В большинстве справочников приводятся значения сопротивления R_0 при температуре $T_0 = 20$ °C.

Задача 24. Тело охладилось за 10 мин от 70 до 40 °C. Температура окружающей среды поддерживается равной 25 °C. Сколько еще минут понадобится, чтобы тело остыло до 30 °C?

Решение. Пусть $T(t)$ — это температура тела в момент времени t, где температура измеряется в градусах Цельсия, а время — в минутах. Тогда по закону Ньютона $T' = -k(T - 25)$ — это уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его: $\dfrac{dT}{T - 25} = -kt$, $\ln(T - 25) = \ln c - kt$ и $T = ce^{-kt} + 25$. Из условий $T(0) = 70$ и $T(10) = 40$ находим, что $c = 45$ и $e^k = 3^{0,1}$, и закон охлаждения приобретает вид $T = 45 \cdot 3^{-0,1t} + 25$. Подставив в этот закон $T = 30$ °С, получим $t = 20$ мин. Так как требуется найти время, прошедшее с момента охлаждения тела до 40 °С, то окончательный ответ $20 - 10 = 10$ мин.

Ответ: 10 мин.

Задача 25. Килограмм только что размороженной воды, помещенной в сосуд с хорошей теплоизоляцией, нагревается спиралью, напряжение на которую подается равномерно и к концу десятой минуты достигает 120 В. До какой температуры нагреется вода к этому моменту времени, если при 20 °С сопротивление спирали составляет 20 Ом, а ее температурный коэффициент сопротивления равен 0,004 °С$^{-1}$.

Решение. Пусть $T(t)$, $U(t)$ и $R(t)$ — это температура воды, напряжение и сопротивление спирали в момент времени t соответственно. Тогда за промежуток времени Δt спираль выделит от $\frac{U^2(t)}{R(t)}\Delta t$ до $\frac{U^2(t+\Delta t)}{R(t+\Delta t)}\Delta t$ джоулей электрической энергии, где $R(t) = 20\big(1 + 0,004(T(t) - 20)\big) = 20\big(0,92 + 0,004T(t)\big)$, и так как за 600 с напряжение равномерно выросло от 0 до 120 В, то $U(t) = \frac{120}{600}t = 0,2t$. С другой стороны, за этот же промежуток времени вода нагреется на $\Delta T = T(t + \Delta t) - T(t)$ градусов Цельсия, а значит, она поглотит $4200\Delta T$ джоулей энергии.

Приравнивание друг другу электрической и тепловой энергии приведет нас к неравенству

$$\frac{0,04t^2\Delta t}{20\big(0,92 + 0,004T(t)\big)} < 4200\Delta T < \frac{0,04(t+\Delta t)^2\Delta t}{20\big(0,92 + 0,004T(t+\Delta t)\big)},$$

откуда, упрощая и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим уравнение $2100000T'(0,92+0,004T)=t^2$. Разделим переменные: $2100000(0,92+0,004T)dT=t^2dt$, и проинтегрируем обе части: $1932000T+84000\dfrac{T^2}{2}=\dfrac{t^3}{3}+c$, или $5796000T+12600T^2=t^3+c$.

Так как изначально имеется только что размороженная вода, то можно считать, что $T(0)=0$, и значит, $c=0$. Подставив $t=600$, находим, что к истечению десятой минуты вода нагрелась до температуры, удовлетворяющей квадратному уравнению $12600T^2+5796000T-216000000=0$, или, сокращая на 1800, $7T^2+3220T-120000=0$. Положительный корень $T=\dfrac{10\sqrt{34321}}{7}-230\approx 34,7$ °C.

Ответ: 34,7 °C.

2.6. Задачи на давление

Давлением называют отношение силы, действующей перпендикулярно поверхности, к площади этой поверхности, т.е. $p=\dfrac{F}{S}$, где p — давление; F — сила; S — площадь. Единицей измерения давления в системе СИ является паскаль, Па = кг/(м·с^2). Однако традиционно применяются и некоторые другие единицы измерения: миллиметр ртутного столба (1 мм рт. ст. ≈ 133,322 Па) и атмосфера (1 атм = 760 мм рт. ст. ≈ 101,325 кПа).

В случае атмосферного давления действующей силой является сила тяжести столба воздуха, находящегося над рассматриваемой поверхностью. Следовательно, в этом случае $p = \dfrac{mg}{S}$, где m — масса столба воздуха; g — ускорение свободного падения. На уровне моря стандартным принято считать давление в одну атмосферу, т.е. чуть более 100 кПа. При удалении от поверхности Земли давление, очевидно, уменьшается.

При решении задач на давление полезен закон Бойля–Мариотта, одна из формулировок которого гласит, что при постоянной температуре давление и плотность газа пропорциональны друг другу, т.е. $\rho = kp$, где ρ —плотность; p — давление газа. Также отметим, что по международному стандарту плотность воздуха у поверхности Земли считают равной 1,225 кг/м^3.

Задача 26. Найти атмосферное давление на высоте 500 м над уровнем моря, пренебрегая изменениями температуры воздуха на этой высоте.

Решение. Пусть $p(h)$ — это атмосферное давление на высоте h над уровнем моря. Рассмотрим две одинаковые горизонтальные площадки площадью 1 м^2, расположенные на высотах h и $h + \Delta h$, и столбы воздуха, опирающиеся на эти площадки (рис. 13). Тогда разность давлений на этих площадках $\Delta p = p(h + \Delta h) - p(h) = -mg$, где m — масса воздуха, заключенного между данными площадками (заштрихованная область на рисунке).

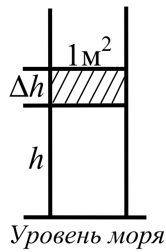

Рис. 13

Объем этой области численно равен ее высоте Δh (так как ее основание имеет единичную площадь). Следовательно, $\rho(h + \Delta h)\Delta h < m < \rho(h)\Delta h$, где $\rho(h)$ — плотность воздуха на высоте h.

Тогда для разности давлений верно неравенство $\rho(h + \Delta h)g\Delta h < -\Delta p < \rho(h)g\Delta h$. Если же теперь воспользоваться законом Бойля–Мариотта $\rho = kp$ и перейти к пределу при $\Delta h \to 0$, то получим дифференциальное уравнение $kpg = -p'$. Разделим переменные: $\frac{dp}{p} = -kgdh$, и проинтегрируем: $\ln p = -kgh + \ln c$, или $p = ce^{-kgh}$.

Значения величин k и c выразим из начальных условий $p(0) = 101320$ и $\rho(0) = 1{,}225$. Имеем $c = p(0) = 101325$ и $k = \frac{\rho}{p} = \frac{1{,}225}{101325} \approx 0{,}000012$. Подставим эти значения и $g \approx 9{,}8$ в найденную формулу давления: $p = 101325e^{-0{,}00012h}$. Для окончательного ответа осталось взять $h = 500$ и вычислить $p = 101325e^{-0{,}06} \approx 95424$ Па.

Ответ: 95424 Па.

Комментарий. В ходе решения задачи нами фактически была выведена формула вычисления атмосферного давления на любой высоте без учета понижения температуры: $p = p_0e^{-0{,}00012h}$, называемая также барометрической формулой.

2.7. Задачи на истечение жидкости

Закон Торричелли утверждает, что скорость вытекающей из сосуда жидкости можно вычислить по формуле $v = \mu\sqrt{2gh}$, где g — ускорение свободного падения ($g \approx 10$ м/с^2); h — высота столба жидкости; μ — коэффициент истечения, зависящий от вязкости жидкости и формы отверстия. Для воды, вытекающей через стандартное отверстие, $\mu \approx 0{,}62$ (рис. 14). Если же края

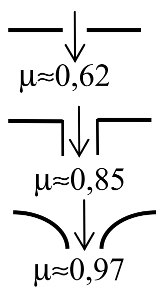

Рис. 14

отверстия имеют прямоугольную форму, то $\mu \approx 0,85$, а для отверстия с закругленными краями $\mu \approx 0,97$.

Задача 27. За какое время вытечет вся вода из цилиндрического бака диаметром 2 м и высотой 5 м, поставленного вертикально, через отверстие в его дне площадью 2 см^2? Как изменится ответ, если бак расположить горизонтально и отверстие просверлить в самой нижней части боковой поверхности бака?

Решение. Пусть бак расположен вертикально и $h(t)$ — это высота жидкости в баке в момент времени t. Тогда скорость истечения жидкости $\mu\sqrt{2gh} \approx 0,62\sqrt{20h}$, а значит, за промежуток времени Δt через отверстие площадью 2 см^2 пройдет не более $0,0002 \cdot 0,62\sqrt{20h(t)}\Delta t$ и не менее $0,0002 \cdot 0,62\sqrt{20h(t+\Delta t)}\Delta t$ кубометров воды. С другой стороны, за этот же промежуток времени высота воды в баке изменится на $\Delta h = h(t+\Delta t) - h(t)$ метров, причем $\Delta h < 0$. Значит, объем вытекшей воды равен объему цилиндра с высотой $-\Delta h$, т.е. $-\pi\Delta h$ кубометров (мы учли, что радиус основания цилиндра равен единице).

Итак, нам удалось вывести соотношение $0,000248\sqrt{5h(t+\Delta t)}\Delta t < -\pi\Delta h < 0,000248\sqrt{5h(t)}\Delta t$, из которого, переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим уравнение с разделяющимися переменными $0,000248\sqrt{5h} = -\pi h'$. Интегрируя обе части равенства $-\dfrac{\pi dh}{\sqrt{h}} = 0,000248\sqrt{5}dt$, запишем общее решение $c - 2\pi\sqrt{h} = 0,000248\sqrt{5}t$. В начальный момент времени жидкость занимала весь сосуд, т.е. $h(0) = 5$, следовательно, $c = 2\pi\sqrt{5}$ и частное решение имеет вид $2\pi\left(\sqrt{5} - \sqrt{h}\right) = 0,000248\sqrt{5}t$. Осталось подставить

$h = 0$ и найти, что время полного опустошения бака $t = \dfrac{2\pi}{0,000248} \approx 25335$ с, что составляет чуть более семи часов.

Пусть теперь бак расположен горизонтально. Посмотрим, как в этом случае уменьшится объем воды в баке при изменении высоты на отрицательную величину Δh. Из рис. 15 видно, что уменьшение площади поперечного сечения ΔS удовлетворяет неравенству $2AC \cdot CD < \Delta S < 2BD \cdot CD$, где $CD = -\Delta h$,

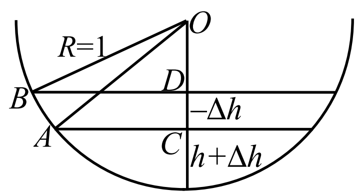

Рис. 15

$AC^2 = OA^2 - OC^2 = 1 - \left(1 - (h + \Delta h)\right)^2 = 2(h + \Delta h) - (h + \Delta h)^2$;

$BD^2 = OB^2 - OD^2 = 1 - \left(1 - h\right)^2 = 2h - h^2$, а объем вытекшей воды, равный $5\Delta S$, составляет не менее $10\Delta h\sqrt{2(h + \Delta h) - (h + \Delta h)^2}$ и не более $10\Delta h\sqrt{2h - h^2}$.

После этого аналогично случаю вертикального цилиндра составим уравнение $0,000248\sqrt{5h} = -10h'\sqrt{2h - h^2}$. Разделив переменные: $-\dfrac{\sqrt{2h - h^2}\,dh}{\sqrt{h}} = 0,0000248\sqrt{5}dt$, сократив левую часть на $\sqrt{h}$ и проинтегрировав, получим $\sqrt{(2 - h)^3} = 0,0000372\sqrt{5}t + c$, при этом так как $h(0) = 2$, то $c = 0$. Подставив $h = 0$, найдем время опустошения бака $t = \dfrac{\sqrt{8}}{0,0000372\sqrt{5}} \approx 34003$ с, что составляет чуть менее девяти с половиной часов.

Сравнивая с предыдущим ответом, отметим, что разворот бака в горизонтальное положение привел к увеличению времени полного его опустошения более чем на два часа.

Ответ: для вертикального цилиндра — 7 ч 2 мин 15 с; для горизонтального цилиндра — 9 ч 26 мин 43 с.

Задача 28. Воронка имеет форму конуса радиусом 9 см и высотой 25 см, обращенного вершиной вниз. За какое время вся вода вытечет из воронки через круглое отверстие со спрямленными краями диаметром 6 мм, расположенное в вершине конуса?

Решение. Пусть $h(t)$ — это высота жидкости в воронке в момент времени t. По закону Торричелли через отверстие площадью $\dfrac{\pi\cdot 0,006^2}{4}=9\cdot 10^{-6}\pi$ за время Δt выльется не более $9\cdot 10^{-6}\pi\cdot 0,85\sqrt{20h(t)}\Delta t=1,53\cdot 10^{-5}\pi\sqrt{5h(t)}\Delta t$ и не менее $1,53\cdot 10^{-5}\pi\sqrt{5h(t+\Delta t)}\Delta t$ кубометров воды.

При изменении высоты воды на $\Delta h=h(t+\Delta t)-h(t)<0$ объем вытекшей воды будет равен разности объемов конусов $V=\dfrac{\pi r^2(t)h(t)}{3}-\dfrac{\pi r^2(t+\Delta t)h(t+\Delta t)}{3}$, где $r(t)$ — радиус конуса, образованного водой, находящейся в воронке в момент времени t. При этом в силу подобия рассматриваемых конусов $r(t)=h(t)\cdot\dfrac{r(0)}{h(0)}=h(t)\cdot\dfrac{0,09}{0,25}=0,36h(t)$ и аналогично $r(t+\Delta t)=0,36h(t+\Delta t)$. Следовательно, для объема вытекшей воды имеем $V=0,0432\pi\left(h^3(t)-h^3(t+\Delta t)\right)=$ $=0,0432\pi\left(h^3-(h+\Delta h)^3\right)=-0,0432\pi(3h^2\Delta h+3h\Delta h^2+\Delta h^3)$.

Составим уравнение $1,53\cdot 10^{-5}\pi\sqrt{5h}=-0,1296\pi h^2h'$. Разделяя переменные, сокращая на $9\cdot 10^{-7}$ и интегрируя, получим $-144000\sqrt{h^3}\,dh=17\sqrt{5}dt$ и $c-57600\sqrt{h^5}=17\sqrt{5}t$. Так как $h(0)=0,25$, то $c=1800$ и частное решение имеет вид $1800-57600\sqrt{h^5}=17\sqrt{5}t$. При нулевом значении высоты время $t=\dfrac{1800}{17\sqrt{5}}\approx 47,35$ с.

Ответ: 47,35 с.

2.8. Задачи на электрические цепи

Под электрической цепью понимают совокупность элементов, образующих путь для электрического тока. К числу важнейших элементов относят: резистор (сопротивление), конденсатор (емкость), катушку (индуктивность) и источник напряжения (ЭДС). Все эти элементы являются двуполюсниками, т.е. имеют два вывода (полюса), которые подсоединяются к полюсам других элементов.

Основными характеристиками любого участка цепи в момент времени t являются сила тока $I(t)$, протекающего через данный участок, и падение напряжение $U(t)$ от начала участка к концу. Для пассивных (т.е. поглощающих энергию) элементов связь между этими характеристиками задается следующими соотношениями: для резистора — $U=RI$, где R — постоянный коэффициент, называемый сопротивлением; для конденсатора — $I=CU'$, где C — постоянный коэффициент, называемый емкостью; для катушки — $U=LI'$, где L — постоянный коэффициент, называемый индуктивностью. Формулу $U=RI$ называют законом Ома. Соотношение для конденсатора также часто записывают в виде $U=\dfrac{q}{C}$, где $q(t)$ — заряд конденсатора в момент времени t, при этом $q'=I$.

Между двумя катушками может наблюдаться явление взаимоиндукции, характеризующееся постоянным по времени коэффициентом взаимоиндукции M. В этом случае напряжение на катушках вычисляется по формулам $U_1 = L_1 I_1' + M I_2'$ и $U_2 = L_2 I_2' + M I_1'$, где U_1 и U_2, L_1 и L_2, I_1 и I_2 — напряжение, индуктивность и ток для первой и второй катушек соответственно. Для коэффициента M всегда выполняется неравенство $M^2 \le L_1 L_2$, причем, чем больше взаимодействие двух катушек, тем ближе величина M к значению выражения $\sqrt{L_1 L_2}$.

В СИ заряд измеряется в кулонах (Кл), сила тока — в амперах (А), напряжение — в вольтах (В), сопротивление — в омах (Ом), емкость — в фарадах (Ф), индуктивность и коэффициент взаимоиндукции — в генри (Гн).

Активный (т.е. обладающий способностью отдавать энергию подключенным к нему элементам) элемент ЭДС, как правило, генерирует либо постоянное напряжение $U = U_0$, либо переменное гармоническое напряжение $U = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$, где ω — частота; φ — начальная фаза.

В основе решения задач по описанию работы электрических цепей лежат законы Кирхгофа. Из первого закона Кирхгофа, в частности, вытекает, что при последовательном соединении двухполюсников сила тока на любом участке цепи одна и та же. Этот факт позволяет в задачах данного параграфа вводить одну переменную для силы тока независимо от рассматриваемого участка цепи. Из второго же закона Кирхгофа следует, что в цепи, представляющей собой замкнутый контур с единственным источником напряжения, сумма падений напряжений на пассивных элементах равна напряжению, вырабатываемому источником ЭДС. Второй закон Кирхгофа вместе с приведенными выше соотношениями для пассивных элементов, как правило, приводит к дифференциальному уравнению относительно силы тока цепи.

Установившемся режимом называется такое состояние электрической цепи, при котором сила тока либо постоянна, либо изменяется периодически.

Задача 29. В цепь последовательно включены резистор сопротивлением 5 Ом и конденсатор емкостью 2 мкФ, заряд которого в момент замыкания цепи равен 3 Кл. Найти силу тока в цепи в момент ее замыкания и через тысячную долю секунды после замыкания.

Решение. Пусть $I(t)$ — это сила тока в цепи, а $q(t)$ — заряд конденсатора в момент времени t. По следствию из первого закона Кирхгофа сила тока, протекающего через резистор и конденсатор, одинакова, а значит, $I = q'$. Тогда по закону Ома напряжение на резисторе равно $5I = 5q'$, а на конденсаторе — $\dfrac{q}{2\cdot 10^{-6}} = 5\cdot 10^5 q$.

Так как активные элементы в цепи отсутствуют, то верно равенство $5q' + 5\cdot 10^5 q = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными, общее решение которого имеет вид $\ln q = -10^5 t + \ln c$, или $q = ce^{-100000t}$. Начальное условие $q(0) = 3$ позволяет нам записать частное решение $q = 3e^{-100000t}$.

Для нахождения силы тока продифференцируем последнее равенство: $I = 300000e^{-100000t}$ (мы не учитываем направление тока, а рассматриваем только его абсолютное значение). Подставляя $t = 0$ и $t = 0{,}001$, находим, что $I(0) = 300000$ А и $I(0{,}001) = 300000e^{-100} \approx 0$ А, т.е. за тысячную долю секунды ток фактически падает до нуля (происходит почти мгновенная разрядка конденсатора).

Ответ: 30 кА и 0 А.

Задача 30. В цепь последовательно включены источник напряжения $U = 100\sin 50t$, сопротивление 2 Ом и индуктивность 0,4 Гн. Найти амплитуду силы тока в цепи при установившемся режиме.

Решение. Пусть $I(t)$ — это сила тока в цепи в момент времени t. Тогда падение напряжения на резисторе составляет $2I$, а на катушке — $0,4I'$. По второму закону Кирхгофа получаем линейное дифференциальное уравнение $2I + 0,4I' = 100\sin 50t$. Соответствующее ему однородное уравнение $2I + 0,4I' = 0$ имеет решение $I = ce^{-5t}$. Варьируем константу и подставляем в неоднородное уравнение: $0,4c'e^{-5t} = 100\sin 50t$. Отсюда $c' = 250e^{5t}\sin 50t$ и $c = \dfrac{50e^{5t}(\sin 50t - 10\cos 50t)}{101} + \tilde{c}$. Итак, общее решение имеет вид $I = \dfrac{50(\sin 50t - 10\cos 50t)}{101} + ce^{-5t}$. Видно, что установившийся режим будет наблюдаться при $c = 0$. По формулам вспомогательного угла амплитуда силы тока равна $\dfrac{50\sqrt{101}}{101} \approx 4,975$ А, т.е. около 5 А.

Ответ: 4,975 А.

Комментарий. На примере рассмотренной задачи поясним смысл понятия «установившийся режим». Если бы мы выбрали другое частное решение при $c \neq 0$, то сила тока записывалась бы как сумма двух слагаемых: гармонического колебания $\dfrac{50(\sin 50t - 10\cos 50t)}{101}$ и достаточно быстро приближающегося к нулю при $t \to \infty$ выражения ce^{-5t}. Таким образом, при любых начальных условиях сила тока с течением времени становится мало отличима от установившегося режима цепи.

Задача 31. К источнику постоянного напряжения 60 В подключается контур, состоящий из последовательно соединенных катушки индуктивностью 5 Гн, резистора сопротивлением 40 Ом и конденсатора емкостью 2 нФ. Найти ток в цепи как функцию времени, если в начальный момент ток в контуре и заряд конденсатора равны нулю.

Решение. Пусть $I(t)$ — это сила тока в цепи, а $q(t)$ — заряд конденсатора в момент времени t. Тогда падения напряжения на катушке, резисторе и конденсаторе соответственно равны $5I'$, $40I$ и $\frac{q}{2\cdot 10^{-9}} = 5\cdot 10^8 q$. Из второго закона Кирхгофа вытекает равенство $5I' + 40I + 5\cdot 10^8 q = 60$. Дифференцируя это равенство и сокращая его на пять, получим линейное однородное уравнение второго порядка $I'' + 8I' + 10^8 I = 0$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 8\lambda + 10^8 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = -4 \pm 28i\sqrt{127551}$, и значит, общее решение представляется в виде $I = e^{-4t}\left(c_1 \cos 28\sqrt{127551}t + c_2 \sin 28\sqrt{127551}t\right)$.

Заметим, что в начальный момент времени отсутствует как ток в цепи, так и напряжение на резисторе и конденсаторе. Поэтому при $t = 0$ по закону Кирхгофа напряжение, генерируемое источником, совпадает с напряжением на катушке индуктивности, и мы можем записать начальные условия $I(0) = 0$ и $5I'(0) = 60$. Из первого условия $c_1 = 0$, а значит, $I = c_2 e^{-4t} \sin 28\sqrt{127551}t$. Находя производную $I' = c_2 e^{-4t}\left(-4\sin 28\sqrt{127551}t + 28\sqrt{127551}\cos 28\sqrt{127551}t\right)$ и подставляя второе условие, находим $c_2 = \frac{3}{7\sqrt{127551}}$. Итак, окончательно для силы тока получаем выражение $I = \dfrac{3e^{-4t}\sin 28\sqrt{127551}t}{7\sqrt{127551}}$.

Ответ: $I = \dfrac{3e^{-4t}\sin 28\sqrt{127551}t}{7\sqrt{127551}}$.

Комментарий. Цепь, описанную в данной задаче, называют колебательным контуром (другими словами, колебательный контур — это замкнутая цепь с последовательно подсоединенными катушкой, резистором и конденсатором). Действительно, как показывает ответ задачи, источник постоянного напряжения формирует в данной цепи затухающие гармонические колебания тока. Отметим, что в идеальном случае отсутствия сопротивления (в том числе и внутреннего сопротивления всех элементов цепи) колебания имели бы постоянную амплитуду, т.е. были бы незатухающими. Такой контур называют идеальным.

Задача 32. Идеальный колебательный контур с индуктивностью 1 Гн и емкостью 100 пФ подключается к источнику переменного напряжения $U = U_0 \sin \omega t$. При какой частоте источника ω колебания тока будут иметь неограниченно возрастающую со временем амплитуду?

Решение. Пусть $I(t)$ — это сила тока в цепи, а $q(t)$ — заряд конденсатора в момент времени t. Тогда напряжение на катушке составляет I', а на конденсаторе — $\dfrac{q}{10^{-10}} = 10^{10}q$, и по второму закона Кирхгофа $I' + 10^{10}q = U_0 \sin \omega t$. Дифференцируя, получаем линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами $I'' + 10^{10}I = U_0 \omega \cos \omega t$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 10^8 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm 10000i$, и значит, $I = c_1 \cos 10000t + c_2 \sin 10000t$ — это общее решение однородного уравнения, представляющее собой колебания с амплитудой $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$.

Если $\omega \neq 10000$, то частное решение неоднородного уравнения ищется в виде $I = A\cos\omega t + B\sin\omega t$. Это также незатухающие колебания постоянной амплитуды $\sqrt{A^2 + B^2}$. Следовательно, данный случай не удовлетворяет условию задачи.

Если же $\omega = 10000$, то можно подобрать числа A и B, при которых частное решение запишется в виде $I = t(A\cos 10000t + B\sin 10000t)$. Полученное выражение задает колебания, имеющие непрерывно возрастающую с течением времени амплитуду $t\sqrt{A^2 + B^2}$. Значит, и сила тока в цепи $I = (c_1 + At)\cos 10000t + (c_2 + Bt)\sin 10000t$ будет иметь неограниченно возрастающую амплитуду. Итак, источник ЭДС должен генерировать напряжение частотой $\omega = 10$ кГц.

Ответ: 10 кГц.

Комментарий. Описанное в задаче явление неограниченного возрастания амплитуды гармонических колебаний называется резонансом. Фактически мы показали, что резонанс наступает в том случае, когда собственная частота колебательного контура $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, где L — индуктивность; C — емкость, совпадает с частотой колебаний источника тока.

Задача 33. Имеются два контура. Первый контур состоит из источника переменного напряжения с амплитудой 200 В и индуктивности 0,8 Гн, а второй — из индуктивности 5 Гн и сопротивления. Катушки находятся в состоянии взаимоиндукции с коэффициентом 2 Гн. Найти амплитуду напряжения на сопротивлении второго контура.

Решение. Пусть $I_1(t)$ и $I_2(t)$ — силы тока в первом и втором контурах соответственно. Тогда напряжение на катушке первого контура $0{,}8I_1' + 2I_2'$ равно напряжению на источнике $200\sin(\omega t + \varphi)$. Для второго же контура сумма напряжений на катушке $5I_2' + 2I_1'$ и на резисторе RI_2 равна нулю (через R обозначено сопротивление резистора). Имеем систему уравнений $\begin{cases} 0{,}8I_1' + 2I_2' = 200\sin(\omega t + \varphi) \\ 2I_1' + 5I_2' + RI_2 = 0 \end{cases}$.

Если домножить первое уравнение системы на 2,5 и вычесть его из второго уравнения, то получим $RI_2 = -500\sin(\omega t + \varphi)$, и значит, амплитуда колебаний напряжения на резисторе составляет 500 В.

Ответ: 500 В.

Комментарий. В задаче представлена схема идеального трансформатора, т.е. трансформатора, в котором пренебрегают внутренним сопротивлением катушек и коэффициент взаимоиндукции считают равным среднему геометрическому между индуктивностями катушек. На практике две катушки реализуют в виде двух обмоток, навитых на общей сердечник. Контур, содержащий источник ЭДС, называют первичной обмоткой, а контур, содержащий полезную нагрузку (резистор), называют вторичной обмоткой трансформатора. Фактически в задаче доказано, что амплитуда напряжения на нагрузке в $\sqrt{\dfrac{L_2}{L_1}}$ раз больше, чем амплитуда напряжения, генерируемого источником. Эту характеристику называют коэффициентом трансформации.

Задача 34. Имеются два контура. Первый контур состоит из источника переменного напряжения $U = 50\sin 40t$ и индуктивности 2,7 Гн, а второй — из индуктивности

5,1 Гн и сопротивления 200 Ом. Катушки находятся в состоянии взаимоиндукции с коэффициентом 3,7 Гн. Найти амплитуду напряжения на сопротивлении второго контура при установившемся режиме.

Решение. Пусть $I_1(t)$ и $I_2(t)$ — силы тока в первом и втором контурах соответственно. Тогда напряжение на катушке первого контура составляет $2,7I_1' + 3,7I_2'$, а на катушке второго контура — $5,1I_2' + 3,7I_1'$. Применение второго закона Кирхгофа приводит нас к системе дифференциальных уравнений $\begin{cases} 2,7I_1' + 3,7I_2' = 50\sin 40t \\ 3,7I_1' + 5,1I_2' + 200I_2 = 0 \end{cases}$.

Так как в задаче ставится вопрос только о втором контуре, то выразим из этой системы I_2. Для этого из первого уравнения найдем $I_1' = \dfrac{50\sin 40t - 3,7I_2'}{2,7}$ и подставим во второе уравнение: $3,7 \cdot \dfrac{50\sin 40t - 3,7I_2'}{2,7} + 5,1I_2' + 200I_2 = 0$, или, домножая на знаменатель и приводя подобные, $0,08I_2' + 540I_2 = -185\sin 40t$. Это линейное уравнение первого порядка.

Однородное уравнение $0,08I_2' + 540I_2 = 0$ имеет общее решение $I_2 = ce^{-6750t}$. Варьируем константу: $0,08c'e^{-6750t} = -185\sin 40t$. Откуда $c' = -2312,5e^{6750t}\sin 40t$, и значит, $c = \dfrac{-2312,5e^{6750t}(6750\sin 40t - 40\cos 40t)}{6750^2 + 40^2} + \tilde{c} \approx$ $\approx e^{6750t}(0,002\cos 40t - 0,3426\sin 40t) + \tilde{c}$. Следовательно, в общем случае решение для силы тока второго контура имеет вид $I_2 \approx 0,002\cos 40t - 0,3426\sin 40t + ce^{-6750t}$, а установившийся режим достигается при $c = 0$ и в этом случае $I_2 \approx 0,002\cos 40t - 0,3426\sin 40t$. По закону Ома напряжение на резисторе вычисляется по формуле $200I_2 \approx 0,4\cos 40t + 68,52\sin 40t$ и его амплитуда составляет $\sqrt{0,4^2 + 68,52^2} \approx 68,52$ (т.е. можно пренебречь первым слагаемым, так как 0,4 много меньше, чем 68,52).

Ответ: 68,52 В.

Комментарий. В данной задаче рассматривается «менее идеальный» трансформатор, так как, с одной стороны, квадрат коэффициента взаимоиндукции $3,7^2 = 13,69$ меньше произведения индуктивностей $2,7 \cdot 5,1 = 13,77$, но, с другой стороны, внутренние сопротивления катушек не учитываются. Но и в этом случае отношение амплитуд напряжений $\frac{68,52}{50} = 1,3704$ достаточно хорошо согласуется с идеальным коэффициентом трансформации $\sqrt{\frac{5,1}{2,7}} \approx 1,374$.

Глава 3. Экономические задачи

3.1. Задачи на проценты

Если некоторая денежная сумма за одинаковые промежутки времени изменяется на одно и то же число процентов, то такой процесс называют начислением накопительных или сложных процентов. Такая ситуация наблюдается при размещении денежных вкладов в банках и при кредитовании с фиксированной процентной ставкой.

Как правило, проценты начисляются дискретно, т.е. в конце каждого временного периода. В этом случае по истечении n периодов денежная сумма достигнет величины $a(1+p\%)^n = a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$, где a — начальная сумма. Однако если предположить, что начисление происходит непрерывно, то мгновенная скорость изменения денежной суммы будет составлять фиксированное число процентов от суммы, рассчитанной на данный момент времени. Другими словами, если $a(t)$ — это та денежная сумма, которая непрерывно изменяется на p% за единицу времени, то верно соотношение $a' = a \cdot p\% = a \cdot \frac{p}{100}$, представляющее собой дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Задача 35. Кредит в сто тысяч рублей взят на пять лет под 15 % годовых. Какую сумму нужно будет погасить кредитору, если накопительные проценты начисляются: а) каждый год; б) каждый месяц; в) непрерывно?

Решение. а) По формуле сложных процентов через пять лет кредит достигнет $10^5(1+0{,}15)^3 = 152087{,}5$ руб.

б) Теперь, в отличие от случая а), процентная ставка составит $\frac{15\%}{12} = 1{,}25\%$ в месяц и проценты будут начисляться в течение 120 месяцев. Следовательно, величина кредита получится равной $10^5(1+0{,}0125)^{36} \approx 156394{,}38$ руб.

в) В данном случае придется решить дифференциальное уравнение $a' = 0{,}15a$, где через $a(t)$ обозначена сумма кредита в момент времени t, а время измеряется в годах. Разделим переменные: $\frac{da}{a} = 0{,}15dt$, и проинтегрируем:

$\ln a = 0{,}15t + c$, или $a = ce^{0{,}15t}$. Так как $a(0) = 10^5$, то частное решение имеет вид $a = 10^5 e^{0{,}15t}$. Для нахождения окончательной суммы кредита остается подставить $t = 3$. Тогда $a(3) = 10^5 e^{0{,}45} \approx 156831{,}22$ руб.

Ответ: а) 152087 руб. 50 коп.; б) 156394 руб. 38 коп; в) 156831 руб. 22 коп.

Комментарий. Полученные ответы показывают, что при уменьшении временного промежутка начисления процентов сумма кредита возрастает и приближается к наибольшему непрерывному случаю, а значит, при выборе кредита более выгодны те условия, в которых проценты начисляются реже. Однако в любом из предложенных в задаче случаев переплата по кредиту весьма значительна: более половины занятой суммы.

Задача 36. Какая сумма будет находиться на счету через пятьсот лет, если сегодня открыть сберегательный вклад в один рубль под 5 % годовых с непрерывным начислением процентов?

Решение. Пусть $a(t)$ — это сумма вклада в момент времени *t*. Тогда, решая задачу Коши $a' = 0{,}05a$ и $a(0) = 1$, получим, что $a = e^{0{,}05t}$. Подставляя $t = 500$, находим ответ $a(500) = e^{25} \approx 72004899337$ руб., т.е. более 72 миллиардов рублей.

Ответ: 72004899337 руб.

Комментарий. Данная задача показывает, что массовое использование населением банковских депозитов достаточно быстро приводит к бесконтрольному увеличению денежной массы государства, что в свою очередь может спровоцировать сильную инфляцию. Это является одной из причин проведения денежных реформ.

Задача 37. Через сколько лет произойдет удвоение уровня цен при ежегодной инфляции в 7 %?

Решение. Так как во время инфляции увеличение цен происходит постоянно, то в данной задаче можно пользоваться моделью непрерывного начисления процентов. Если $a(t)$ — это уровень цен в момент времени t, то $a' = 0,07a$ и $a = ce^{0,07t}$, где константа c совпадает с начальным уровнем цен. В момент удвоения цен $a = 2c$, и значит, $2c = ce^{0,07t}$, или $e^{0,07t} = 2$. Выразим отсюда время, округлив его в большую сторону: $t = \dfrac{\ln 2}{0,07} \approx 10$ лет.

Ответ: 10 лет.

Комментарий. Фактически при решении задачи было показано, что при ежегодной инфляции в $p\%$ удвоение цен произойдет через $\dfrac{\ln 2}{p\%} = \dfrac{100 \ln 2}{p} \approx \dfrac{70}{p}$ лет. Эту закономерность в экономике называют правилом величины 70.

3.2. Задачи на выпуск продукции

В простейших задачах по расчету количества выпускаемой предприятием продукции предполагается возможность моментальной реализации практически любого количества продукции по предложенной производителем цене, т.е. при отсутствии конкуренции на рынке наблюдается дефицит данной группы товаров или же производится товар первой необходимости. В условиях же конкуренции или быстрого насыщения рынка количество реализованной продукции задается кривой спроса $p(y)$, выражающей зависимость цены p от количества предлагаемого товара y.

Если в результате реализации продукции предприятие получает прибыль, то ему выгодно некоторую ее часть направлять на расширение производства, причем принято считать, что рост инвестиций приводит к пропорциональному увеличению скорости производства (под скоростью производства подразумевается величина изменения объема выпускаемой продукции за единицу времени). Отношение величины инвестиций к общему доходу предприятия называют долей или нормой инвестиций, а отношение скорости производства к величине инвестиций — показателем отдачи инвестиций. Кроме внутренних инвестиций, выделяемых из прибыли самого предприятия, могут привлекаться и внешние инвестиции (например, государственная поддержка, выпуск ценных бумаг, взносы учредителей и т.д.).

Одновременно с инвестированием, повышающим производственные показатели, происходит объективный процесс убывания скорости производства, вызванный уменьшением производительности или полным выходом из строя оборудования предприятия за счет его постепенного изнашивания. Этот процесс характеризуется коэффициентом выбытия фондов, равным модулю отношения скорости производства к объему выпущенной продукции.

Таким образом, деятельность предприятия можно описать дифференциальным уравнением $y' = l(mpy + u) - ky$, где $y(t)$ — объем выпущенной в момент времени t продукции; $p(y)$ — цена за единицу продукции; m — норма инвестиций; l — показатель отдачи инвестиций; k — коэффициент выбытия фондов; $u(t)$ — внешние инвестиции. Величина mpy представляет собой объем внутренних инвестиций.

Также отметим, что объем выпущенной за промежуток времени $[t_1;t_2]$ продукции находится как определенный интеграл $\int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)dt$.

Задача 38. Единственная хлебопекарня поселка выпекает и продает тысячу буханок хлеба в сутки стоимостью 8 рублей за одну буханку. В течение месяца 3 % выручки от реализации хлеба будет направляться на расширение производства. Известно, что удвоение вложений в производство приводит к увеличению скорости выпечки хлеба в полтора раза. Сколько буханок хлеба в день будет выпекать пекарня к концу месяца?

Решение. Пусть $y(t)$ — это количество испеченного в момент времени t хлеба, причем время измеряется в сутках. Выручка от его реализации составит $8y$ рублей, из которых $0,03 \cdot 8y = 0,24y$ рублей направляется на расширение производства, что приводит к увеличению скорости выпечки хлеба y' в $\frac{1,5}{2} \cdot 0,24y = 0,18y$ раз. Следовательно, верно уравнение с разделяющимися переменными $y' = 0,18y$, общее решение которого имеет вид $y = ce^{0,18t}$. Из условия $y(0) = 1000$ найдем частное решение $y = 1000e^{0,18t}$. Остается подставить $t = 30$ суток, чтобы получить окончательный ответ $y(30) = 1000e^{5,4} \approx 221406$ буханок хлеба.

Ответ: 221406 буханок.

Комментарий. Ответ задачи показывает, что если даже не очень большую часть прибыли постоянно вкладывать в производство дефицитного товара, то очень быстро можно добиться огромного роста объема его выпуска (экспоненциальный рост).

Разумеется, данная модель является весьма упрощенной и редко наблюдается в реальности, так как в ней не учитывается насыщение рынка и износ оборудования.

Задача 39. Руководством сталелитейного завода принята полугодовая программа развития, по которой десятая часть всей выручки предприятия направляется на расширение производства. Известно, что кривая спроса задается уравнением $p(y) = 330 - y$, где p — цена в долларах одной тонны стали; y — ее объем в тоннах, и что скорость производства составляет один процент от вложенных инвестиций. Найти объем реализованной продукции за время действия программы, если до ее начала продавалось 30 т стали в месяц.

Решение. Пусть $y(t)$ тонн — это масса выпущенной заводом стали в момент времени t, причем время измеряется в месяцах. Тогда доход завода в рассматриваемом месяце составит $(330 - y)y$ долларов, а скорость производства равна $0,01 \cdot 0,1(330 - y)y = 0,001(330 - y)y$. Отсюда следует уравнение $y' = 0,001(330 - y)y$, или $\dfrac{dy}{y(330 - y)} = 0,001dt$. Проинтегрируем отдельно левую часть: $\displaystyle\int \frac{dy}{y(330 - y)} = \frac{1}{330}\left(\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{330 - y}\right) = \frac{1}{330}\ln\left|\frac{cy}{330 - y}\right|$, и запишем общее решение $\dfrac{1}{330}\ln\dfrac{cy}{330 - y} = 0,001t$, или $\dfrac{cy}{330 - y} = e^{0,33t}$. Из начального условия $y(0) = 30$ видно, что $c = 10$, и $10y = (330 - y)e^{0,33t}$ — частное решение уравнения. Выражая отсюда y, получим $y = \dfrac{330}{1 + 10e^{-0,33t}}$.

За полгода действия программы масса выпущенной стали достигнет значения $\int\limits_0^6 \frac{330dt}{1+10e^{-0,33t}} = 330\left(\int\limits_0^6 \frac{1+10e^{-0,33t}}{1+10e^{-0,33t}}dt -\right.$

$$\left.-\int\limits_0^6 \frac{10e^{-0,33t}}{1+10e^{-0,33t}}dt\right) = 330\left(\int\limits_0^6 dt + \frac{1}{0,33}\int\limits_0^6 \frac{d(1+10e^{-0,33t})}{1+10e^{-0,33t}}\right) =$$

$$= 330t\Big|_0^6 + 1000\ln(1+10e^{-0,33t})\Big|_0^6 \approx 449,5 \text{ т.}$$

Ответ: 449,5 т.

Задача 40. Государство решило оказать поддержку остановившему производство предприятию-банкроту. В течение года на счет предприятия непрерывно будут поступать денежные средства, причем кризисный управляющий может выбрать одну из схем господдержки: либо перечисленные средства равномерно возрастают и к концу года достигают некоторого фиксированного значения, либо средства равномерно убывают от данного фиксированного значения до нуля к концу года. Какая из предложенных схем приведет к выпуску большего объема продукции, если известно, что из-за ветхости оборудования коэффициент выбытия фондов за год равен двум, а показатель отдачи инвестиций в данной отрасли составляет 40 %?

Решение. Пусть $y(t)$ — это объем продукции в момент времени t, причем время измеряется в годах. Тогда скорость производства y' за счет износа оборудования уменьшается на $2y$, а за счет господдержки увеличивается на $0,4u$, где $u(t)$ — величина перечисляемых государством средств. Следовательно, верно тождество $y' = 0,4u - 2y$.

Если через a обозначить максимальное значение поступающих средств, то в первой схеме инвестирования $u_1 = at$, а во второй — $u_2 = a - at$. Имеем линейные уравнения $y' + 2y = 0,4at$ и $y' + 2y = 0,4(a - at)$. Соответствующее однородное уравнение $y' + 2y = 0$ имеет общее решение $y = ce^{-2t}$. Варьируя константу, для первой схемы получаем $c'e^{-2t} = 0,4at$, $c' = 0,4ate^{2t}$ и $c = 0,4a\int te^{2t}dt =$ $= 0,2ate^{2t} - 0,1ae^{2t} + \tilde{c}$. Аналогично для второй схемы: $c'e^{-2t} = 0,4(a - at)$, $c' = 0,4(a - at)e^{2t}$, $c = 0,4a\int(1-t)e^{2t}dt =$ $= 0,3ae^{2t} - 0,2ate^{2t} + \tilde{c}$. Итак, найдены общие решения $y_1 = 0,2at - 0,1a + ce^{-2t}$ и $y_2 = 0,3a - 0,2at + ce^{-2t}$. Так как в начальный момент времени предприятие не выпускало продукцию, то $y(0) = 0$ и частные решения принимают вид $y_1 = 0,2at - 0,1a + 0,1ae^{-2t}$ и $y_2 = 0,3a - 0,2at - 0,3ae^{-2t}$.

К концу года объем выпущенной продукции по первой схеме достигнет значения $0,2a\int_0^1 tdt - 0,1a\int_0^1 dt + 0,1a\int_0^1 e^{-2t}dt =$ $= 0,1at^2\Big|_0^1 - 0,1at\Big|_0^1 - 0,05ae^{-2t}\Big|_0^1 = 0,05a(1 - e^{-2}) \approx 0,043a$, а по второй схеме — $0,3a\int_0^1 dt - 0,2a\int_0^1 tdt - 0,3a\int_0^1 e^{-2t}dt = 0,3at\Big|_0^1 -$ $- 0,1at^2\Big|_0^1 + 0,15ae^{-2t}\Big|_0^1 = 0,2a + 0,15a(e^{-2} - 1) \approx 0,07a$. Видно, что в первом случае объем продукции получился меньшим, чем во втором.

Ответ: вторая схема.

Комментарий. Из решения данной задачи видно, что при одинаковой общей сумме внешних инвестиций убывающая схема инвестирования оказывается более выгодной по сравнению с возрастающей схемой. Это доказывает известный в экономике факт, что вложения в производство наиболее эффективны в первоначальный период становления предприятия.

Приложение
Простейшие дифференциальные уравнения и методы их решения

Здесь представлены только те типы дифференциальных уравнений, к которым сводятся задачи из данного пособия. Это некоторые уравнения первого порядка (уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения и линейные уравнения), уравнения второго порядка, не содержащие независимую переменную, и линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Общий вид дифференциального уравнения n-го порядка $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, где x — независимая переменная; $y(x)$ — искомая неизвестная функция. Соответственно уравнения первого порядка имеют вид $F(x, y, y') = 0$, а уравнения второго порядка — $F(x, y, y', y'') = 0$.

Функцию $y = \varphi(x)$, которая обращает уравнение в тождество при замене y и его производных на $\varphi(x)$ и ее производные, называют частным решением дифференциального уравнения. Функцию $y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$, которая при замене констант $c_1, c_2, \ldots, c_n$ на конкретные числовые значения становится частным решением уравнения, называют общим решением данного уравнения. Решения, заданные неявно, также называют интегралом (частным или общим) дифференциального уравнения.

Уравнениями с разделяющимися переменными (задачи 1, 2, 5, 8, 9, 10, 11, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 35, 36, 37, 38, 39) называются уравнения вида $y' = f(x) \cdot g(y)$. Такие уравнения решают методом разделения переменных, а именно их записывают в виде

$\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ и интегрируют обе части. Общий интеграл уравнения $\int \dfrac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$.

Однородные уравнения (задачи 3, 6, 7) — это уравнения вида $y' = f(x, y)$, где функция $f(x, y)$ для любого параметра k удовлетворяет условию $f(kx, ky) = f(x, y)$. Заменой $y = xu$ и $y' = u + xu'$, где u — функция от переменной x, однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Линейные уравнения первого порядка (задачи 4, 30, 34, 40) имеют вид $a(x)y' + b(x)y = f(x)$, причем при $f(x) = 0$ линейные уравнения называют однородными, а при $f(x) \neq 0$ — неоднородными. Линейные однородные уравнения решаются как уравнения с разделяющимися переменными. Для неоднородных уравнений применяют метод вариации произвольной постоянной (иногда его называют методом Лагранжа). Сначала решается соответствующее однородное уравнение $a(x)y' + b(x)y = 0$, а затем в найденном общем решении $y = \varphi(x, c)$ константа c заменяется функцией $c(x)$ и выражение $y = \varphi(x, c(x))$ подставляется в исходное неоднородное уравнение вместо y. Из уравнения выражают производную $c'(x)$, интегрируют и подставляют полученное $c(x)$ в общее решение $y = \varphi(x, c(x))$.

Замена $y' = p$ и $y'' = p'p$, где p — функция от переменной y, понижает на единицу порядок ***уравнения второго порядка, не содержащего независимую переменную x***, и тем самым сводит его к уравнению первого порядка (задача 17).

Для решения ***линейных однородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами*** $ay'' + by' + cy = 0$ (задачи 12, 13, 14, 15, 16, 31) составляется характеристическое уравнение $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Если корни λ_1 и λ_2 полученного квадратного уравнения действительны и различны, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$. Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}$. А если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ — комплексные сопряженные корни, то $y = c_1 e^{\alpha x} \cos\beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin\beta x$.

Общее решение ***линейного неоднородного уравнения второго порядка*** $ay'' + by' + cy = f(x)$ (задачи 15, 32) находится как сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения. При этом если правая часть имеет вид $f(x) = e^{\alpha x}\left(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\right)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — произвольные многочлены, и числа $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ не являются корнями характеристического уравнения, то существует частное решение неоднородного уравнения вида $y = e^{\alpha x}\left(A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x\right)$, где $A(x)$ и $B(x)$ — некоторые многочлены, степени которых не превышают наибольшую из степеней многочленов $P(x)$ и $Q(x)$. Если же характеристическое уравнение имеет сопряженные корни $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то $y = xe^{\alpha x}\left(A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x\right)$. Аналогично если $f(x) = P(x)\operatorname{ch}\beta x + Q(x)\operatorname{sh}\beta x$ и $\lambda \neq \pm\beta$, то $y = A(x)\operatorname{ch}\beta x + B(x)\operatorname{sh}\beta x$. В частном случае, когда правая часть является константой и $\lambda \neq 0$, частное решение также будет являться некой константой.

Литература

1. Ахтямов А.М. Математика для социологов и экономистов/ А.М. Ахтямов. – М.: Физматлит, 2004.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа/ Г.Н. Берман. – М.: Наука, 1975.
3. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа для втузов/ А.Ф. Бермант. – М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1963.
4. Гутер Р.С. Дифференциальные уравнения/ Р.С. Гутер, А.Р. Янпольский. – М.: Высшая школа, 1976.
5. Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениям/ А.И. Егоров. – М.: Физматлит, 2005.
6. Ельцов А.А. Интегральное исчисление. Дифференциальные уравнения/ А.А. Ельцов, Т.А. Ельцова. – Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем управления и радиоэлектроники, 2007.
7. Ельцов А.А. Практикум по интегральному исчислению и дифференциальным уравнениям/ А.А. Ельцов, Т.А. Ельцова. – Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем управления и радиоэлектроники, 2005.
8. Высшая математика для экономистов/ Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман. – М.: ЮНИТИ, 1998.
9. Кухлинг Х. Справочник по физике/ Х. Кухлинг. – М.: Мир, 1985.
10. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения/ Л.С. Понтрягин. – М.: Наука, 1974.
11. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям/ А.Ф. Филиппов. – М.: Наука, 1979.

12. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2/ Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1969.

Оглавление

Предисловие. 3
Глава 1. Геометрические задачи. 4
1.1. Задачи на положение касательной. 4
1.2. Задачи на площадь криволинейной трапеции. 16
Глава 2. Физические задачи. 20
2.1. Задачи на движение. 20
2.2. Задачи на реактивное движение. 34
2.3. Задачи на радиоактивный распад. 37
2.4. Задачи на смеси. 39
2.5. Задачи на охлаждение и нагревание. 42
2.6. Задачи на давление. 45
2.7. Задачи на истечение жидкости. 47
2.8. Задачи на электрические цепи. 51
Глава 3. Экономические задачи. 60
3.1. Задачи на проценты. 60
3.2. Задачи на выпуск продукции. 63
Приложение. Простейшие дифференциальные уравнения и методы их решения. 69
Литература. 72