А. Г. КОНФОРОВИЧ, А.М. АНДРИЕВСКАЯ

ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ

АЛЬБОМ

КИЕВ
ГОЛОВНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ «ВЫЩА ШКОЛА»
1988

ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ

22.1г.я6
К65

УДК 51 (09)

История развития математики: Альбом/А. Г. Конфорович, А. М. Андриевская. — К.: Вища шк. Головное изд-во, 1987. — 95 табл.

В альбоме показано развитие математики в иллюстрациях, освещается ее роль в развитии общечеловеческой культуры, в частности, в наше время. Приведены высказывания классиков марксизма-ленинизма и выдающихся ученых о математике.

Для преподавателей и учащихся средних учебных заведений и средних общеобразовательных школ.

Библиогр.: 69 назв.

Редакция литературы по математике и физике
Зав. редакцией *Ю. Е. Кострица*

К $\frac{1702000000\text{-}013}{М211(04)-87}$ 143-87

ПРЕДИСЛОВИЕ

В Политическом докладе XXVII съезду КПСС Генеральный секретарь ЦК КПСС М. С. Горбачев отмечал: „На темпы технической реконструкции огромное влияние окажет широкая электронизация и комплексная автоматизация производства. Определены конкретные задания по разработке и массовому освоению современной компьютерной техники, развитию элементной базы. На индустриальную основу ставится программное обеспечение ЭВМ и автоматизированных систем управления. В Академии наук СССР создано отделение информатики и вычислительной техники, объединяющее институты и конструкторские бюро, на которые возложено научное обеспечение работ в этой области" [16, с. 26].

Составной частью решения этих важных задач является повышение эффективности обучения математике в средней общеобразовательной школе, в системе профессионально-технического образования и в средних специальных учебных заведениях, а также воспитание интереса к математике учащейся и работающей молодежи.

Цель альбома — помочь учителям математики повысить эффективность преподавания, успешнее решать задачи, поставленные XXVII съездом КПСС перед народным образованием.

Учителя математики и организаторы внеклассной работы общеобразовательных школ встречают значительные трудности в подборе иллюстративного материала при изучении отдельных тем курса математики, истории математики, раскрытии ее ценности для общечеловеческой культуры.

Альбом можно использовать как на уроках математики, так и во время проведения различных внеклассных занятий. Кроме того, в условиях семьи альбом может быть средством коммунистического воспитания и привития интереса к математике.

Авторы стремились создать комплект плакатов, который содержал бы информационный, справочный материал, научно-художественные картины из истории математики, чтобы с их помощью наглядно закреплять, расширять приобретенные учащимися знания, раскрывать им математику как науку, которая при помощи своей системы абстракций и языка отображает, моделирует одну из граней бесконечно сложной реальной действительности, помочь учащимся правильно понять место математики в истории человеческой культуры.

Альбом открывается плакатами, в которых показано значение математики в жизни и научной деятельности классиков марксизма-ленинизма К. Маркса, Ф. Энгельса, В. И. Ленина. Приведены высказывания классиков марксизма-ленинизма о предмете и методе математики, природе математических знаний, об источниках формирования и движущих силах развития фундаментальных математических понятий. Многие плакаты содержат материал воспитательного значения, некоторые могут быть использованы в качестве справочного материала, часть плакатов в форме наглядных образов иллюстрирует важные математические понятия.

На многочисленных примерах раскрывается широкая панорама содержания математики. При этом подчеркивается диалектическая противоречивость возникновения нового математического знания как продукта сложного процесса взаимодействия потребностей практики и логики развития самой математики. В ходе рассмотрения основных этапов истории развития математики большое внимание уделяется освещению жизни и деятельности выдающихся ученых разных эпох и народов. Подчеркивается, что математика всегда была ареной острой идеологической борьбы между материалистами и представителями различных идеалистических школ, услугами которых пользовались апологеты религии. Плакаты на эту тему могут служить хорошим материалом для атеистического воспитания.

Авторы стремились следовать историко-генетической последовательности раскрытия тем плакатов. В какой-то мере этого удалось достичь, но не везде. И это понятно: математика настолько многоплановая отрасль теоретических знаний, так тесно взаимодействует с многочисленными другими науками и практическими приложениями их, что нарушение хронологического принципа не исключено. К тому же альбом — не книга для чтения (от первой до последней страницы), а собрание материалов, которые преподаватель или организатор внеклассной работы может использовать, решая конкретные учебно-воспитательные задачи. Существенную помощь окажет ему материал, помещенный на обороте большинства плакатов. При этом следует учесть, что авторы не могли дать обширных комментариев к каждой теме. Читатели найдут их в литературе, приведенной в конце альбома. Не одинаковы по объему и комментарии к отдельным плакатам. Менее разработанные темы рассмотрены подробнее, для более известных даны лишь общие замечания.

Замысел создания альбома принадлежит А. М. Андриевской. Подготовленный ею вариант альбома экспонировался в 1968—1969 гг. на ВДНХ СССР в г. Москве и был удостоен серебряной медали. Научную обработку, дополнения и подготовку к изданию осуществил А. Г. Конфорович.

1. Математические символы и обозначения

Математика является универсальным языком, на котором излагают свои теории и записывают законы другие науки — естественные и гуманитарные. Об этом прекрасно сказал выдающийся итальянский ученый Г. Галилей: „Философия написана в величайшей книге, которая всегда открыта перед нашими глазами (я разумею Вселенную), но ее нельзя понять, не научившись сначала понимать ее язык и не изучив буквы, которыми она написана. А написана она на математическом языке, и ее буквы — это треугольники, дуги и другие геометрические фигуры, без каковых невозможно понять по-человечески ее слова: без них — тщетное кружение в темном лабиринте".

Более кратко и выразительно ту же мысль высказал Н. И. Лобачевский: „Математика — это язык, на котором говорят все точные науки".

В результате большой творческой работы поколений математиков был создан удивительный искусственный язык самой математики. Математика создает модели количественных и подобных им отношений, пространственных форм существующих или логически возможных объектов действительности. Информацию об этих свойствах, как и любую другую информацию, надо как-то фиксировать (кодировать). Код в широком смысле — это определенный носитель информации, взятый вместе со способом его конкретного воплощения.

Информация, которую несут математические модели, кодируется на языке, которым написаны математические произведения. Это язык понятий, в отличие от языка художественной литературы — языка образов. Язык математики — один из видов научного языка. Он служит для адекватного выражения научных факторов, идей, гипотез и представляет собой совокупность разговорного и формализованного языков. Разговорный язык — это естественный код. Информационное значение его дано учащимся до изучения математики. Формализованный язык математики, в частности, незнакомая учащимся математическая символика — это чуждый код, информационное значение которого непосредственно не дано.

Язык не является источником развития математики, но он в определенной степени задает изгиб и темп линии ее развития. Именно ему в значительной степени математика обязана своими огромными успехами в раскрытии глубинных закономерностей природы.

N — множество всех натуральных чисел
Z — множество всех целых чисел
Z_0 — множество всех целых неотрицательных чисел
Q — множество всех рациональных чисел
R — множество всех действительных чисел, действительная числовая прямая
R_+ — множество всех положительных действительных чисел
R^2 — числовая плоскость, множество пар $(x; y)$, $x \in R$, $y \in R$
$[a; b]$ — замкнутый числовой промежуток (отрезок) с началом a и концом b
$(a; b)$ — открытый числовой промежуток (интервал) с началом a и концом b
$(a; b]$ — полуоткрытый промежуток (открытый слева) с началом a и концом b
$[a; b)$ — полуоткрытый промежуток (открытый справа) с началом a и концом b
$[a; +\infty)$ — бесконечный промежуток, луч числовой прямой, a — начало луча (a включается в промежуток)
$(a; +\infty)$ — бесконечный промежуток, луч числовой прямой, a — начало луча (a не включается в промежуток)
$(-\infty; b]$ — бесконечный промежуток, луч числовой прямой, b — начало промежутка (b включается в промежуток)
$(-\infty; b)$ — бесконечный промежуток, луч числовой прямой, b — начало луча (b не включается в промежуток)
$(-\infty; +\infty)$ — бесконечный промежуток, числовая прямая
$\Rightarrow$ — обозначение следования
$\Leftrightarrow$ — обозначение равносильности (эквивалентности)
$\rightarrow$ — обозначение соответствия
$n \in N$ — число n принадлежит множеству N
$A \in \Phi$ — точка A принадлежит фигуре Φ
$m \notin M$ — число m не принадлежит множеству M
$B \notin \Phi$ — точка B не принадлежит фигуре Φ
$C \subset D$ — множество C включается в множество D, или C является подмножеством множества D, или множество D содержит множество C
$\Phi_1 \subset \Phi$ — Φ_1 является подмножеством фигуры Φ
$C \not\subset D$ — множество C не включается в множество D
$\Phi_1 \not\subset \Phi_2$ — Φ_1 не является подмножеством Φ_2
$\Phi_1 = \Phi_2$ — фигуры Φ_1 и Φ_2 равны
$\Phi_1 \neq \Phi_2$ — фигуры Φ_1 и Φ_2 не равны
$C \cup D$ — объединение множеств C и D
$C \cap D$ — пересечение множеств C и D
$\Phi_1 \sim \Phi_2$ — фигуры Φ_1 и Φ_2 подобны
$\vec{a}$ — вектор a
$\overrightarrow{AB}$ — вектор AB, отображающий точку A в точку B
$\overrightarrow{AA}$, $\vec{0}$ — нулевые векторы
$|\vec{a}|$ — длина вектора a
$|\overrightarrow{AB}|$ — длина вектора AB
$x_{\vec{a}}$ — абсцисса вектора a
$y_{\vec{a}}$ — ордината вектора a
$\vec{a}(x, y, z)$ — вектор с координатами x, y, z
$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ — прямоугольный базис
$\vec{a} \cdot \vec{b}$ — скалярное произведение векторов a и b
$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ — векторы AB и CD сонаправлены
$\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ — векторы AB и CD противоположно направлены
$M(x, y, z)$ — точка с координатами x, y, z
x_A — абсцисса точки A
y_A — ордината точки A
$(a - \epsilon; a + \epsilon)$ — ϵ-окрестность точки a
$\{a, b, \ldots\}$ — множество, образованное элементами $a, b, \ldots$
$P = \phi$ — множество P пустое
$n!$ — $1 \cdot 2 \ldots n$ (n-факториал)
P_n — число перестановок из n элементов
A_n^m — число размещений из n по m
C_n^m — число комбинаций из n по m
AB — отрезок прямой с концами A и B, прямая, проходящая через точки A и B
$AB \parallel CD$ — прямая AB параллельна прямой CD
$AB \nparallel CD$ — прямая AB не параллельна прямой CD
$AB \perp CD$ — прямая AB перпендикулярна прямой CD
$AB \perp \alpha$ — прямая AB перпендикулярна плоскости α
$\angle A$ — угол A
$\angle ABC$ — угол ABC
$\smile AB$ — дуга AB
E — тождественное преобразование
Z_O — симметрия относительно точки O (центра)
S_l — симметрия относительно прямой (оси) l
S_α — симметрия относительно плоскости α
H_O^k — гомотетия с центром O и коэффициентом k
R_O^α — поворот плоскости (луча, вектора) на угол α вокруг точки O
R^α — поворот плоскости (луча, вектора) на угол α вокруг начала координат
$\overline{abc}$ — запись числа, где a, b, c — цифры соответствующих разрядов
$a_1, a_2, \ldots, a_n$ — последовательность, состоящая из n членов
(a_n) — бесконечная последовательность
$f(x)$ — значение функции f в точке x
$f^{-1}(x)$ — значение в точке x функции, обратной к функции f
$D(f)$ — область определения функции f
$E(f)$ — множество значений функции f
$f \circ g$ — композиция функций f и g, т. е. сложная функция, состоящая из функций f и g; если $h = f \circ g$, то $h(x) = f(g(x))$
Δx — приращение переменной x
$\left.\begin{array}{r}\Delta f(x_0)\\ \Delta f\end{array}\right\}$ — приращение функции f в точке x_0
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ — число b является пределом функции f, если x стремится к a
$f'(x_0)$ — производная функции f в точке x_0
$\max\limits_{[a; b]} f$ — наибольшее значение функции f на отрезке $[a; b]$
$\min\limits_{[a; b]} f$ — наименьшее значение функции f на отрезке $[a; b]$
$\int_a^b f(x)\,dx$ — интеграл функции f в пределах от a до b
$[x]$ — целая часть числа x
$\{x\}$ — дробная часть числа x
$|x|$ — модуль числа x
$\sqrt{x}$ — арифметический квадратный корень из числа x
sin — функция синус
cos — функция косинус
tg — функция тангенс
ctg — функция котангенс
$\exp_a$ — показательная функция с основанием a
exp — показательная функция с основанием e
$\log_a$ — логарифм с основанием a
lg — десятичный логарифм
ln — натуральный логарифм
arcsin — функция арксинус
arccos — функция арккосинус
arctg — функция арктангенс
arcctg — функция арккотангенс
$\sin x$ — значения функции sin в точке x. Аналогично, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\exp_a x$, $\exp x$, $\log_a x$, $\lg x$, $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ — значения соответствующих функций в точке x

1. Математические символы и обозначения

Математику справедливо называют языком науки. Но именно поэтому огромное значение для самой математики имеет ее собственный язык: знаки и символы для обозначений понятий и отношений между ними. С большим вниманием к математической символике относились многие выдающиеся математики, философы, естествоиспытатели. Г. В. Лейбниц писал: „Следует заботиться о том, чтобы знаки были удобны для открытий. Это достигается в наибольшей мере тогда, когда знаки коротко выражают и как бы отображают глубочайшую природу вещи и при этом удивительным образом сокращается работа мышления" [32, т. 2, с. 252]. В результате большой творческой поисковой работы был создан искусственный язык математики, который стал существенной частью успехов, достигнутых в математике. Этот язык высоко ценили и математики, и другие ученые. Н. И. Лобачевский писал: „Из всех языков мира самый лучший — это язык искусственный, весьма сжатый язык, язык математики". Свободное владение им — необходимое условие понимания самой математики.

Имеются достаточные основания предполагать, что первыми знаками, созданными древним человеком, были именно знаки для хранения и передачи числовой информации. Они послужили также стимулом для создания письменности. Математическая символика создавалась как результат усовершенствования естественного языка в направлении устранения громоздкости, омонимии (многозначности) и расширения выразительных возможностей.

Важным этапом формирования математического языка явилось создание системы обозначений для чисел, в частности введение позиционной нумерации и особого знака для нуля. Многие ученые отмечали исключительное значение нуля. Например, очень интересный фрагмент о значении нуля содержится в „Диалектике природы" Ф. Энгельса. Ф. Энгельс подчеркивает, что нуль „по своей природе важнее всех других, ограничиваемых им чисел. Действительно, нуль богаче содержанием, чем всякое иное число" [11, с. 576].

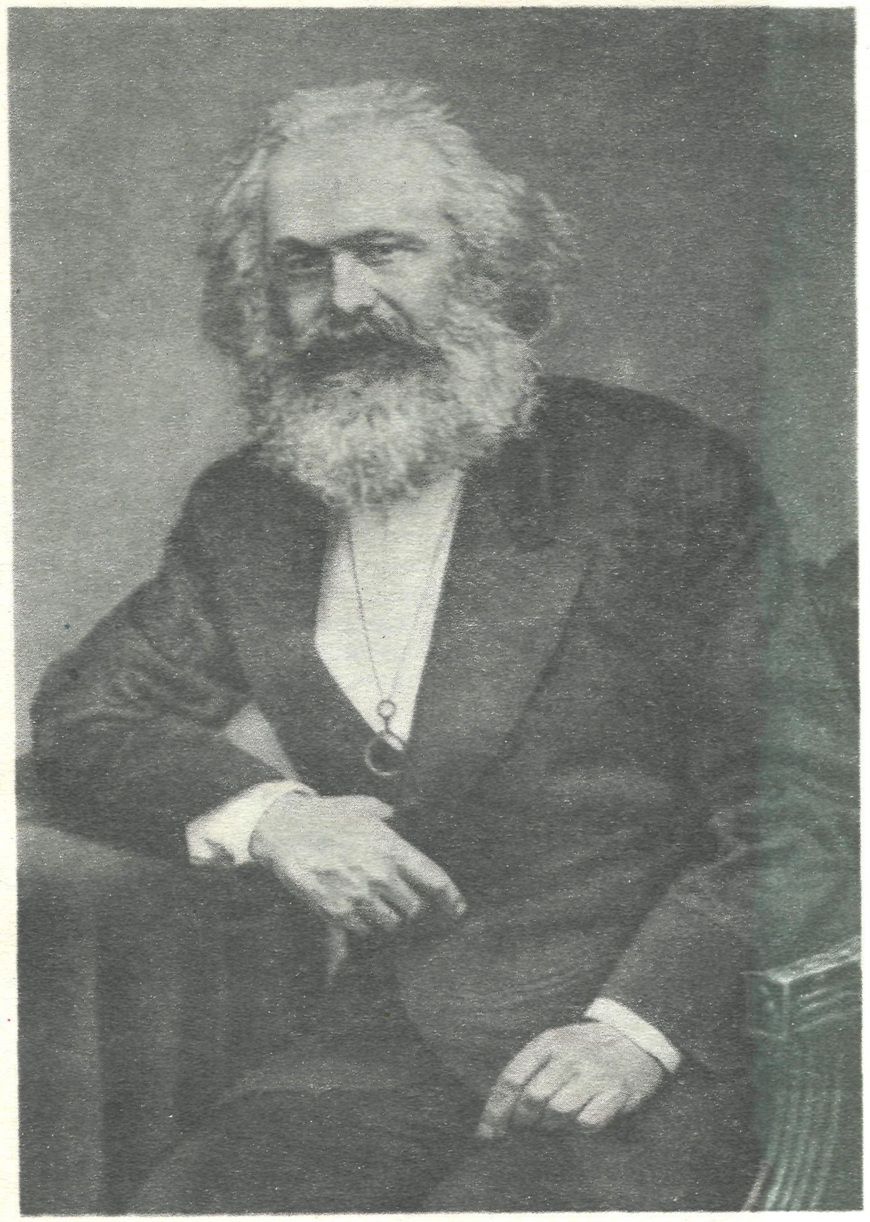
„Самая важная цифра есть нуль, — пишет Б. Л. Ван дер Варден. — Это была гениальная идея — сделать нечто из ничего, дать этому нечто имя и изобрести для него символ" [24, с. 77].

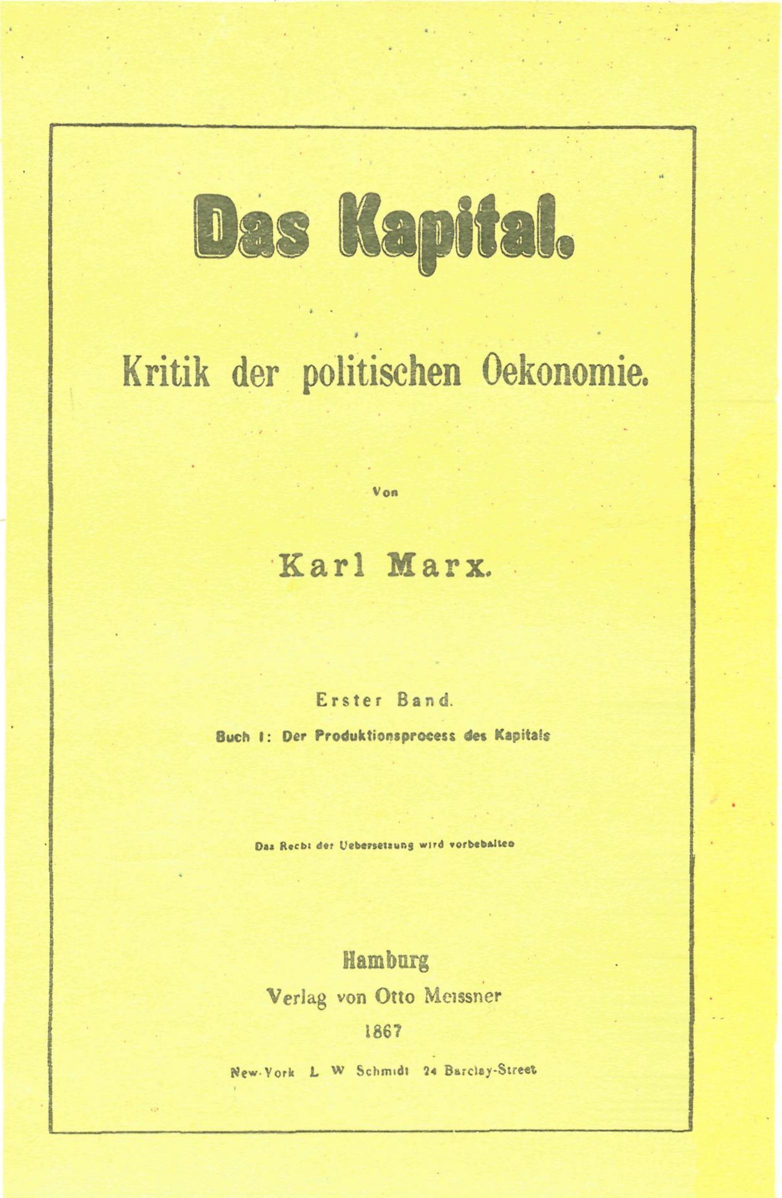
Вторым важным этапом создания математического языка было формирование алгебраической символики. Она позволила наглядно изобразить алгебраические выражения и их преобразования, в частности решение алгебраических уравнений.

Создание дифференциального и интегрального исчисления стимулировало дальнейшее обогащение и усовершенствование математического языка. Именно тогда были созданы широко известные теперь символы $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$, $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и т. д. Важнейшая заслуга в этом принадлежит Г. В. Лейбницу.

Уже в наше время серьезное влияние на дальнейшее развитие математического языка оказывает практика работы с ЭВМ.

2. Карл Маркс и математика





Das Kapital.

Kritik der politischen Oekonomie.

Von

Karl Marx.

Erster Band.

Buch I: Der Produktionsprocess des Kapitals.

Das Recht der Uebersetzung wird vorbehalten.

Hamburg

Verlag von Otto Meissner

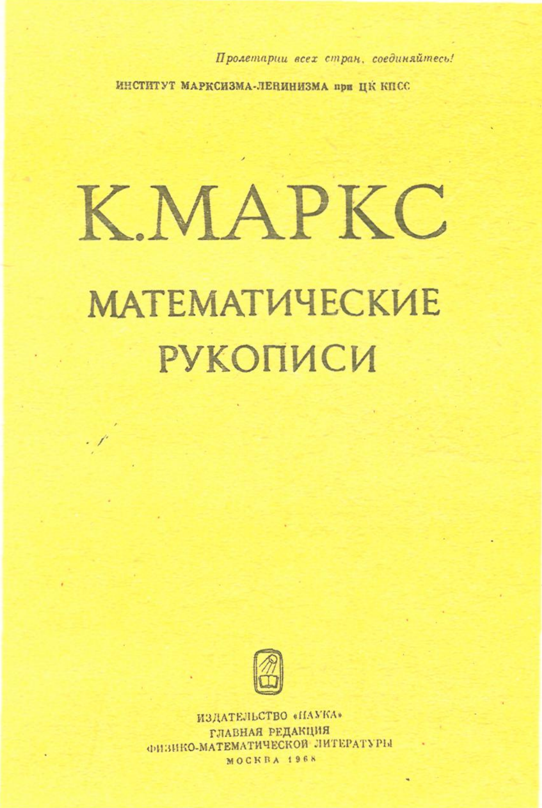
1867

New-York: L. W. Schmidt. 24 Barclay-Street.

Наука только тогда достигает совершенства, когда ей удается пользоваться математикой.

К. Маркс

Консультантом К. Маркса по вопросам математики был Самюэль Мур. Перед ним Маркс поставил задачу исследовать методами математики закономерности неявных периодов сложнейших экономических явлений. Задача оказалась неразрешимой средствами математики XIX в. В наше время такие задачи решаются с помощью периодограммного анализа.



Пролетарии всех стран, соединяйтесь!

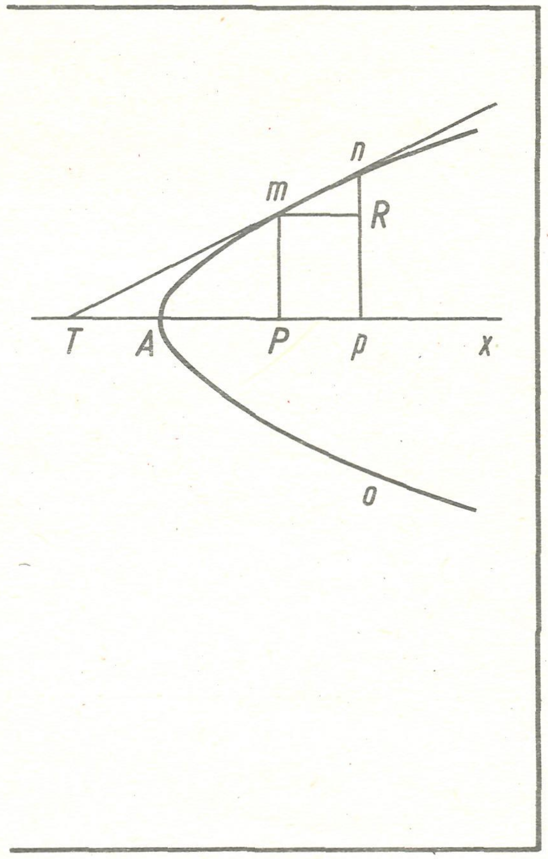
ИНСТИТУТ МАРКСИЗМА-ЛЕНИНИЗМА при ЦК КПСС

К. МАРКС

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РУКОПИСИ

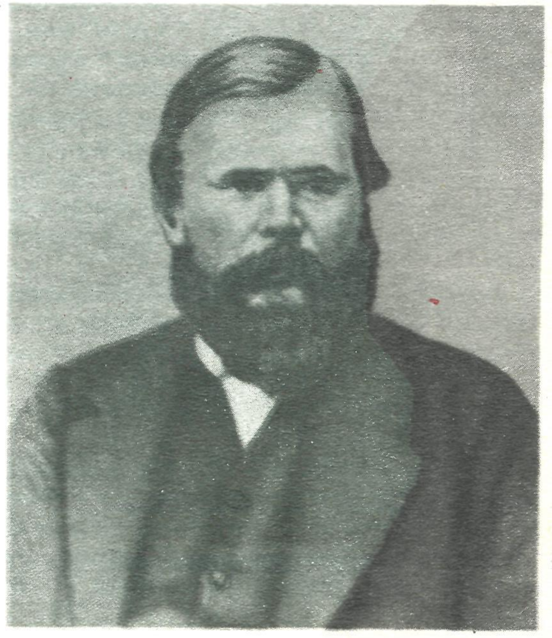
ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

В 1968 г. впервые были опубликованы в оригинале и на русском языке все математические труды Маркса, имеющие более или менее законченный вид. Таким образом, для математиков, историков и философов была открыта еще одна грань научных поисков гениального мыслителя и революционера.



Впервые Карл Маркс (1818–1883) ознакомился с математическими трудами в связи с экономическими расчетами, необходимыми в его работе. Математика увлекла Маркса логикой и стройностью своих идей. Ему доставляла истинную радость поразительная интеллектуальная симфония математических зависимостей, услышанная им в высшей алгебре *и особенно в дифференциальном исчислении*. Он восторженно следовал извилистыми путями математической мысли.

Поль Лафарг писал: „Наряду с поэтами и романистами у Маркса было еще одно весьма примечательное средство для умственного отдыха — математика, к которой он питал особое пристрастие. Алгебра служила ему даже нравственным утешением: он прибегал к ней в самые мучительные минуты своей беспокойной жизни. Во время последней болезни жены он не мог продолжать обычных научных занятий; он мог сколько-нибудь отвлечься от тяжелого состояния, вызываемого ее страданиями, только погружаясь в математику. В это время — время душевных мук — он написал работу по исчислению бесконечно малых величин, которая, по отзывам знавших ее математиков, имеет большое значение и должна быть опубликована в собрании его Сочинений. В высшей математике он находил диалектиче*ское движение в его наиболее логичной и в то же время простейшей форме*" [42, с. 144]. Маркс исследовал, как отражается движение и связанные с ним значения переменной величины в операциях и формулах математики. Разрабатывая эти вопросы, он провел глубокие исследования по обоснованию математического анализа. Опередив свое время, он обосновал дифференциальное исчисление на основании идей сформировавшегося лишь в наши дни конструктивного направления в математике.



Много внимания уделял Маркс логическому анализу алгоритмов, связанных с предельными переходами. Он обнаружил и исправил логические дефекты в рассуждениях Л. Эйлера, который пытался сравнивать по величине не имеющие значения выражения $\frac{1}{0}$ и $\frac{2}{0}$. Известно, что именно попытки некоторых математиков приписать какое-либо значение (конечно же, ∞!) этим выражениям были источником появления в математике разных парадоксов. К. Маркс раскрыл подлинную природу таких математических выражений, рассматривая их не как определенные числа, а как символические записи предельных переходов.

Первым текстом собственно математического содержания в рукописях Маркса является „Appendix" („Приложение") к письму Энгельсу, относящемуся к концу 1865 — началу 1866 г. Само письмо не дошло до нас. В этом приложении Маркс объясняет Энгельсу на примере задачи о касательной к параболе сущность дифференциального исчисления.

Вот начало „Приложения": „Ты как-то просил меня во время моего последнего пребывания в Манчестере объяснить дифференциальное исчисление. На следующем примере ты сможешь полностью уяснить себе этот вопрос. Все дифференциальное исчисление возникло первоначально из задачи о проведении *касательных* к произвольной кривой через любую ее точку. На этом же примере я и хочу пояснить тебе существо дела" [9, с. 251].

Приведенный рисунок выполнен К. Марксом в „Приложении" к письму Ф. Энгельсу.

2. Карл Маркс и математика

Карл Маркс, Фридрих Энгельс и Владимир Ильич Ленин охватили своим гением разнообразнейшие научные знания. Значительное место в их жизни и творчестве занимала математика. Рассмотрим лишь один вопрос: каков источник их интереса к столь абстрактной отрасли знаний?

Для классиков марксизма-ленинизма математика была одним из важнейших инструментов познания закономерностей развития общества, ключом к решению сложных философских и естественно-научных проблем.

Приведем ряд высказываний (помимо помещенных в других плакатах) о математике, особенностях ее развития и роли в истории общества, принадлежащих К. Марксу, Ф. Энгельсу и В. И. Ленину.

> ...Первой теоретической деятельностью рассудка, который еще колеблется между чувственностью и мышлением, является *счет*.
>
> К. Маркс

> Все дифференциальное исчисление возникло первоначально из задачи о проведении *касательных* к произвольной кривой через любую ее точку.
>
> К. Маркс

> Как и все другие науки, математика возникла из *практических потребностей* людей: из измерения площадей земельных участков и вместимости сосудов, из счисления времени и из механики. Но, как и во всех других областях мышления, законы, абстрагированные из реального мира, на известной ступени развития отрываются от реального мира, противопоставляются ему как нечто самостоятельное, как явившиеся извне законы, с которыми мир должен сообразоваться. Так было с обществом и государством, так, а не иначе, *чистая* математика *применяется* впоследствии к миру, хотя она заимствована из этого самого мира и только выражает часть присущих ему форм связей, — и как раз *только поэтому* и может вообще применяться.
>
> Ф. Энгельс

> Ничто не выглядит проще, чем количественная единица, и ничто не оказывается многообразнее, чем эта единица, коль скоро мы начнем изучать ее в связи с соответствующей множественностью, с точки зрения различных способов происхождения ее из этой множественности
>
> Ф. Энгельс

> ...Познание бесконечного окружено ...трудностями и может, по самой своей природе, совершаться только в виде некоторого бесконечного асимптотического прогресса. И этого для нас вполне достаточно, чтобы мы имели право сказать: бесконечное столь же познаваемо, сколь и непознаваемо, а это все, что нам нужно.
>
> Ф. Энгельс

> ...Математика и другие науки абстрагируют *одну* из сторон тела, явления, жизни...
>
> В. И. Ленин

> Говорят: „цифры доказывают"! Но надо же разобрать, что́ именно доказывают цифры. Они доказывают только то, *что они прямо говорят*.
>
> В. И. Ленин

> Единство природы обнаруживается в „поразительной аналогичности" дифференциальных уравнений, относящихся к разным областям явлений.
>
> В. И. Ленин

В трудах и воспоминаниях друзей и соратников основоположника научного коммунизма К. Маркса находим множество упоминаний о роли математики в его жизни. В предисловии ко второму изданию книги „Анти-Дюринг" Ф. Энгельс писал: „Маркс и я были едва ли не единственными людьми, которые спасли из немецкой идеалистической философии сознательную диалектику и перевели ее в материалистическое понимание природы и истории. Но для диалектического и вместе с тем материалистического понимания природы необходимо знакомство с математикой и естествознанием. Маркс был основательным знатоком математики, но естественными науками мы могли заниматься только нерегулярно, урывками, спорадически. Поэтому, когда я, покинув коммерческое дело и переселившись в Лондон, приобрел необходимый для этого досуг, то, насколько это для меня было возможно, подверг себя в области математики и естествознания процессу полного „линяния", как выражается Либих, и в течение восьми лет затратил на это большую часть своего времени" [10, с. 10–11].

Ф. Энгельс был первым, кто высоко оценил математические способности К. Маркса: „...Маркс делал самостоятельные открытия в каждой области, которую он исследовал, — даже в области математики, — а таких областей было очень много, и ни одной из них он не занимался поверхностно" [10, с. 351].

Франц Меринг (1848–1919) — один из основателей Коммунистической партии Германии, издатель и комментатор трудов К. Маркса и Ф. Энгельса, биограф К. Маркса — в книге „Карл Маркс. История его жизни" вспоминал: „Кроме изящной литературы, Маркс обычно находил отдых еще в совершенно иной области духовного творчества. Особенно в дни душевных огорчений и тяжких страданий он часто искал убежища в математике, оказывавшей на него успокоительное влияние" [49, с. 527].

О том, какое значение имела математика для К. Маркса, свидетельствуют его труды. Математическая обработка исследуемого явления была для К. Маркса синонимом желаемой точности. Об этом свидетельствует красноречивое высказывание К. Маркса: „...мы имеем здесь математически точное объяснение того, почему капиталисты, обнаруживая столь мало братских чувств при взаимной конкуренции друг с другом, составляют в то же время поистине масонское братство в борьбе с рабочим классом как целым" [3, с. 217].

В „Капитале" К. Маркс применил математику для вывода и записи экономических законов. Получая при помощи алгебраических преобразований одни формулы из других, он анализировал их экономический смысл и формулировал новые законы. В частности, К. Маркс вывел зависимость нормы прибыли $P = \frac{M}{C+V}$ от органического состава капитала $O = \frac{C}{V}$ и нормы прибавочной стоимости $A = \frac{M}{V}$, а именно $P = \frac{A}{1+O}$, и открыл закон о тенденции к снижению средней нормы прибыли; установил взаимозависимость производства средств производства и средств потребления, открыл закономерности образования цен и „механизм" неминуемых экономических кризисов в условиях еще домонополистического капитализма.

К. Маркс отмечал, что „сухие", „мертвые" числа становятся оружием политической борьбы. В „Капитале" он гневно разоблачил буржуазную статистику, служащую капитализму: „...Официальная статистика все больше и больше искажает действительные размеры пауперизма по мере того, как с накоплением капитала развивается классовая борьба, а потому и самосознание рабочих" [2, с. 668].

Более того, становилось очевидным, что капитализм заставлял служить себе не только технику, естествознание, но и наиболее абстрактную отрасль знаний — математику. „...Дело шло уже не о том, — отмечал К. Маркс, — правильна или неправильна та или другая теорема, а о том, полезна она для капитала или вредна, удобна или неудобна, согласуется с полицейскими соображениями или нет" [1, с. 17].

К. Маркс и Ф. Энгельс, высоко ценя четкость и выразительность языка чисел, его эффективность для сжатой характеристики различных социальных явлений, разрабатывали методы получения объективных статистических данных, помогали рабочим создавать собственную рабочую статистику. Разработка таких методов была невозможна без глубокого постижения математических закономерностей.

И в записных тетрадях К. Маркса по политической экономии появляются страницы вычислений, формул, геометрических фигур. Здесь находим и решение уравнений первой степени, и вычисление процентных отношений, а также степеней с различными рациональными показателями степени, заметки по комбинаторике, логарифмические вычисления и вычисления бинома Ньютона. К. Маркса интересуют история возникновения и эволюция математических понятий и методов. С 1851 г. он конспектирует „Историю математики" Поппе. Позднее К. Маркс поглощен доказательствами геометрических теорем, занимается алгебраическими преобразованиями степеней и логарифмов.

Начав с элементарных теорий, К. Маркс далее все больше увлекается математикой и переходит к изучению ее высших разделов: математического анализа, теории аналитических функций, высшей алгебры. Все это делалось урывками, когда удавалось выкроить свободную минуту, поскольку Маркс непрерывно проводил огромную научную работу в области политической экономии и философии. Математика помогала преодолевать неотступные жизненные невзгоды. 28 ноября 1860 г. он писал Энгельсу: „Писать статьи для меня теперь почти невозможно. Единственное занятие, которым я поддерживаю необходимое душевное равновесие, это — математика" [5, с. 88].

Мир математических понятий и символов был с Марксом и тогда, когда он писал письма родным и друзьям. Образы этого мира помогали ему кратко и зримо раскрыть свои надежды и радости, тревоги и разочарования.

Овладевая разделами математики, потребовавшимися ему для разработки политической экономии, Маркс открыл для себя дифференциальное исчисление. Отныне, изучая арифметику и алгебру, он начинает заниматься высшей математикой. Маркс ищет кратчайший путь к фундаменту высшей математики. Здесь и встретилось ему понятие, с древнейших времен причинявшее математикам и философам множество неприятностей. Это была бесконечность. Даже Эйлер попался в ее сети, введя очевидное равенство $\frac{1}{\infty} = 0$ и получив $\frac{1}{0} = \infty$. Далее Эйлер рассуждал так: $\frac{2}{0}$, очевидно, является удвоенным $\frac{1}{0}$, т. е. бесконечно большое число можно удвоить, утроить и вообще увеличить в сколь угодно большое число раз. Правомерность своих рассуждений Эйлер подтверждает следующим образом: легко проверить, что $\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots$; тогда, полагая $a = 1$, получим $\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + \ldots$.

Ни утонченность рассуждений, ни авторитет Эйлера не усыпили логическую бдительность Маркса. Он не согласился с великим математиком: $\frac{2}{0}$ или другая дробь с нулем в знаменателе разлагается в ряд так же, как и $\frac{1}{0}$; действительно, $\frac{2}{2-2} = 1 + 1 + 1 + \ldots = \frac{1}{0}$, однако соответствующие ряды по-разному уходят в бесконечность. Так бесконечность вошла в жизнь Маркса, став его неизменным увлечением, математической страстью. В самые трудные минуты он обращался к ней, к связанным с ней образам. Одно из писем, адресованное младшей дочери Элеоноре, он начинает словами: „Возлюбленный мой мэтр $\pm \backsim \pm$!

Склоняюсь до земли перед Вашей безмерностью, какую бы роль Вы ни соблаговолили взять на себя — бесконечно малых или бесконечно больших величин" [7, с. 441].

А в письме старшей дочери Лауре он просит передать „наилучшие пожелания $\pm \backsim \mp$" [6, с. 439].

3. Фридрих Энгельс и математика


Herrn Eugen Dühring's

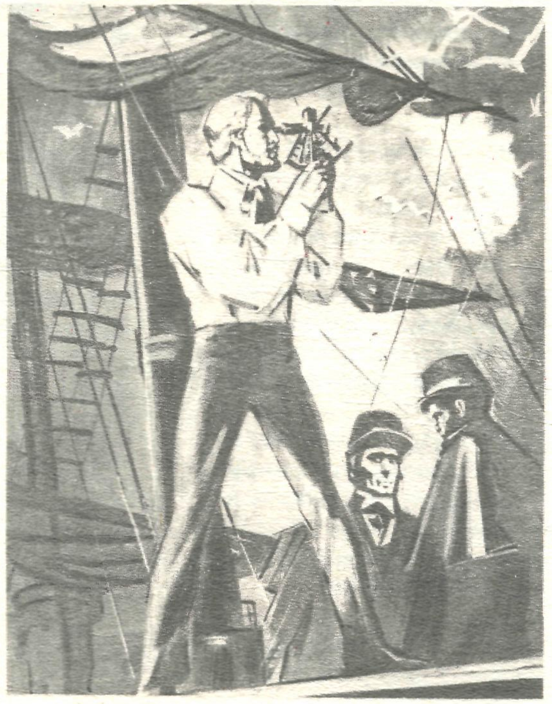
Umwälzung der Wissenschaft

Von

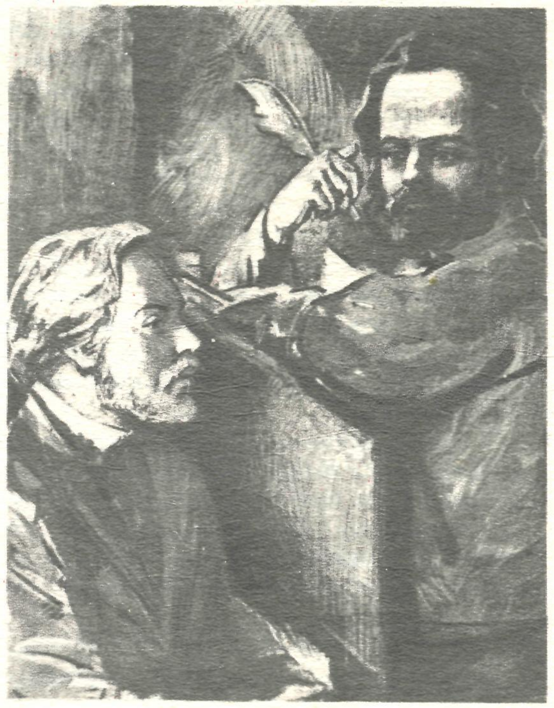
Friedrich Engels

Dritte, durchgesehene und vermehrte Auflage

Stuttgart
Verlag von J. H. W. Dietz
1894



На шхуне „Корниш Даймонд".

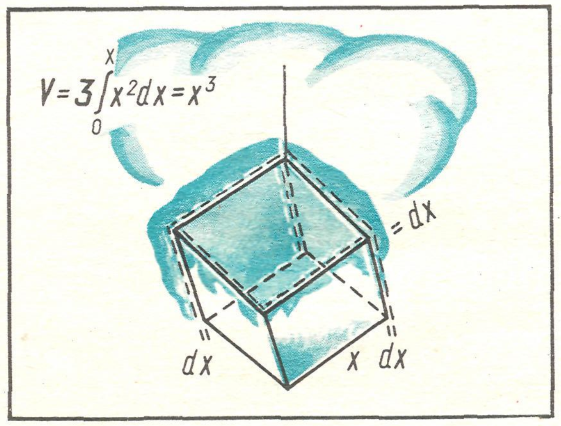


Совместный труд. Начало плодотворного сотрудничества двух великих ученых и революционеров, основоположников научного коммунизма.

Фридрих Энгельс (1820–1895) в своих трудах уделял много внимания истории и философии математики. С гениальной глубиной он вскрыл источники формирования, сложные механизмы, движущие силы и диалектику развития математических понятий и теорий как отражения в сознании людей определенных сторон, свойств, граней в явлениях различных форм движения материи. Ф. Энгельс дал классическое определение предмета и метода математики, которое и теперь является мощным оружием в борьбе против всяких попыток идеалистических извращений в освещении длительного и диалектически противоречивого пути исторического развития математики, отношения математики к реальной действительности.

Блестящие по форме и глубокие по содержанию высказывания Ф. Энгельса о математике, ее истории и виднейших представителях стали афоризмами и широко используются историками математики, педагогами, философами, популяризаторами науки. История и философские проблемы математики занимают видное место в трудах Ф. Энгельса „Анти-Дюринг" и „Диалектика природы", написанных с 1875 по 1883 г.

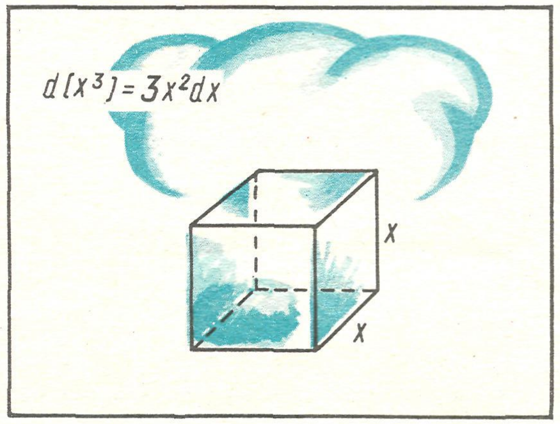
Ф. Энгельс нашел прекрасные по своей выразительности примеры объектов реальной действительности, ставшие прообразами математического бесконечного, и явлений, количественные закономерности которых описываются математическими операциями. Так, главные операции классической высшей математики — интегрирование и дифференцирование — моделируют количественные закономерности огромного количества фактов и событий, происходящих в живой и неживой природе.



Ф. Энгельс показал, что операция интегрирования

$$\int_0^x 3x^2\,dx = 3\int_0^x x^2\,dx = x^3$$

есть отображение количественной стороны оседания паров серы на трех из шести граней куба. Количественную сторону последовательного испарения шаров молекул описывает операция дифференцирования: $d(x^3) = 3x^2\,dx$.

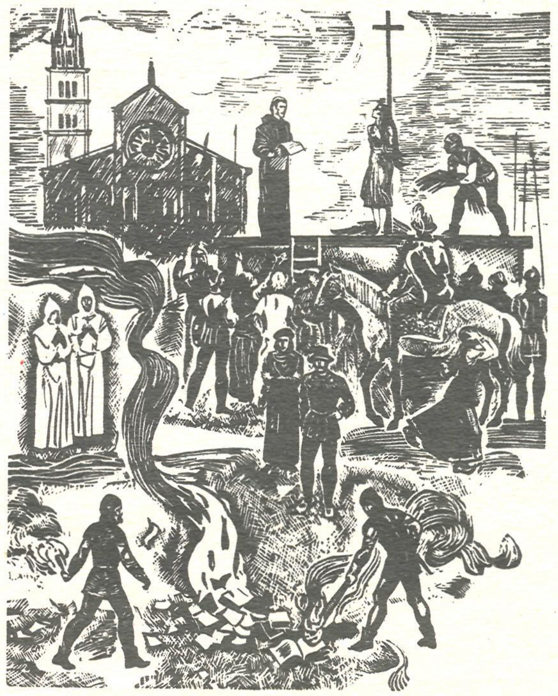


Титульная страница третьего издания книги Ф. Энгельса „Анти-Дюринг". Это классическое произведение, являющееся энциклопедией марксизма, содержит изложение трех основных частей марксизма — диалектического и исторического материализма, политической экономии и научного коммунизма.

В „Анти-Дюринге" Ф. Энгельс писал об огромном значении математики для диалектического и материалистического понимания природы. В нем дано классическое определение объекта математики и ее метода, уделено много внимания раскрытию природы многих сложных математических и естественнонаучных абстракций.

Огромен мир интересов Ф. Энгельса. Он с восторгом изучал многие языки, философию, литературу, историю, интересовался музыкой, театром, занимался разными видами спорта. Совершая морские путешествия, овладел навигацией, теоретическими основами для которой являются математика и астрономия. Во время одного из таких путешествий на шхуне „Корниш Даймонд" он писал 5 октября 1849 г. одному из вождей левого крыла чартистов Дж. Гарни: „Пишу, чтобы известить тебя, а через тебя и Маркса, что сегодня утром я прибыл в Геную, и если ветер и погода будет благоприятствовать, я завтра утром отплыву в Лондон на английской шхуне „Корниш Даймонд"... Мое путешествие продлится около 4 или 5 недель, так что к середине ноября я буду в Лондоне".

Дав разносторонний анализ выдающихся открытий в различных областях естествознания и, в частности, в математике, Ф. Энгельс показал, какой огромный вред нанесла и продолжает наносить религия социальному и научному прогрессу. Один из основоположников марксизма гневно заклеймил жестокость церковников, с которой они всегда воевали против лучших представителей общества.



3. Фридрих Энгельс и математика

Математика занимает видное место в теоретическом наследии друга и ближайшего соратника Карла Маркса, основоположника научного коммунизма, — Фридриха Энгельса. Наибольшее внимание математике он уделил в своих трудах „Анти-Дюринг" и „Диалектика природы". Непосредственное участие в создании „Анти-Дюринга" принимал и К. Маркс.

Ф. Энгельс очень четко определил цель своих занятий математикой и естественными науками: „Само собой разумеется, что при этом моем подытоживании достижений математики и естественных наук дело шло о том, чтобы и на частностях убедиться в той истине, которая в общем не вызывала у меня никаких сомнений, а именно, что в природе сквозь хаос бесчисленных изменений прокладывают себе путь те же диалектические законы движения, которые и в истории господствуют над кажущейся случайностью событий, — те самые законы, которые, проходя красной нитью и через историю развития человеческого мышления, постепенно доходят до сознания мыслящих людей" [10, с. 11].

И хотя со времени, когда Ф. Энгельс создавал свои труды, математика и математическое естествознание сделали огромный шаг вперед, его важнейшие выводы о природе математических знаний, о предмете, источниках и движущих силах развития математики и сегодня выполняют важную роль в борьбе с различными идеалистическими истолкованиями тех или иных положений математической науки, в решении ее философских проблем.

Опровергая априоризм Дюринга, Энгельс дал чёткую и полную характеристику сложного, диалектически противоречивого процесса формирования математических понятий, их развития и применения к изучению законов породившего их окружающего мира. В „Анти-Дюринге" Энгельс писал: „Но совершенно неверно, будто в чистой математике разум имеет дело только с продуктами своего собственного творчества и воображения. Понятия числа и фигуры взяты не откуда-нибудь, а только из действительного мира. Десять пальцев, на которых люди учились считать, т. е. производить первую арифметическую операцию, представляют собой все, что угодно, только не продукт свободного творчества разума. Чтобы считать, надо иметь не только предметы, подлежащие счету, но обладать уже и способностью отвлекаться при рассматривании этих предметов от всех прочих их свойств кроме числа, а эта способность есть результат долгого, опирающегося на опыт, исторического развития. Как понятие числа, так и понятие фигуры заимствованы исключительно из внешнего мира, а не возникли в голове из чистого мышления" [10, с. 37].

В одном из писем к Энгельсу Маркс изложил сущность дифференциального исчисления [9, с. 250—254]. Возможно, именно „математические послания" Маркса вдохновили Энгельса на поиски и помогли ему обнаружить в окружающем мире чрезвычайно выразительные прообразы математического бесконечного, в частности найти наглядное объяснение того факта, что $d(x^3) = 3x^2dx$. В заметках к „Диалектике природы" [11, с. 583—584] Энгельс рассматривает операцию дифференцирования $d(x^3) = 3x^2dx$ как отображение с помощью математических методов количественной стороны процесса оседания молекул серных паров на трех из шести граней куба, изготовленного из серы, при условии, что на каждой грани куба оседает в данный момент слой в одну молекулу, а длина грани куба равна x. Тогда слой молекул, которые осели, обусловливает приращение длины грани куба на бесконечно малую величину dx. Так как объем куба x^3, то приращение его массы в результате оседания молекул будет равно $3x^2dx$.

Испарение в стакане воды верхнего ее слоя x влечет за собой уменьшение высоты всего слоя воды на бесконечно малую величину dx. Дальнейшее испарение одного за другим слоев молекул воды описывается дифференцированием, охлаждение паров воды и оседание одного за другим слоев молекул воды — интегрированием. Испарение и охлаждение принципиально отличаются от соответствующих им математических операций: эти явления происходят неосознанно в природе, а дифференцирование и интегрирование, отражая количественную сторону указанных и бесчисленного множества других процессов реального мира, сознательно моделируются человеческим мозгом.

На конкретных примерах, связанных с различными отраслями науки, Ф. Энгельс показал, что даже такие абстрактные понятия, как бесконечно малые и бесконечно большие различных порядков, являются лишь количественной характеристикой отношений реальных объектов.

Трактовку основных операций и понятий высшей математики Ф. Энгельс подчинил раскрытию основной идеи своей книги. Он считал, что мир вне нас (окружающий нас) и мир в нас (человеческое мышление) тесно связаны между собой. „Над всем нашим теоретическим мышлением господствует с абсолютной силой тот факт, что наше субъективное мышление и объективный мир подчинены одним и тем же законам и что поэтому они и не могут противоречить друг другу в своих результатах, а должны согласоваться между собой" [11, с. 581].

4. Владимир Ильич Ленин и математика

Семья Ульяновых.

Гений Владимира Ильича Ленина (1870–1924) охватывает огромнейший комплекс научных знаний. В. И. Ленин создавал свои труды на прочном фундаменте достижений передовой науки, на обобщении опыта революционной борьбы трудящихся.

Еще с детства формировались математические интересы В. И. Ленина. Он составлял занимательные задачи для рукописного семейного журнала, предлагая их друзьям и близким. Обучаясь в гимназии, Володя Ульянов помогал товарищам решать сложные задачи, организовал и был руководителем математического кружка по решению задач повышенной сложности.

Избрав путь революционной борьбы за освобождение трудящихся от национального, экономического и политического гнета, Владимир Ильич никогда не порывал с математикой как инструментом анализа экономических и политических явлений общественной жизни. Он проделал огромную работу, чтобы, основываясь на анализе статистических данных, сделать выводы о направлениях и характере социального движения общества, о выработке стратегической линии революционного преобразования его. Философские труды В. И. Ленина имеют большое значение при решении сложных методологических вопросов об источниках возникновения и особенностях развития математики, ее роли в познавательном процессе.

Полтора года гимназист Владимир Ульянов обучал математике чуваша Никифора Охотникова, и тот в 1887 г., экстерном сдав экзамены за курс гимназии, поступил в Казанский университет на физико-математический факультет.

Из задач, предложенных Володей Ульяновым двоюродному брату Николаю Веретенникову:

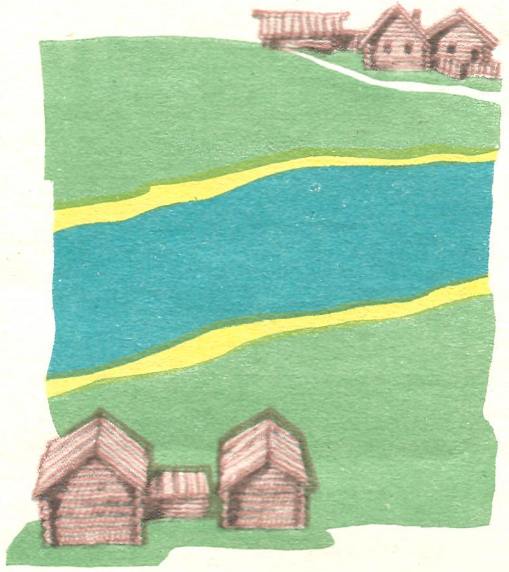
1) Между двумя селами протекает река с параллельными берегами. Где необходимо построить мост, чтобы дорога была кратчайшей?

2) $65^2 = 6 \cdot 7 \cdot 100 + 25$;

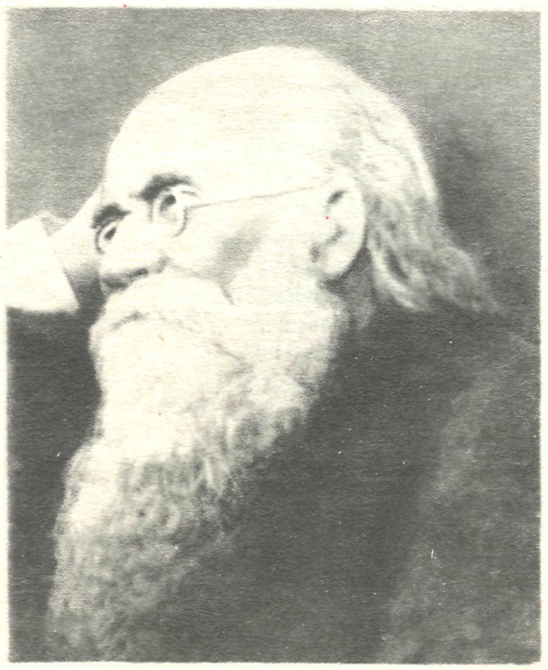
$105^2 = 10 \cdot 11 \cdot 100 + 25$.

Вывести и доказать всеобщность этого правила.

Известный общественный деятель чувашского народа И. Я. Яковлев (1848–1930), семья которого была близка к семье Ульяновых, писал в своих воспоминаниях о математической одаренности Владимира Ильича: ,,Сын его (Ильи Николаевича. — *Сост.*) унаследовал от него, между прочим, и математические способности''.



В. И. Обреимов (1843–1910) — прогрессивный русский педагог-математик. За революционную деятельность подвергался преследованиям царизма, был пожизненно сослан в Вятскую губернию. В июле 1878 г. Обреимову удалось выехать в Швейцарию. Опубликовал ряд работ. Одной из них — ,,Математические софизмы'' — интересовались в семье Ульяновых.



Приват-доцент Казанского университета Г. Н. Шебуев (1850–1900) обратил внимание на математические способности Владимира Ильича и настоятельно рекомендовал ему поступить в Казанский университет на физико-математический факультет, где он читал ряд математических курсов.

4, 5. Владимир Ильич Ленин и математика

С детских лет Владимира Ильича окружали люди, любившие и знавшие математику. Илья Николаевич Ульянов — видный педагог и деятель народного образования — блестяще закончил физико-математический факультет Казанского университета. Будучи студентом, по поручению Н. И. Лобачевского проводил метеорологические наблюдения в университетской обсерватории. В 1854 г. Илья Николаевич успешно защитил диссертацию, получив ученую степень кандидата физико-математических наук. Мария Александровна, мать Владимира Ильича, экстерном сдала экзамены на звание народной учительницы. Брат его Александр и сестра Анна с увлечением занимались математикой, двоюродный брат Н. П. Веретенников впоследствии преподавал математику и физику. Близким другом семьи был общественный деятель чувашского народа, преподаватель математики, логики и педагогики И. Я. Яковлев.

Илья Николаевич, прекрасно зная, как полезны занятия математикой для укрепления воли, формирования и развития умственных способностей, систематически воспитывал любовь к ней у своих детей. В семье Ульяновых наряду с другими развлечениями огромным успехом пользовались сидячие игры. Их участникам предлагались загадки, ребусы, интересные задачи, упражнения на разные способы устного счета. Дети создавали даже рукописные сборники задач, составленных во время занятий и игр. Занимательные задачи для таких сборников придумывал и Володя Ульянов.

Большое влияние на Володю Ульянова оказывал его старший брат Александр — человек высоких моральных качеств. Будучи студентом Петербургского университета, он высылал домой новинки литературы. Например, в одном из писем к матери Александр Ильич писал о том, что высылает отцу брошюру „Математические софизмы", которую тот хотел иметь, и что Володе она также будет очень полезной, если он начнет самостоятельно разбирать софизмы. В другом письме Александр сообщил о том, что выслал Володе свои логарифмические таблицы.

Математика для Владимира Ильича была „гимнастикой ума" и позднее, когда он стал гимназистом. Во время каникул Илья Николаевич организовывал соревнования на сообразительность, умело переключал внимание и интересы детей на математические задачи. Такие соревнования пользовались большим успехом, и Володя сам стал проводить их, предлагая собственные интересные задачи.

В старших классах гимназии Володя прочитал в оригинале труды историков французской буржуазной революции конца XVIII в. и немецких экономистов. Весной 1884 г. в Симбирске начала действовать нелегальная библиотека гимназистов. Имеются сведения о том, что в этой библиотеке Ленин брал для чтения первый том „Капитала" К. Маркса. Таким образом, очень рано Ленин ознакомился с использованием статистики, а значит, и математики для анализа социально-экономических явлений действительности.

Когда Володя обучался в старших классах гимназии, на долю семьи Ульяновых выпали тяжкие испытания. 24 февраля 1886 г. умер Илья Николаевич. 20 мая 1887 г. за участие в покушении на царя был казнен Александр. В этот день Владимир Ильич сдавал экзамен на аттестат зрелости по арифметике и алгебре. Необходима была величайшая сила воли, чтобы в эти трагические дни оказывать помощь одноклассникам по математике и самому успешно сдавать экзамены.

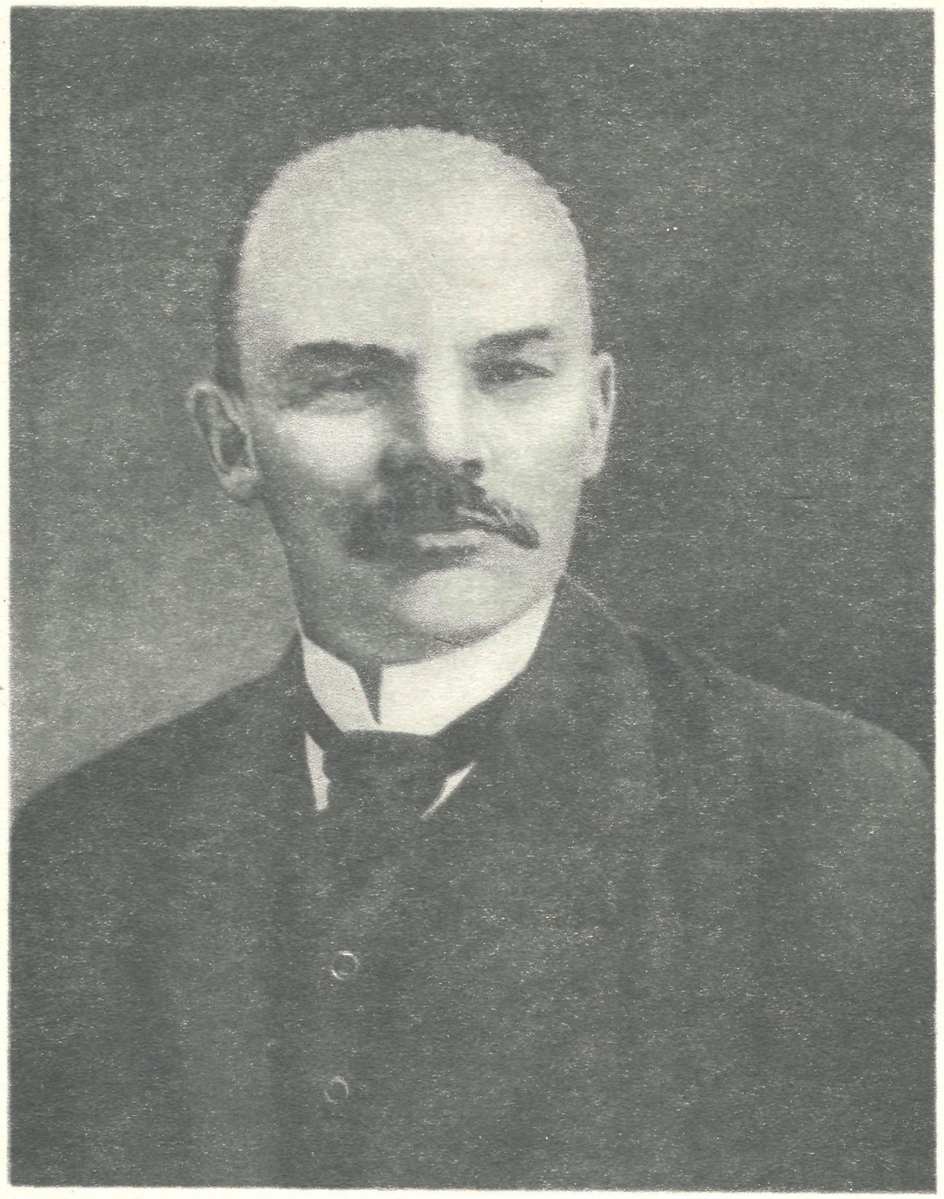
Избрав путь революционного преобразования мира, В. И. Ленин уделял главное внимание политическим и философским наукам. Но с математикой как инструментом познания реального мира он не порывал никогда. И это закономерно. Вот как писала Н. К. Крупская о месте математики в социальных науках: „Возьмем математику. Чтобы действительно знать предмет, надо охватить, изучить все его стороны, все связи и „опосредствования" — таково первое требование дидактического подхода к изучению предмета. Математик должен знать основные отрасли математики, понимать, как они связаны между собой, как одна отрасль дополняет другую. Но этого мало. Необходимо знать те проблемы, которые она разрешает. А если так подойти к изучению математики, то надо отдать себе отчет, какую роль играет математика в изучении явлений и сил природы, какую роль она играет в развитии техники и пр. С другой стороны, необходимо осознать, как толкает вперед развитие математической науки развитие техники, промышленности, планирование хозяйства. Наобходимо, чтобы были перекинуты прочные мосты между математикой и астрономией, физической географией, физикой, химией, обществоведением. Без понимания наличия связующих нитей между математикой и обществоведением непонятно, почему, например, Маркс и Энгельс так много занимались математикой. Что это было с их стороны — причуда или глубокое понимание роли математики в общественных науках" [39, с. 616–617].

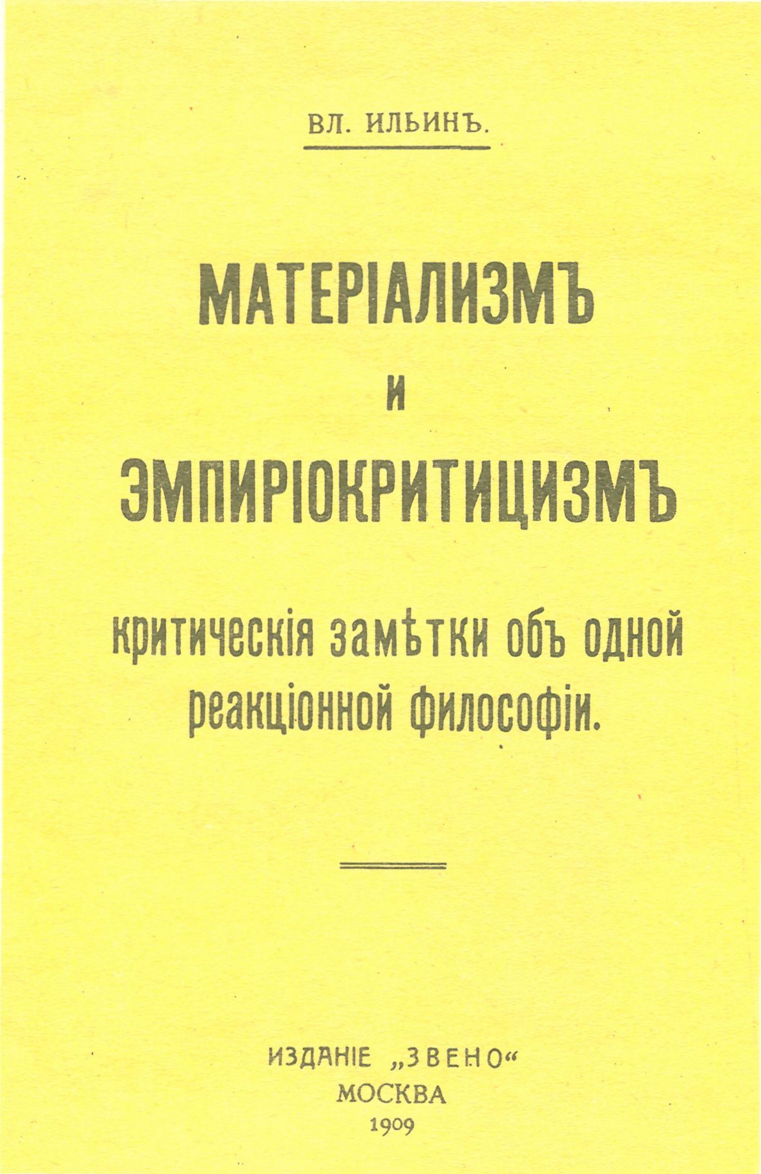
Вот почему математика заняла такое важное место в научном творчестве В. И. Ленина. В многочисленных его трудах, от первого — „Новые хозяйственные движения в сельской жизни" (весна 1893 г.) до одного из последних — „Страницы дневника" (2 января 1923 г.), содержатся важнейшие теоретические выводы и обобщения, сделанные на основе глубокого социального и математического анализа статистических данных. Для получения этих результатов Владимир Ильич выполнил огромную вычислительную работу, провел многочисленные расчеты, лично все проверил, проанализировал.

Вот почему труды Ленина поражают точностью фактов, характеристик, расчетных данных, статистических таблиц, сводок, графиков. Убедительным языком фактов и чисел В. И. Ленин говорил не только со специалистами, но и с широкими массами трудящихся.

Философские труды Владимира Ильича, прежде всего „Материализм и эмпириокритицизм", „Философские тетради", и сегодня помогают ученым решать сложные философские проблемы математики, защищать ее от посягательств идеалистов.

5. Владимир Ильич Ленин и математика



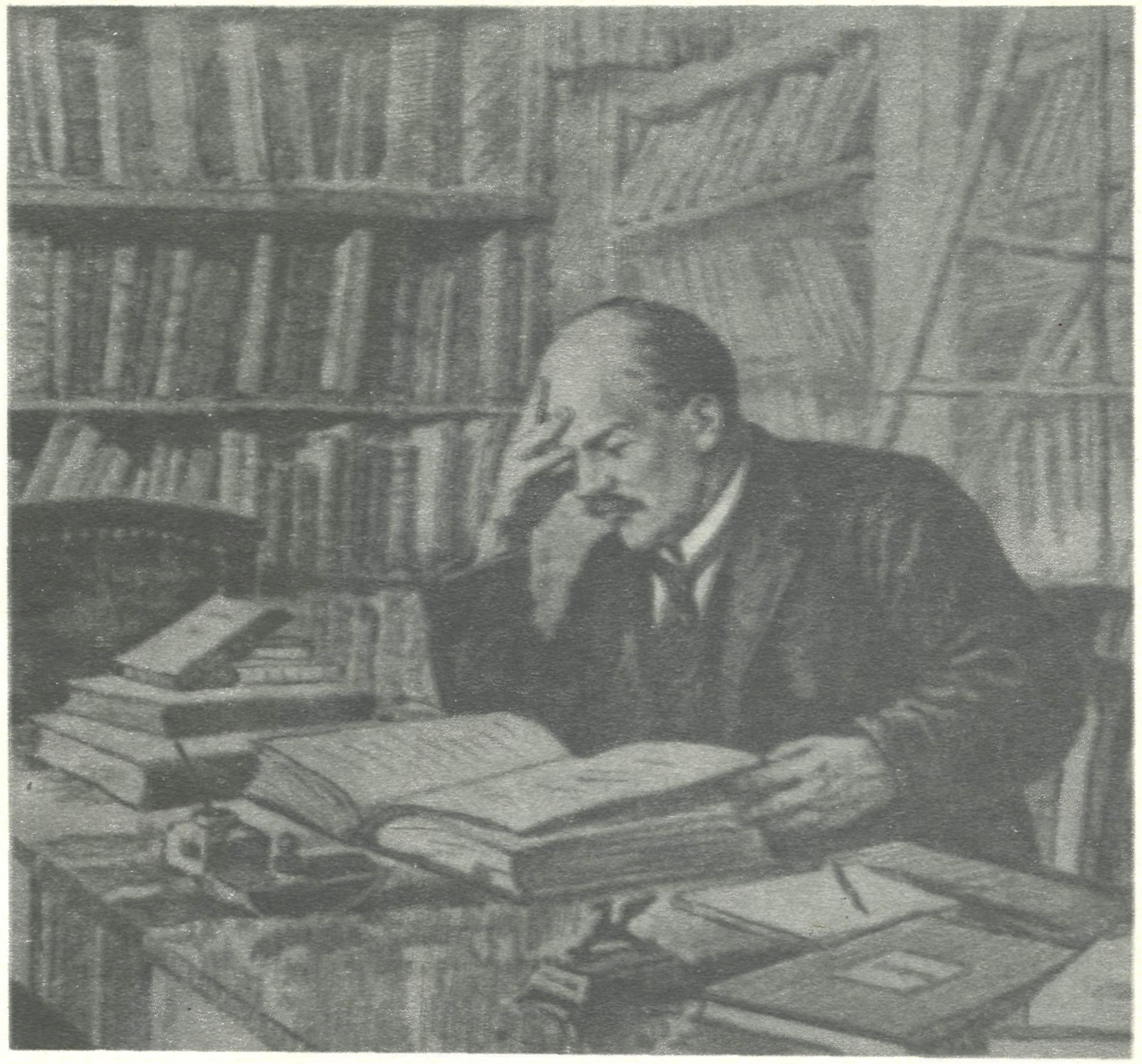


ВЛ. ИЛЬИНЪ.

МАТЕРІАЛИЗМЪ
и
ЭМПИРІОКРИТИЦИЗМЪ

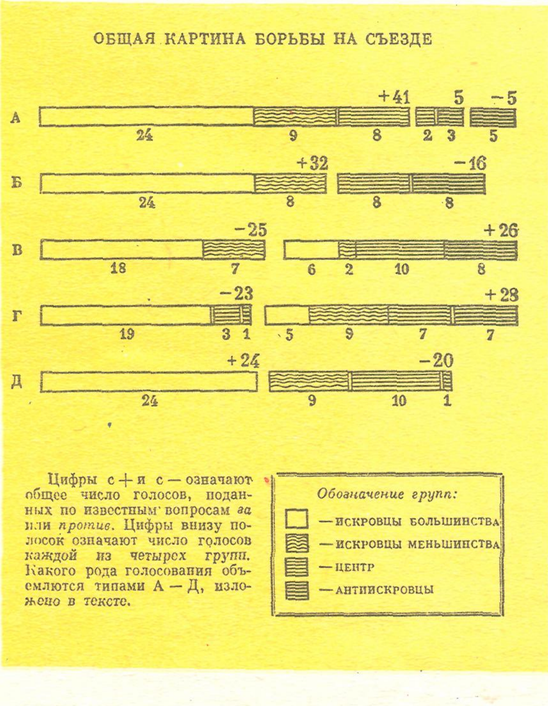
критическія замѣтки объ одной реакціонной философіи.

ИЗДАНІЕ „ЗВЕНО"
МОСКВА
1909



В. И. Ленин, начиная со своего произведения „Новые хозяйственные движения в крестьянской жизни" (весна 1893 г.), более чем в 200 работах дал непревзойденные образцы применения экономической и политической статистики при изучении закономерностей развития различных сторон общественной жизни. При этом Владимир Ильич выполнил огромную вычислительную и графическую работу, на основании которой сделал важные теоретические выводы и обобщения.

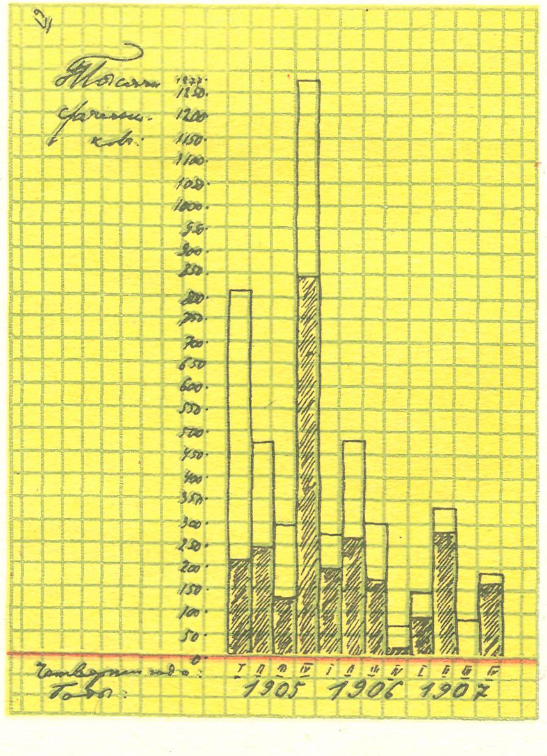
Практическая деятельность В. И. Ленина, его философские труды, прежде всего гениальные произведения „Материализм и эмпириокритицизм" и „Философские тетради", имели огромное влияние на становление и прогресс советской математики. Разрабатывая в книге „Материализм и эмпириокритицизм" теорию познания, В. И. Ленин дал глубокий философский анализ идеалистических течений в современном ему естествознании и прежде всего в физике. Ленинские выводы полностью относятся и к математике. Они оказали большое влияние на постановку и успешное решение советскими учеными ряда важнейших математических проблем и всегда будут идейным оружием в борьбе советских ученых против идеалистических течений в математике.



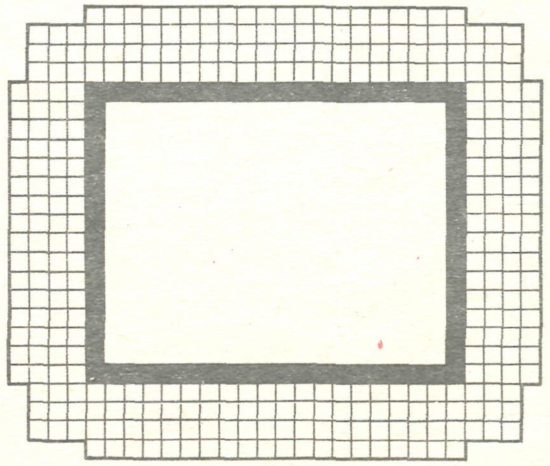
После Великой Октябрьской социалистической революции В. И. Ленин проделал огромную работу по восстановлению научных учреждений страны, созданию новых научных центров, привлечению к сотрудничеству с Советской властью ученых старшего поколения.

Графический метод В. И. Ленин применял в работе „Шаг вперед, два шага назад", исследуя картину идейной борьбы различных течений и оттенков социал-демократии на II съезде РСДРП.

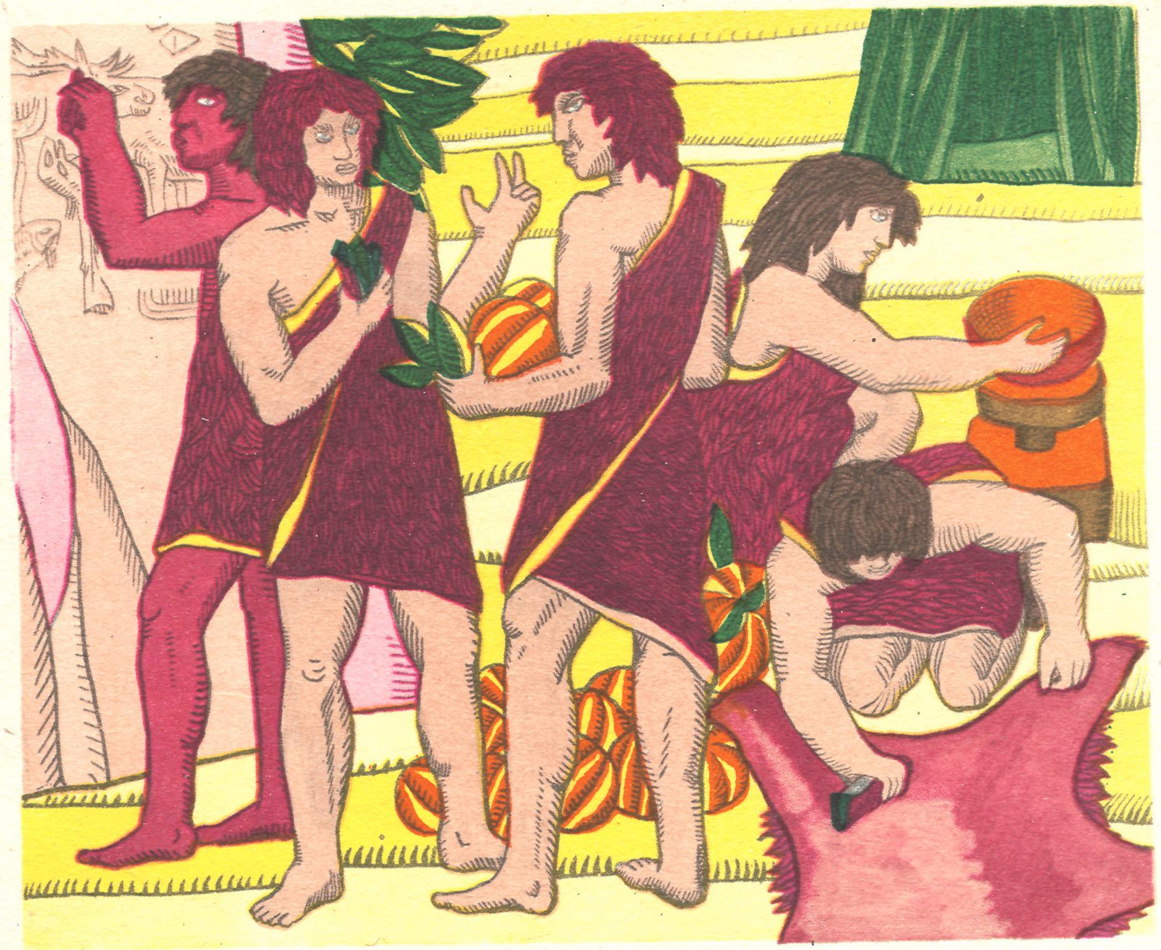
Исследуя динамику забастовок за 1905—1907 гг., В. И. Ленин построил диаграмму соотношения участников политических (заштрихованная часть) и экономических (незаштрихованная) забастовок за каждый квартал года.



В рассчитанной на массового читателя статье „Большое помещичье и мелкое крестьянское землевладение в России" В. И. Ленин с помощью такого графика сделал наглядной пропасть между большими помещичьими владениями и ничтожными крестьянскими наделами. Одно помещичье владение (большой белый квадрат) равновелико 324 крестьянским наделам (малые квадратики вокруг).



6. Так начиналась математика



Математика — одна из древнейших наук. Первый период ее развития — формирование основных математических понятий — начался в глубокой древности. Без овладения знаниями о простейших количественных отношениях и пространственных формах человек не смог бы решать даже простейшие задачи, которые возникали в его практической деятельности.

В сложном процессе взаимодействия практической деятельности и обобщения ее результатов осваивались все более сложные пространственные, количественные и временные соотношения. Абстрагируясь от конкретных черт каждой из выполняемых операций, люди вырабатывали простейшие представления о форме, о мере, а в эпоху шелля (60 тыс. лет назад) подошли к представлению о числе.

Разнообразные общественные потребности, обусловливающие действия с конечными множествами предметов, приводили не только к суммированию единиц, но и к разделению целого на части, не только к распределению частей формы по принципу симметрии в пространстве, но и к элементам симметрии во времени, т. е. формировали представление о периодичности явлений. Понятие фигуры непосредственно формировалось в процессе практического освоения действительности. Линии режущих концов орудий и их симметричные формы, линии нарезок и их параллельность, формы, близкие к треугольнику, трапеции, кругу, цилиндру, конусу и т. д. — все эти свойства лишь в процессе длительного их использования многими поколениями людей были отвлечены от соответствующих материальных носителей и получили право рассматриваться как признаки некоторых геометрических фигур. Например, простейший геометрический орнамент первобытных племен представляет собой условное изображение животных или подражание некоторым трудовым и техническим процессам.

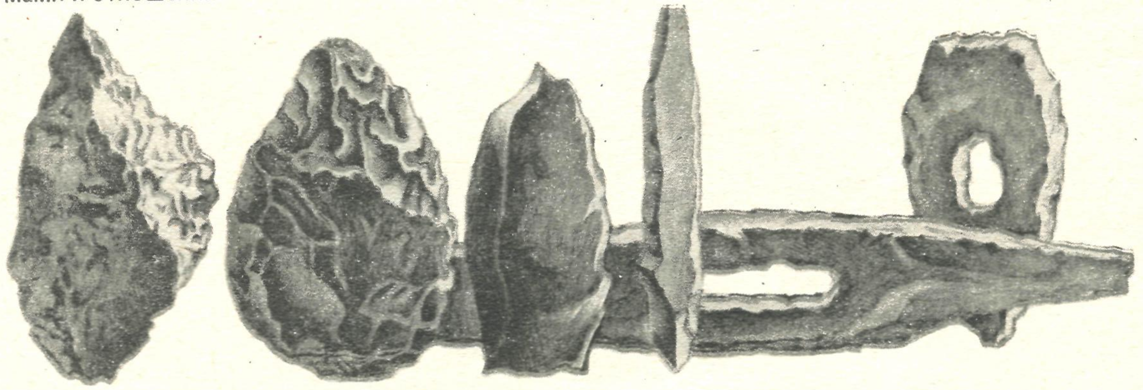
Понятие числа формировалось прежде всего в процессе определения количества добытой дичи, выловленных рыб, собранных съедобных плодов, количества воинов в племени, расстояния до мест охоты, рыбной ловли, соседних дружественных или вражеских племен. Числа были необходимы для решения буквально каждой задачи, с которой древний человек сталкивался в своей практической деятельности.

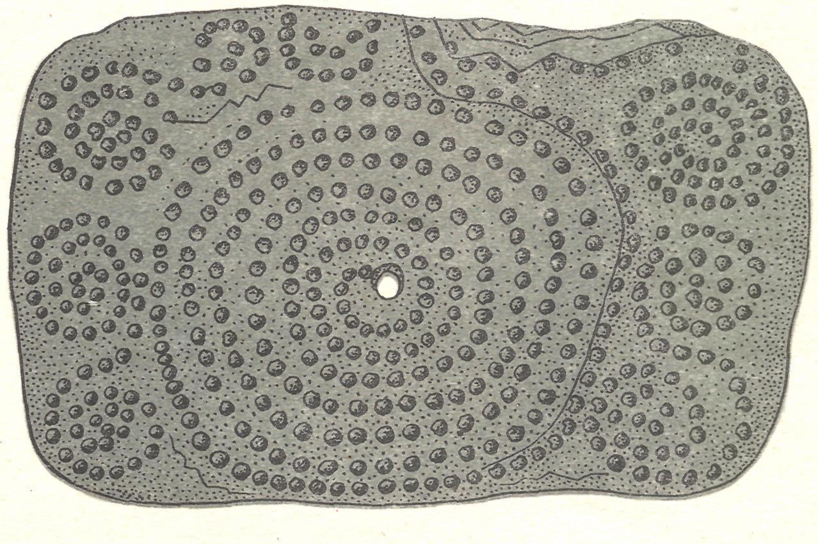
...Люди никоим образом не начинают с того, что «стоят в этом теоретическом отношении к предметам внешнего мира». ...Они начинают с того, чтобы есть, пить и т. д., т. е. не «стоять» в каком-нибудь отношении, а активно действовать, овладевать при помощи действия известными предметами внешнего мира и таким образом удовлетворять свои потребности. (Начинают они, таким образом, с производства.)

К. Маркс

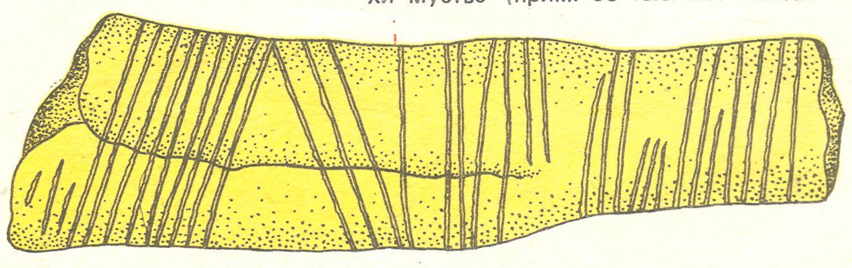
Генезис дошедших до нас каменных орудий — куски гальки, зазубренные несколькими ударами по одному концу и полученные от удара отщепы. Шелльские рубила и, наконец, каменные наконечники и топоры — все это этапы овладения человеком окружающей действительностью, ее пространственными формами и отношениями.

Симметричные формы рубил — свидетельство устойчивых навыков эстетического освоения действительности. Не случайно красота связывалась со свойством симметрии. Симметрия, рационализирующая выполнение производственных функций, обеспечивала ритмичность процесса изготовления и отделки самого орудия.

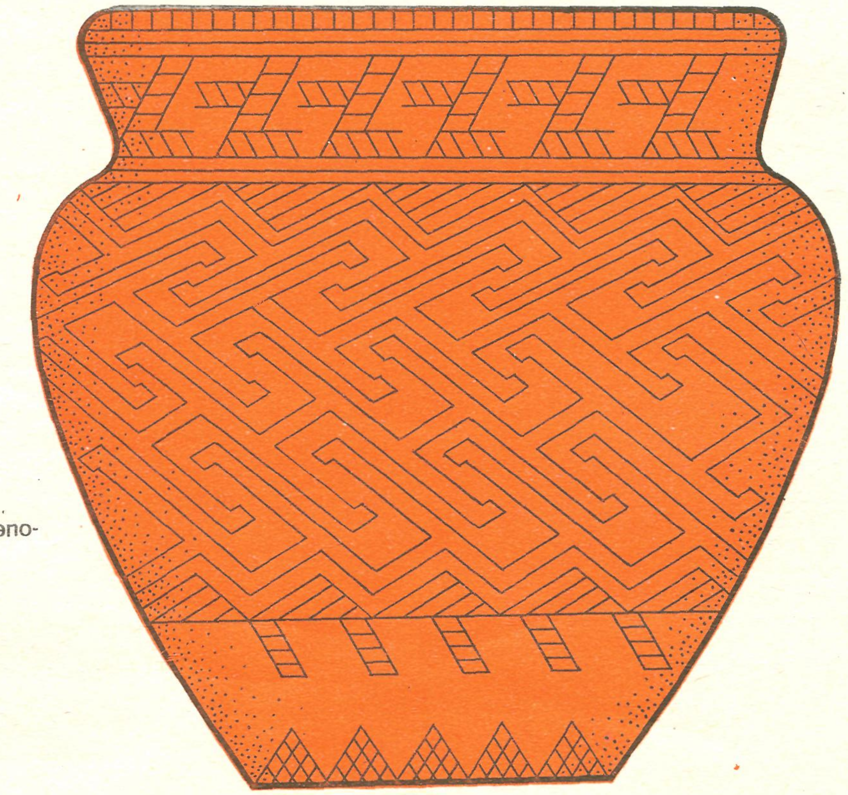




Пряжка с отверстием, найденная на Мальтийской стоянке (левый берег р. Белой — притоки Ангары). Большая спираль состоит из семи витков. Число ямок от первого до седьмого витка соответственно равно: 14; 21; 26; 33; 40; 47; 63 — всего 243 ямки. Слева и справа от центральной спирали по 122 ямки, а вместе 122 + 122 = 244.



Кусок кости из Ла Ферраси (Франция) эпохи мустье (прим. 50 тыс. лет назад).



Глиняный сосуд из Еловского могильника со степным орнаментом (Томская область, бронзовый век).

Широкий сплошной браслет из бивня мамонта с орнаментированной поверхностью. В центральном участке 268 линий, в левом конце 107, в правом 91. Всего на трех участках меандров 268 + 198 = 466 линий. В сумме с 98 линиями зигзагов на браслете изображены 564 линии (реконструкция браслета могла изменить первоначальное число линий на одну—три единицы).

6—8. Так начиналась математика

Математика — древнейшая наука. Первичные ее понятия формировались еще во времена палеолита. В истории создания и развития математических понятий особенно велика роль творческой деятельности мыслящего существа. Выделившись из окружающей среды, оно покинуло пределы биологической эволюции и „прибрало к рукам" процесс приспособления, создало для себя новую информацию, не биологическую, а такую, которая соответствовала бы уровню его социального существования, неуклонному улучшению условий жизни. Математика сыграла важную роль в том, что биологическое было дополнено и стало вытесняться социальным.

Практическая деятельность человека была той почвой, на которой возводилось все грандиозное сооружение математических знаний. Это с предельной четкостью обосновал Ф. Энгельс.

Сознание человека не просто отражало природу, а определенным образом формировало объект познания. Поэтому и математические понятия возникали не как результат пассивного зеркального отражения действительности, а как продукт своеобразного ее „очеловечивания" субъективными средствами, как еще одно звено в цепи единства природы и человека.

Трудно назвать вид работ, при выполнении которых человек мог бы обойтись без применения элементарных математических понятий и представлений, без учета простейших количественных закономерностей и пространственных форм предметов окружающей действительности.

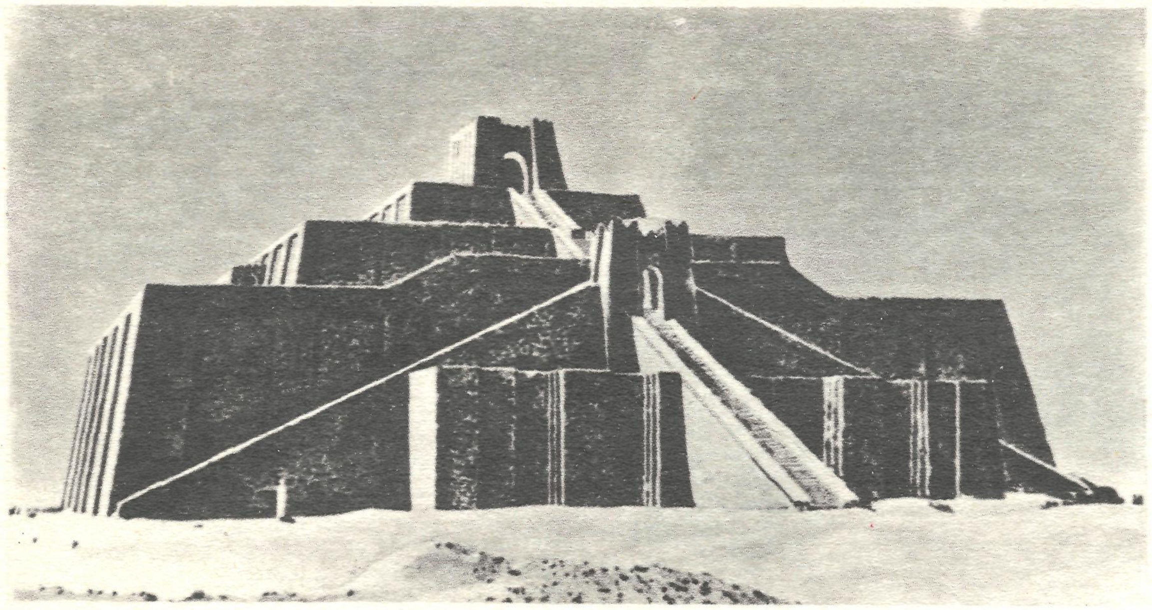
Положения диалектического материализма о сущности и движущих силах развития математики подтверждаются и дошедшими до нас математическими текстами двух древнейших цивилизаций — Шумеро-Вавилонии и Египта.

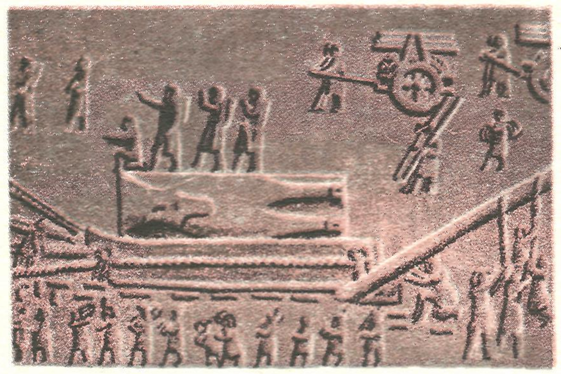
Результаты, полученные шумеро-вавилонянами, поражают масштабностью. Среди них имеются выдающиеся открытия. Вавилоняне первыми открыли нумерацию, основанную на позиционном принципе, а позднее — на использовании нуля. В древневавилонской математике впервые была разработана алгебра линейных и квадратных уравнений, рассматривались отдельные уравнения высших степеней. Выдающимися открытиями древневавилонской математики были теорема Пифагора и учение о правильных многоугольниках. Были поставлены и решены первые теоретико-числовые задачи.

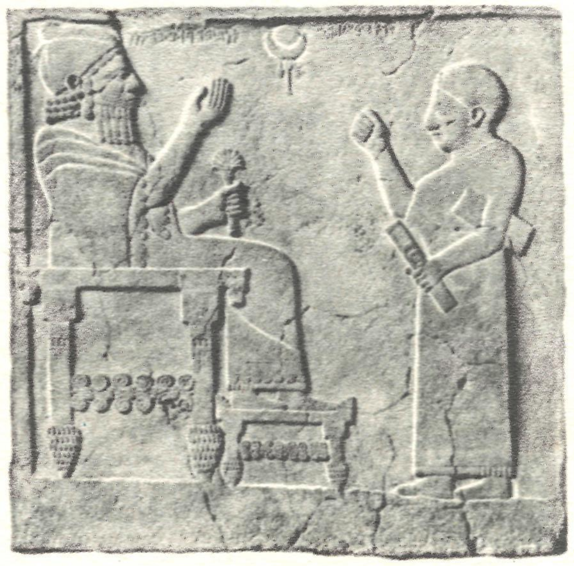
Вавилонская математика оказала большое влияние на дальнейшее развитие математики. Древние греки начинали с решения тех же проблем, над которыми работали вавилоняне. Это — свойства прямоугольных треугольников и правильных многоугольников, теорема Пифагора и пифагоровы числа, задачи на квадратные уравнения и прогрессии.

Достигнув выдающихся результатов в решении практических задач и обобщении эмпирических данных, ни вавилоняне, ни египтяне не смогли создать научной теории. Они еще терялись перед сложнейшей загадкой природы вещей. Однако человеческая мысль в процессе исторического развития не могла быть остановлена никакими преградами.

7. Так начиналась математика

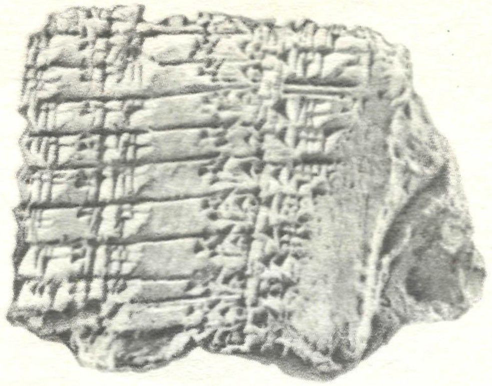






Шумеро-вавилонская математика развивалась из потребностей практической деятельности людей. Сооружение крепостей и храмов, прокладка оросительных каналов и дорог требовали умения решать сложные математические задачи, сводящиеся к уравнениям и системам уравнений первой степени, квадратным и более высоких степеней, умения суммировать члены арифметических и геометрических прогрессий, выполнять процентные вычисления, пропорциональное деление. Выдающимися достижениями их явились: создание позиционной нумерации, в частности изобретение нуля, разработка алгебры линейных и квадратных уравнений, открытие теоремы Пифагора и начал учения о правильных многоугольниках.

Однако в шумеро-вавилонской математике внутренние связи между многочисленными правилами были еще слабыми, цепочки умозаключений не составляли целостной системы, характер изложения был догматичным и отображал авторитарный образ мышления. Сами математические понятия не стали объектом исследования, следовательно, математика как теоретическая отрасль знаний еще не была создана.



Большинство математических текстов — клинописные таблички — относятся к 1800—1600 гг. (эпоха Хаммурапи), остальные — к II—I вв. до н. э. (эпоха Селевкидов). Почти все они написаны на аккадском языке. Большая часть их — это ученические пособия или же упражнения придворных чиновников.

Характерной чертой шумеро-вавилонской математики явилось создание многочисленных

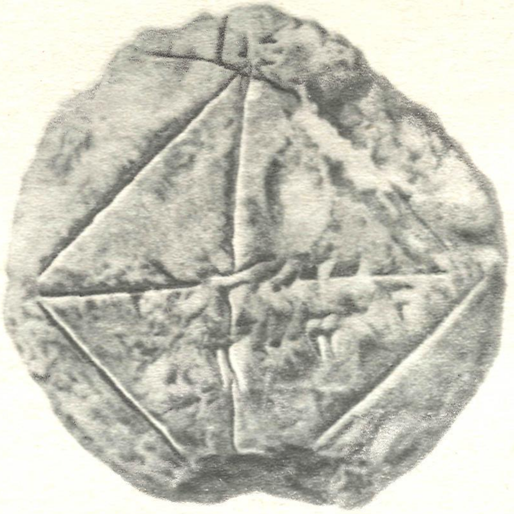
	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36
7	7	14	21	28	35	42

числовых таблиц. Шестидесятеричная система счисления усложняла вычислительные алгоритмы. В самом деле, таблица умножения в этой системе исчисления содержит 1770 частных произведений, в том числе и достаточно больших, трудно запоминаемых.

Чтобы выйти из такого сложного положения, при выполнении вычислений широко применяли разнообразные числовые таблицы. В одной таблице (III в. до н. э.) вычислены значения чисел вида $1 : (125 \cdot 2^n)$ для $n = 1, 2, 3, \ldots, 29$. При $n = 29$ числу 1, 26, 18, 9, 11, 6, 40 $(1 \cdot 60^6 + 26 \cdot 60^5 + 18 \cdot 60^4 + 9 \cdot 60^3 + 11 \cdot 60^2 + 6 \cdot 60 + 40 \cdot 60^0)$ соответствует обратное значение

0; 0, 0, 0, 0, 0, 0, 41, 42, 49, 22, 21, 12, 39, 22, 30.

Очевидно, что получение этого результата не было обусловлено практическими потребностями. Уже тогда вычислителей влекла романтика только не десятичных, а шестидесятеричных знаков. А то, что все они вычислены верно (последний из них $30 \cdot 60^{-15}$), свидетельствует о высокой вычислительной культуре исполнителя.



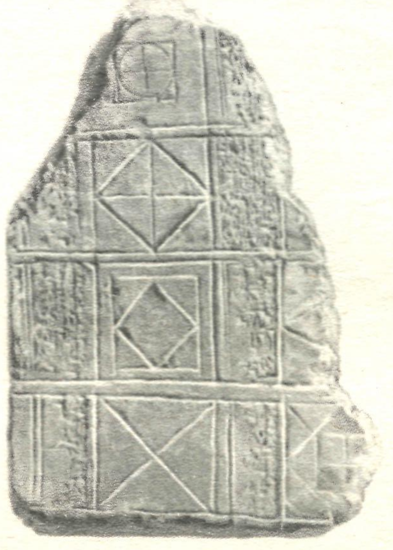
Древневавилонская табличка (ок. 1750 г. до н. э.). На ней нарисован квадрат с двумя диагоналями. Числа записаны в шестидесятеричной системе. Над верхней левой стороной — число 30, это длина стороны. На диагонали записано число, выражающее отношение длины диагонали к стороне квадрата, т. е.

$\sqrt{2} = 1;\ 24, 51, 10 = 1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3$.

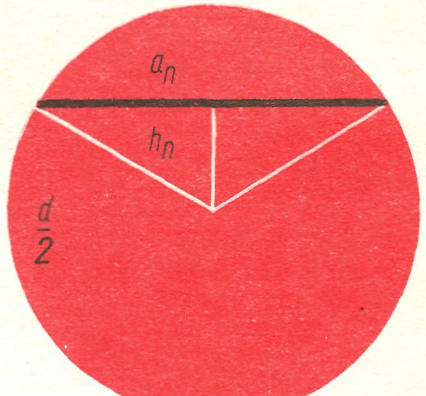
Точность поразительна:

$(1;\ 24, 51, 10)^2 = 1;\ 59, 59, 59, 38, 1, 40$.

Над диагональю записана ее длина 42; 25, 35 (это означает $30 \cdot \sqrt{2} = 42;\ 25, 35$).



При вычислении элементов правильных многоугольников несомненно была использована теорема Пифагора. Шумеро-вавилонские математики умели вычислять приближенные значения сторон правильных пяти-, шести- и



семиугольников. При вычислении площади шестиугольника нужно было вычислять $\sqrt{3}$, а площади семиугольника $\sqrt{10}$. Зная S_5, S_6, S_7 при длине стороны, равной единице длины, вавилоняне могли найти площадь одноименных правильных многоугольников при любом другом числовом значении стороны a_n, для этого требуется только вычислить произведение $S_n \cdot a^2_n$. Есть все основания полагать, что они могли это делать, по-видимому, им были известны некоторые свойства подобных фигур.

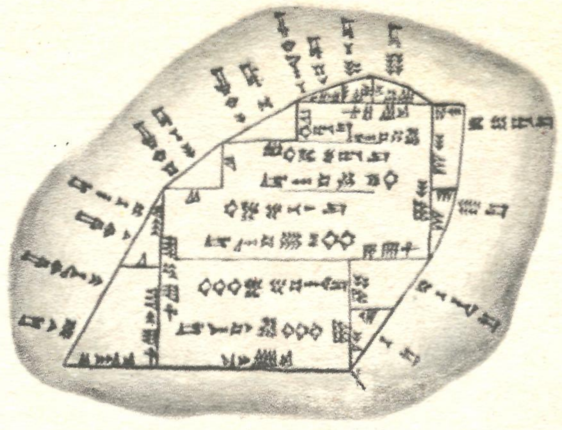
Если принять сторону правильного многоугольника равной a_n, то его площадь S_n могла быть вычислена на основании таких зависимостей:

$$S_n = \frac{n \cdot a_n \cdot h_n}{2} = \frac{n \cdot a_n \cdot \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}}{2}.$$

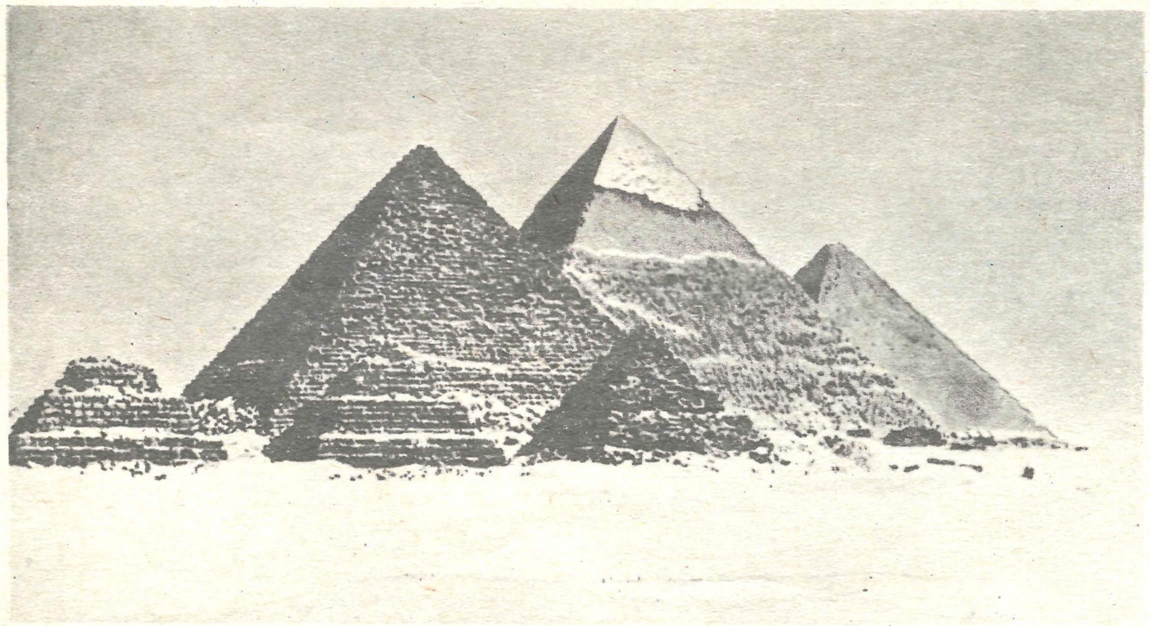
Приняв, что $a_n \approx \frac{c}{n}$ (где c — длина дуги, стягиваемая a_n), найдем $c = n\,a_n$ и $d = \frac{1}{3}c = \frac{n a_n}{3}$. При $n = 1$ получим $S_n = \frac{1}{12} n \sqrt{n^2 - 9}$.

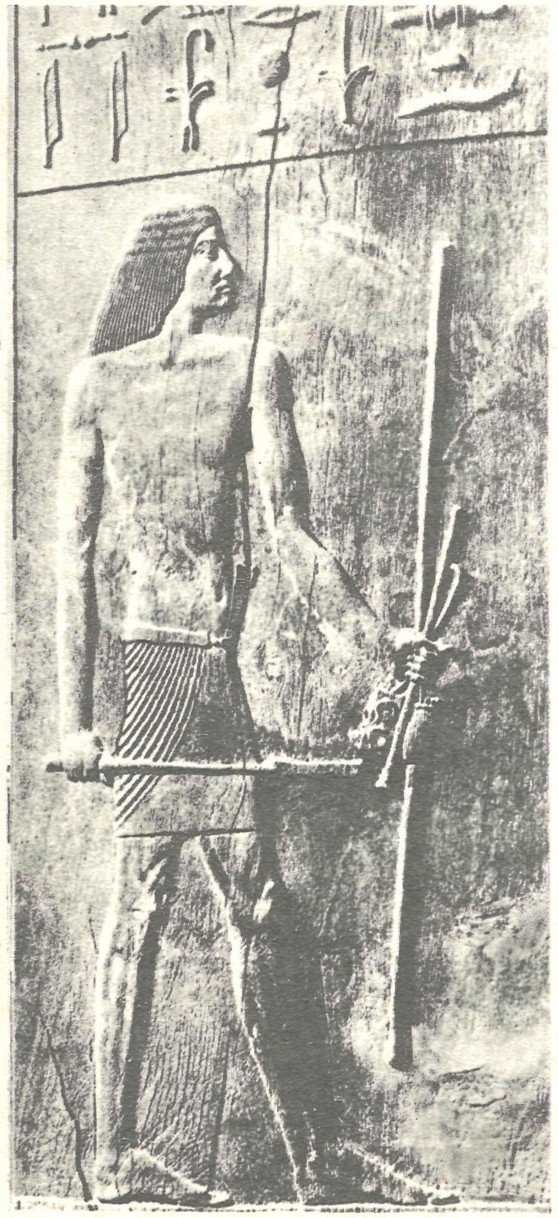
Вавилоняне могли и не выводить общей формулы, а получить такой же результат и на основании других рассуждений.

Вавилонский план поля. Составитель его конечно же владел понятием подобия и пропорциональности. И хотя в текстах нигде не говорится о понятии подобия, планы полей и домов свидетельствуют о том, что их составителям уже были известны некоторые свойства подобных фигур.



8. Так начиналась математика





На всех этапах истории, пройденных человеком, надежным его орудием в познании тайн природы всегда была математика.

Без математики невозможно строительство того или иного сооружения, поскольку ему всегда предшествует разработка плана, тесно связанного с расчетами. Так было уже в самой глубокой древности.

Зодчий Хесира (XXVII в. до н. э.) держит в руках прибор для письма и два шеста — эталоны меры. Длины их относятся, как числа 1 и $\sqrt{5}$. В знаменитом комплексе пирамид в Гизе пропорции многих элементов их представлены числами 1, 2 и $\sqrt{5}$, с помощью которых можно составить число „золотого сечения" $(\sqrt{5}-1):2$. При помощи мерных вех Хесиры можно построить прямой угол и определить размеры углов.

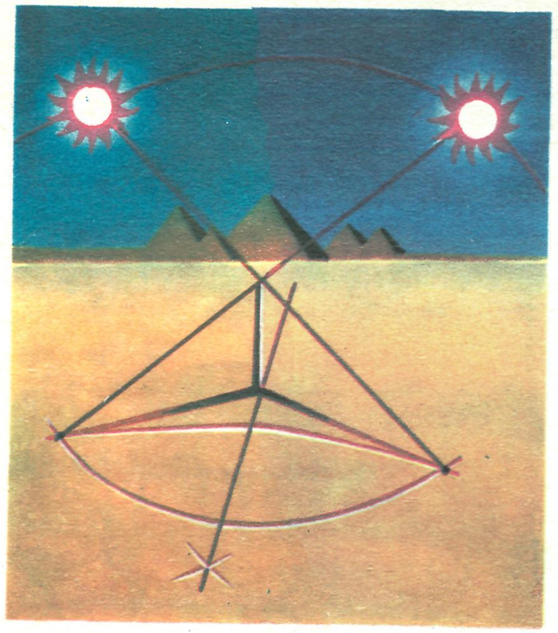
Задачи на „аха" („аха" — куча, груда) с современной точки зрения — это задачи на уравнения первой степени вида $x + ax + bx + cx + \ldots = p$. Это первые в истории математики отвлеченные задачи, решаемые единым методом. При вычислении площади круга египтяне пользовались довольно точным приближением: $S = (\frac{8}{9}d)^2$ (откуда $\pi \approx 4(\frac{8}{9})^2 \approx 3{,}1605$), погрешность которого меньше 1%.

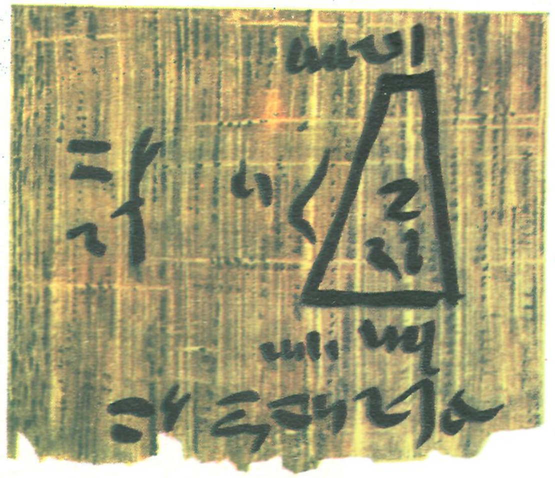
Вершиной древнеегипетской математики является решение задачи № 14 из Московского папируса. В ней с помощью известного алгоритма

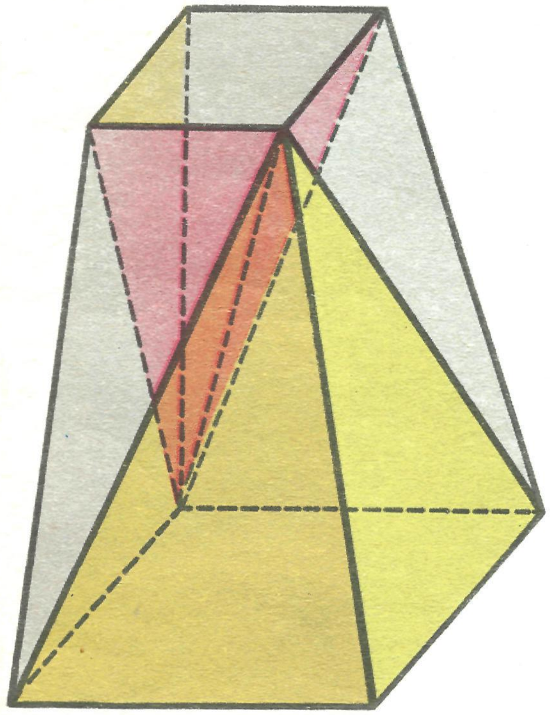
$$V = (a^2 + ab + b^2)\frac{h}{3}$$

вычислен объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды с длинами оснований $a = 4$, $b = 2$ и высотой $h = 6$.

Вероятно, пирамиду разбивали на части. Тогда она составлялась из четырех пирамид и $V = \frac{1}{3}a^2h + \frac{1}{3}b^2h + 2b(a\frac{h}{2}) = \frac{1}{3}h(a^2 + b^2 + ab)$.

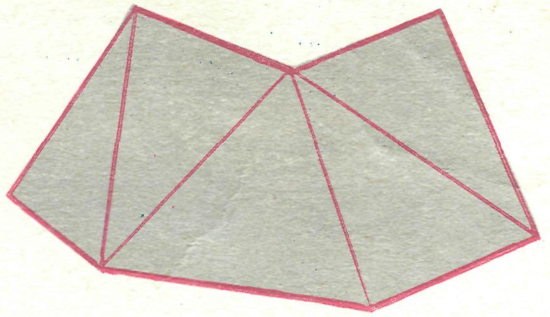




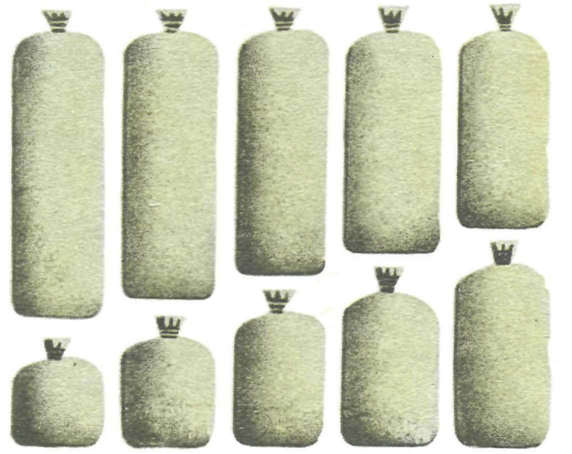


Демокрит писал: „Я побывал во многих странах... беседовал со многими учеными людьми, но что касается сочетаний линий с доказательствами, то меня никто не превзошел, даже те, кого зовут в Египте гарпедонавтами" [38, с. 70].

Гарпедонавты — натягиватели веревки, были землемерами, наиболее употребительный прибор которых представлял туго натянутую веревку.



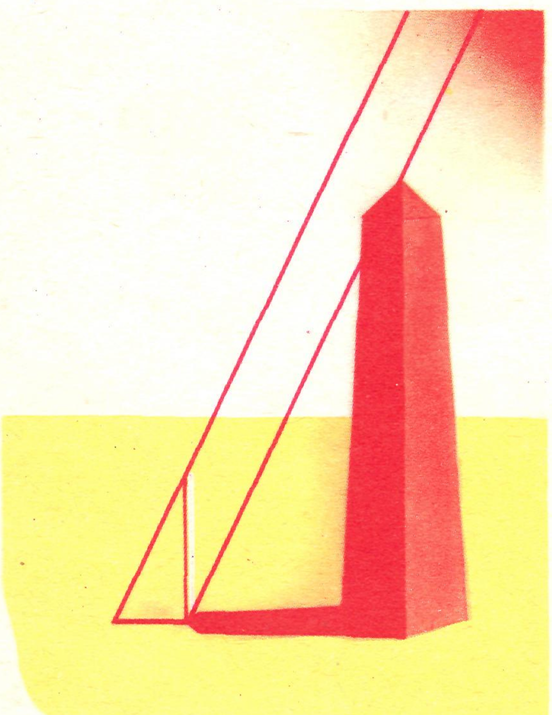
Задача № 64 из папируса Райнда. „Пусть тебе сказано: раздели 10 мер ячменя между десятью людьми; разница между каждым человеком и его соседом должна составлять $\frac{1}{8}$ меры зерна".



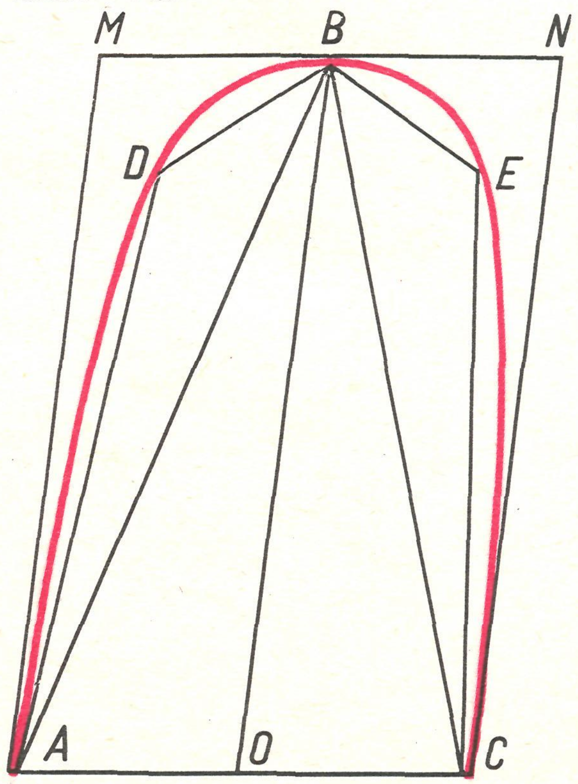
Каждый человек получил соответственно: $\frac{25}{16}, \frac{23}{16}, \frac{21}{16}, \frac{19}{16}, \frac{17}{16}, \frac{15}{16}, \frac{13}{16}, \frac{11}{16}, \frac{9}{16}, \frac{7}{16}$ меры ячменя.

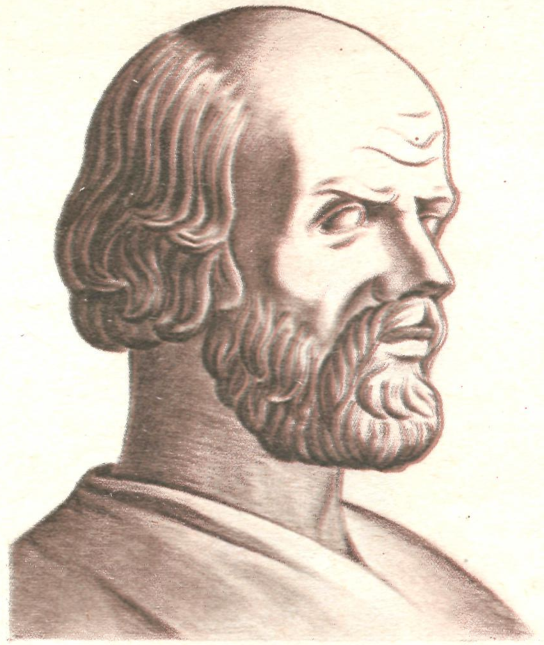
9. Греки открывают новую эпоху в истории математики

Фалес из Милета (ок. 625 – ок. 547 до н. э.) — древнегреческий ученый и государственный деятель, первый из семи мудрецов. Зачинатель и родоначальник греческой философии и науки. Возможно, именно он дал толчок к постепенному превращению египетской и вавилонской эмпирической математики в дедуктивную науку. С помощью теней, отбрасываемых вехой и пирамидой, он вычислил высоту пирамиды, дал доказательства теорем: 1) диаметр делит круг пополам; 2) углы при основании равнобедренного треугольника равны; 3) вертикальные углы равны; 4) треугольники равны, если они обладают равной стороной и двумя прилежащими к ней углами.



Евдокс Книдский (ок. 408 – ок. 355 до н. э.) — гениальный математик, астроном, географ, врач, философ, оратор. Обогатил математику выдающимися открытиями, всю глубину которых ученые оценили лишь в конце XIX – начале XX в. Он безукоризненно разработал строгую теорию отношений, явившуюся первой аксиоматической теорией действительного числа, чтобы избежать актуально бесконечно малых и бесконечно больших величин. Евдокс ввел знаменитую аксиому, вошедшую в математику как аксиома Архимеда. Разработал метод исчерпывания — первое учение о пределах. В основу его была положена лемма, позволяющая находить пределы широкого класса последовательностей.



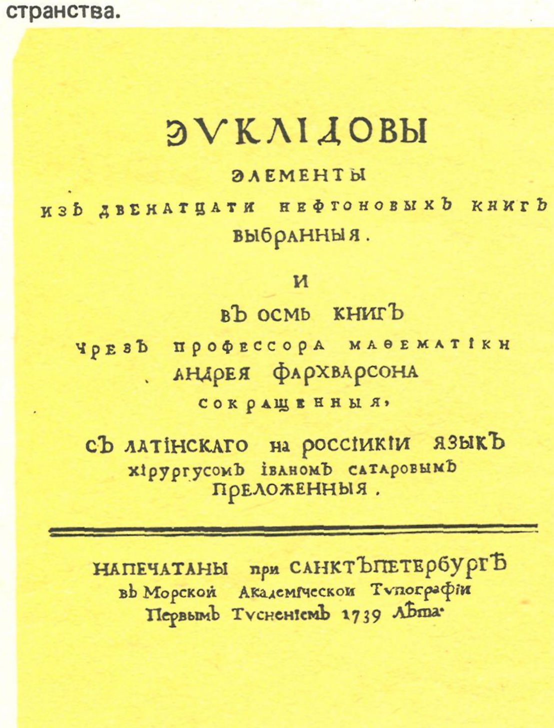


Эратосфен Киренский (ок. 276–194 до н. э.) — разносторонний ученый: математик, астроном, географ, историк и филолог. Современники называли его поэтому „пентатлосом"— пятиборцем. Прославился благодаря изобретению „решета Эратосфена" — способа „отсеивания" простых чисел из натурального ряда. Сконструировал прибор-мезолябий для механического решения делосской задачи (удвоения куба).

Осуществил первое измерение размеров Земли. Измерив длину 1/50 дуги земного меридиана, Эратосфен вычислил окружность земного шара и получил 25 200 стадий, или 39 960 км, что лишь на 319 км меньше действительного значения.

Евклид (ок. 365 – ок. 300 до н. э.). История почти не сохранила сведений о жизни и деятельности ученого. Известно лишь, что он написал ряд книг по математике, физике, астрономии. До нас дошли „Феномены" (сферическая астрономия), „Оптика" (учение о перспективе), „Сечение канона" (теория музыки) и всемирно известные „Начала".

В тринадцати книгах „Начал" Евклид подытожил 350-летний период в развитии античной математики и заложил логический фундамент ее дальнейшего прогресса. „Начала" стали высшим образцом построения научных теорий. Геометрия Евклида строилась и в течение длительного промежутка времени трактовалась как теория, непосредственно описывающая свойства реального физического пространства.

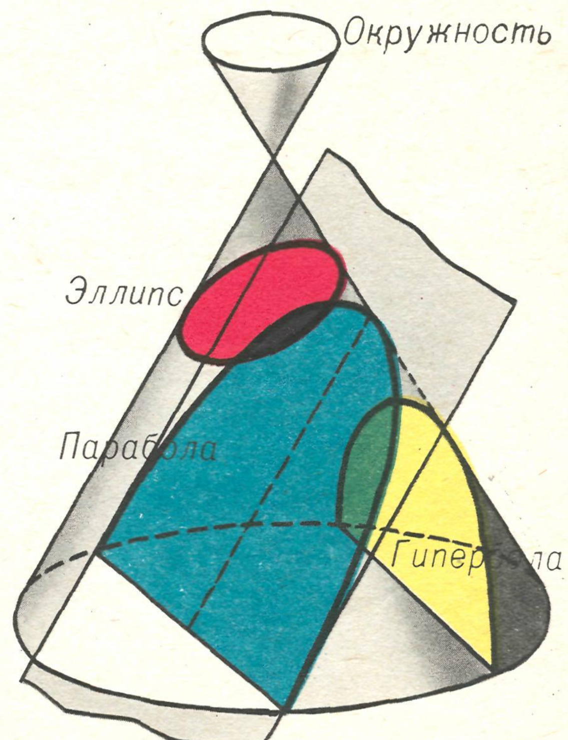


ЭVКЛІДОВЫ
ЭЛЕМЕНТЫ
ИЗЪ ДВЕНАТЦАТИ НЕФТОНОВЫХЪ КНИГЪ
ВЫБРАННЫЯ.
И
ВЪ ОСМЬ КНИГЪ
ЧРЕЗЪ ПРОФЕССОРА МАѲЕМАТІКИ
АНДРЕЯ ФАРХВАРСОНА
СОКРАЩЕННЫЯ,
СЪ ЛАТІНСКАГО НА РОССІИСКІИ ЯЗЫКЪ
ХІРУРГУСОМЪ ІВАНОМЪ САТАРОВЫМЪ
ПРЕЛОЖЕННЫЯ.

НАПЕЧАТАНЫ при САНКТЪПЕТЕРБУРГѢ
въ Морской Академіческой Тvпографіи
Первымъ Тvсненіемъ 1739 Лѣта.

Аполлоний Пергский (ок. 260 – ок. 170 до н. э.) — наряду с Архимедом и Евклидом третий из самых выдающихся ученых эпохи эллинизма. Автор нескольких работ по математике и астрономии, среди которых наиболее известны восемь книг трактата „Конические сечения" (восьмая книга не дошла до нас).

„Конические сечения" — яркий пример теории, возникшей из логики развития самой математики и лишь со временем нашедшей практическое применение. Теория конических сечений Аполлония нашла применение лишь в XVI–XVII вв., когда Кеплер установил, что планеты Солнечной системы движутся по эллипсам, а Галилей показал, что брошенный камень (снаряд) летит в пустоте по параболе.



9. Греки открывают новую эпоху истории математики

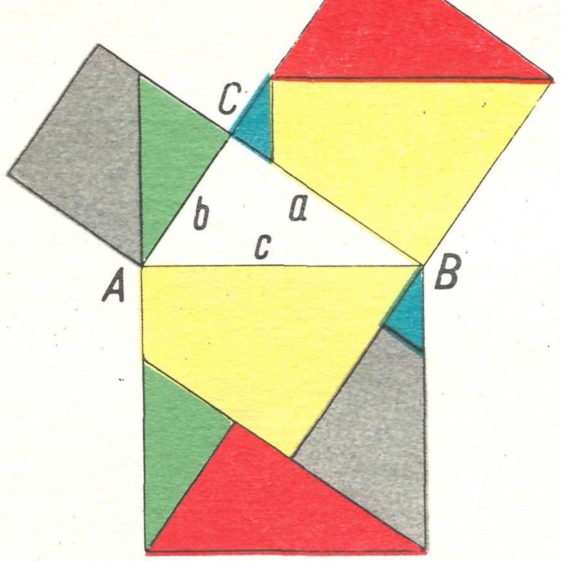
Новую эпоху в истории математики открыли ученые Древней Греции — математика из совокупности разрозненных, преимущественно эмпирически полученных, рецептурных правил превратилась наконец в дедуктивную науку.

В течение трех столетий ученые Древней Греции поставили и решили задачи, создали такие теории, глубина которых стала по-настоящему понятной лишь в XIX и даже XX вв. Среди них можно назвать способ доказательства „методом исчерпывания" и теорему об отношении площадей двух кругов Евдокса Книдского, аксиоматическое построение геометрии в „Началах" Евклида, методы Архимеда определения площадей поверхностей и объемов различных фигур, развившиеся через два тысячелетия в интегральное исчисление.

Математика развивалась в сложной взаимосвязи практической деятельности человека и логики собственного развития, причем теория часто опережала потребности практики. Часто теории создавались „про запас" и долго „ждали" практического применения. Например, о конических сечениях писал еще Евклид. Аполлоний Пергский детально разработал теорию конических сечений, а широкое применение в механике земных и небесных тел эта теория получила только после открытий Кеплера и Галилея. Наконец, Ньютон при создании своих знаменитых „Математических начал натуральной философии" опирался на труды Аполлония непосредственно.

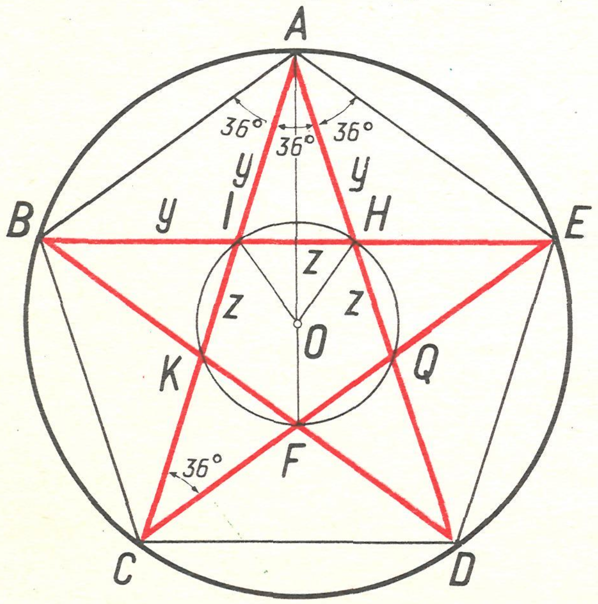
10. Пифагор в легендах и действительности

$a^2+b^2=c^2$



Пифагор (ок. 580 — ок. 500 до н. э.) — легендарная фигура в истории математики и философии древнего мира. Величайшая заслуга Пифагора перед наукой состоит в том, что он создал научную школу, аккумулирующую абстрактные математические факты и объединяющую их в теоретическую систему. Из арифметики выросла наука о натуральных числах — теория чисел, выкристаллизовались геометрические знания. Карл Маркс, характеризуя Пифагора, назвал его „статистиком вселенной". Пифагорейство — особый пример формирования философии из мифологических взглядов, эволюционировавших под воздействием математики в научные.

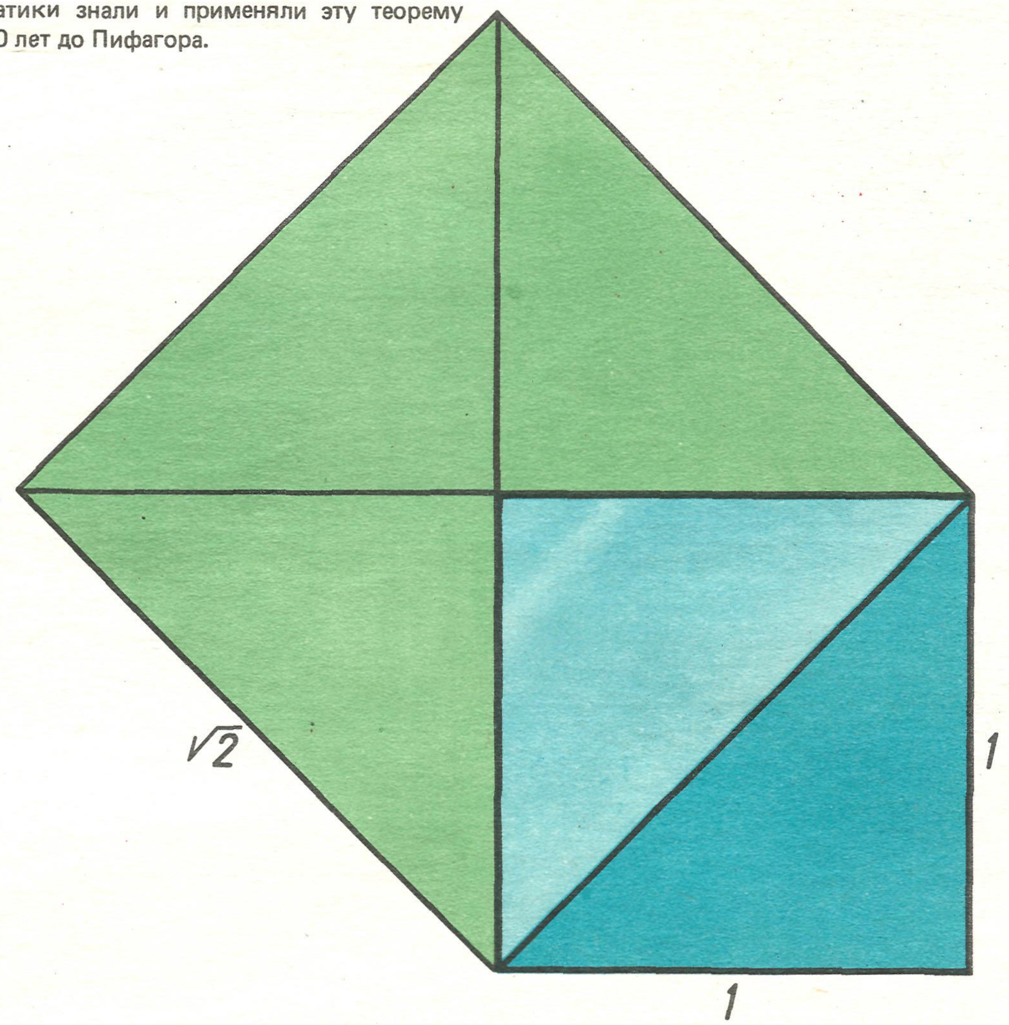
Невозможно отделить то, что принадлежит самому Пифагору, от полученного его учениками, поскольку все открытия приписывали учителю. Поэтому, говоря о Пифагоре, будем иметь в виду его школу.



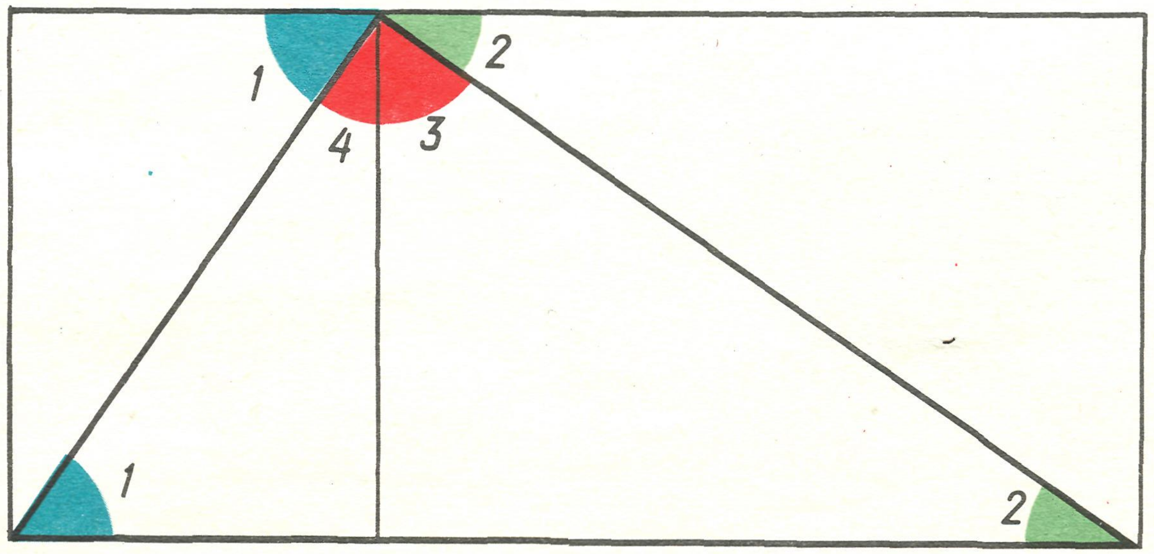
Очень большим достижением пифагорейцев было открытие несоизмеримых отрезков. Оно поразило современников, разрушило ранние представления пифагорейцев, стало поворотным пунктом развития математики, послужило толчком к созданию особенно тонких и глубоких теорий. Пифагорейцы считали, что все отношения реальных объектов или абстрактных моделей могут быть выражены при помощи чисел, вернее — положительных рациональных чисел, поскольку только такие числа были известны в ту эпоху. Открытие несоизмеримых отрезков развенчало эти взгляды. Оно свидетельствовало о том, что природа даже простейших геометрических объектов сложнее, чем казалось пифагорейцам. Это потрясло их. Несоизмеримость получила громкую известность, привлекла внимание лучших умов. В диалоге Платона „Законы" Афинянин сообщает, что поздно узнал о несоизмеримости и что до этого он был подобен неразумному животному. В трактате „Первая аналитика" Аристотель писал, что если допустить соизмеримость диагонали и стороны квадрата, то нечетное число было бы равно четному. Из этого следует, что доказательство производилось методом от противного.

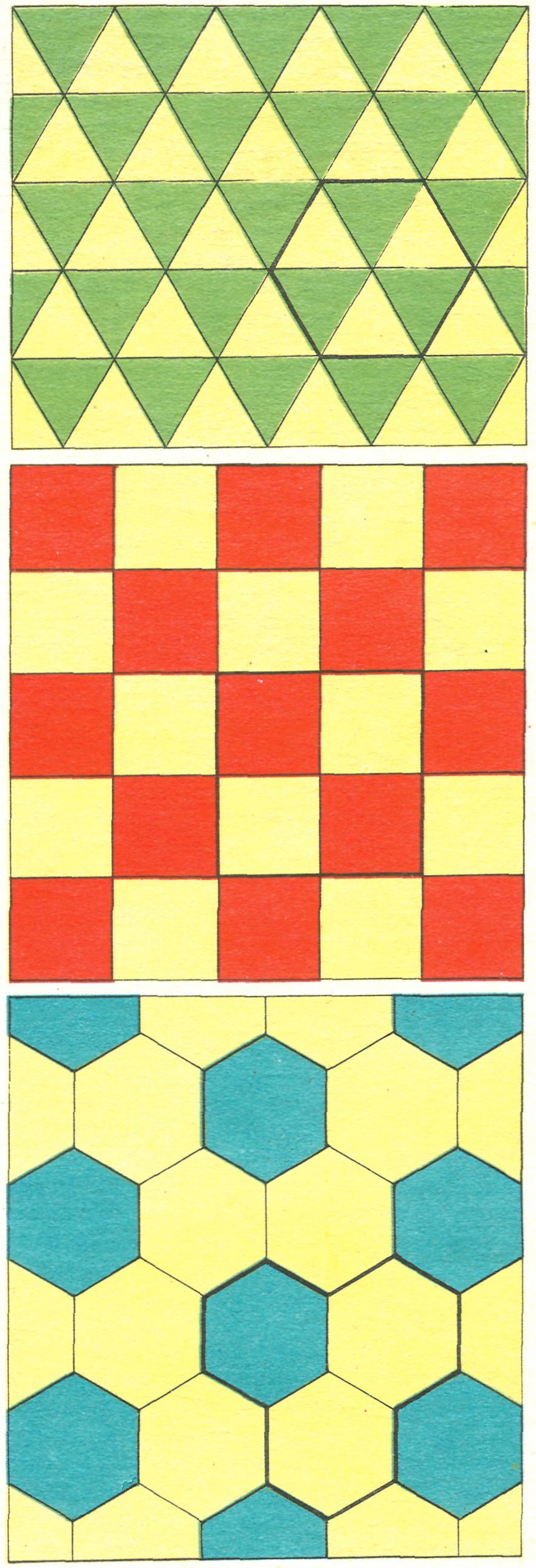
Символом здоровья и паролем служила для пифагорейцев пятиугольная звезда, любимой фигурой была также пентаграмма, считавшаяся магической (об этом упоминается даже в известной сцене Фауста и Мефистофеля в трагедии И. В. Гёте). Пентаграмма — подлинная сокровищница многих неожиданных и изящных геометрических отношений.

Эта теорема в течение 25 веков носит знаменитое имя Пифагора, хотя иракские археологи обнаружили клинописные таблички, свидетельствующие о том, что вавилонские математики знали и применяли эту теорему за 1500 лет до Пифагора.



Важным открытием Пифагора является также теорема о том, что сумма внутренних углов треугольника равна 180°.





В школе Пифагора впервые было доказано, что вся плоскость около точки может быть покрыта только тремя видами правильных многоугольников: равносторонними треугольниками, квадратами и правильными шестиугольниками.

10, 11. Пифагор в легендах и действительности

Пифагор — наиболее противоречивая и загадочная фигура в истории философии, математики, науки вообще.

Легендой и предметом дискуссий он стал уже в древнем мире. С того времени немногое прояснилось, хотя интерес к Пифагору и организованному им религиозно-политическому союзу, или научной школе, не угасал никогда.

Считают, что Пифагор родился на острове Самос в богатой купеческой семье. Он побывал в Египте и Вавилоне, после чего на юге Италии в г. Кротоне основал обособленную организацию, члены которой должны были строжайше выполнять специально разработанные установки. В частности, каждый вступающий в союз пифагорейцев был обязан четыре-пять лет соблюдать молчание во время бесед его полноправных членов. Лишь тот, кто выдерживал подобное испытание, посвящался в тайны союза и получал право высказывать свои мысли вслух.

Пифагорейский союз был, очевидно, антидемократичным, хотя не все пифагорейцы были консерваторами.

Социальная борьба с безраздельной властью аристократии за участие в правлении демоса, развернувшаяся тогда в эллинском мире, захватила и пифагорейцев. Внутри союза вспыхнула борьба между консерваторами и радикалами. Возможно, победили консерваторы, ставшие вдохновителями войны Кротона с процветающим городом Сибарисом, где правила демократическая партия.

Одержав победу, кротонцы уничтожили большую часть населения Сибариса, а разграбленный город сравняли с землей. Вероятно, именно эти действия консервативного крыла пифагорейцев вызвали возмущение народа и разгром пифагорейского союза. Пифагорейцев выгнали из Кротона. Существует мнение, что во время этих событий в одной из уличных потасовок погиб и сам Пифагор.

После изгнания пифагорейцев на народном собрании Кротона читали произведение Пифагора „Священное слово" и таким образом доказывали антидемократическую сущность политического учения Пифагора и его преемников.

Позднее в течение длительного времени в разных городах Греции работали выдающиеся ученые, называвшие себя пифагорейцами. Среди них Архит из Терента (ок. 428–365 до н. э.), Феодор из Кирены (V в. до н. э.) и др.

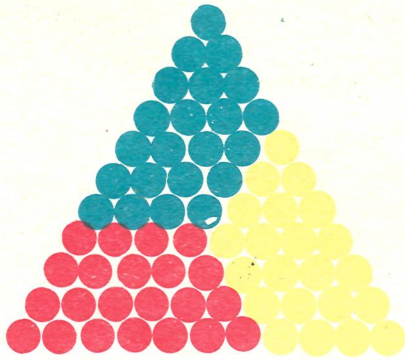
С именем Пифагора и его последователей связывают ряд выдающихся открытий в математике, хотя в последнее время в традиционную концепцию внесены некоторые поправки. В частности, клинописные таблички свидетельствуют о том, что вавилонские математики еще за 1500 лет до Пифагора пользовались теоремой, названной его именем.

И все же с именем Пифагора связаны коренные преобразования в математике. Пифагорейцы были первооткрывателями ряда интересных математических зависимостей. Однако наибольшее впечатление на них произвело то, что различные явления природы, поддающиеся исследованию, можно было охарактеризовать определенными числовыми отношениями. Отсюда берет начало ложное, идеалистичное в сущности представление о числе как о властелине, правителе мира. Пифагору приписывают крылатое высказывание: „Числа правят миром".

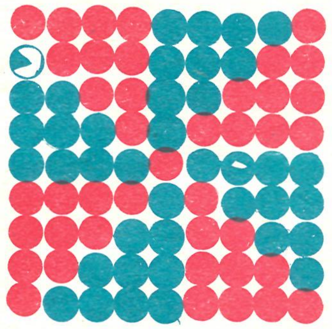
Верно выявив причинно-следственные связи отдельных явлений и объектов реальной действительности и получив приближенные числовые характеристики для некоторых из них, пифагорейцы преувеличили значение этих числовых характеристик, рассматривая их в качестве самостоятельных идеальных сущностей, лишь отражением которых являются якобы все объекты реальной действительности. Поэтому наряду с арифметикой и геометрией пифагорейцы уделяли много внимания арифмологии — смеси математики и религиозной мистики, с помощью которой они стремились разгадать все тайны природы. Занятия арифмологией обусловили появление сложной числовой символики, способствовали мистификации многих чисел и числовых отношений. Например, в квадратах чисел пифагорейцы усмотрели „справедливость", поскольку квадраты являются результатом умножения равных ($4 = 2 \cdot 2$, $9 = 3 \cdot 3$ и т. д.). Декада (10) и монада (1) символизировали совершенство; 5 — брак как результат сложения „мужского" (3) и „женского" (2) начал.

Подобные далекие от науки аналогии привели пифагорейцев к формированию понятий совершенного числа, а также пар дружественных чисел. Однако математика устойчива к различным идеалистическим интерпретациям ее фактов и удивительно щедро вознаграждает тех, кто, отбрасывая идеалистическую шелуху, ищет чистое зерно числовых отношений. Так было и с понятиями совершенного числа и парами дружественных чисел. Оказалось, что с ними связаны многочисленные интересные и глубокие свойства натуральных чисел. Многие из этих свойств еще не доказаны.

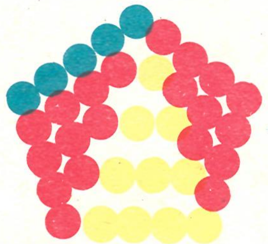
11. Пифагор в легендах и действительности



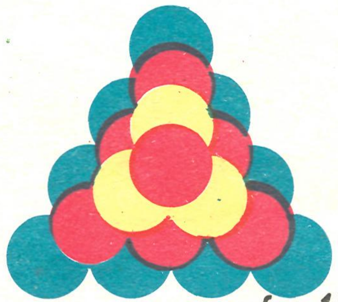
$1, 3, 6, 10, 15, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}$



$1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2$



$1, 5, 12, 22, 35, \ldots, \frac{n(3n-1)}{2}$



$1, 4, 10, 20, 35, \ldots, \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3}$

Есть основания приписать самому Пифагору открытие зависимости между гармоническими интервалами и длинами струн. Важнейшие из этих зависимостей могут быть получены при помощи отношения чисел 1, 2, 3 и 4. Эти и другие наблюдения над числовыми закономерностями предметов и явлений реальной действительности привели к основному постулату пифагорейцев о том, что все есть число, как конструктивный принцип познания, правильного ви́дения и понимания предметов. Число как бы делает мир логичным, членораздельным, а его объекты отчетливо различимыми, и даже управляет миром.

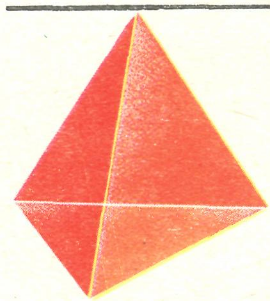
Известно, что это было преувеличение роли числа, которое, конечно же, никем и ничем не управляет, но служит универсальным и мощным средством создания математических моделей предметов и явлений реальной действительности. Гиперболизация пифагорейцами числа и числовых отношений заводила их в тупики числовой мистики, но обостренное внимание Пифагора и его учеников к свойствам чисел имело и свои исключительно важные последствия для дальнейшего развития математики. Пифагорейцы заложили основы науки о свойствах чисел — теории чисел. Изучение ими собственно свойств натуральных чисел обогатило математику многими фундаментальными понятиями и законами. Пифагорейцы ввели понятие четного и нечетного, простого и составного чисел, разбили множество натуральных чисел на классы треугольных, квадратных, прямоугольных, пятиугольных, шестиугольных, пирамидальных и других чисел. Они открыли много важных теоретико-числовых отношений, поставили глубокие задачи о свойствах чисел. Многие из этих задач решили сами пифагорейцы или их современники, другие задачи решены позднее, но среди них были и такие сложные проблемы, которые и до нашего времени не решены. Отдельные задачи положили начало содержательным, богатым результатами теориям. Это прежде всего относится к истории раскрытия многочисленных загадок простых чисел.

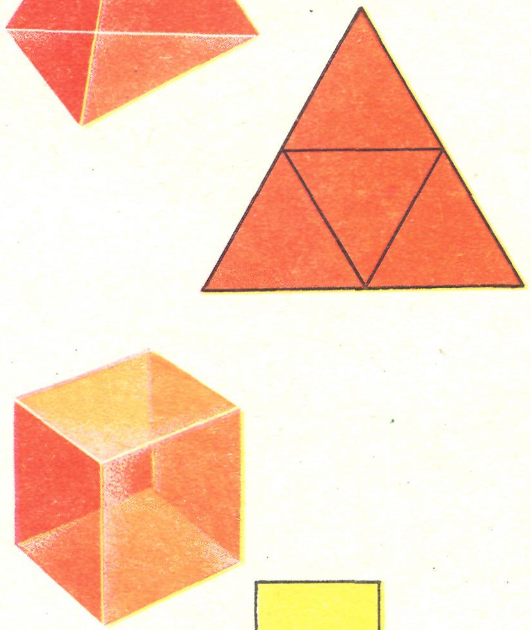
p	2^{p-1}	2^p-1	Совершенные числа $2^{p-1}(2^p-1)$
2	2	3	6
3	4	7	28
5	16	31	496
7	64	127	8 128
13	4 096	8 191	33 550 336
17	65 536	131 071	8 589 869 056
19	262 144	524 287	137 438 691 328
31	1 073 741 824	2 147 483 647	2 305 843 008 139 952 128

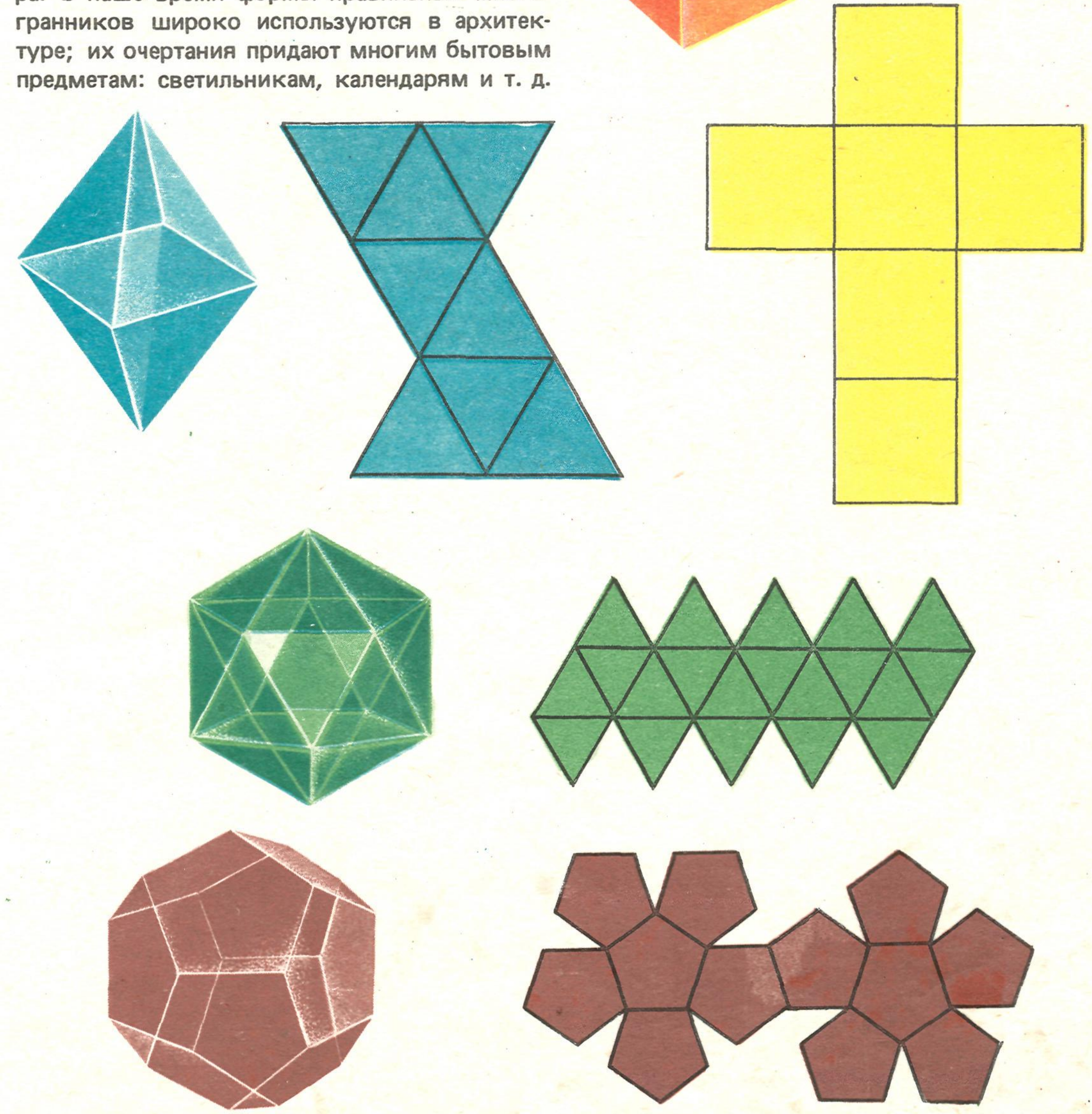
Пифагору приписывают также открытие пяти правильных многогранников — удивительных гармонически совершенных созданий человеческой фантазии: тетраэдра, октаэдра, гексаэдра (куба), икосаэдра и додэказдра.

Правильные многогранники издавна производили большое впечатление на человека. В музеях сохраняются детские игрушки и предметы неизвестного назначения, изготовленные в форме правильных многогранников. Например, в Одесском археологическом музее хранится икосаэдр, изготовленный около I в. до н. э. Красота и удивительные метрические отношения пяти правильных многогранников очаровывали не одно поколение математиков, философов, естествоиспытателей. Молодой И. Кеплер считал, что расстояния между орбитами шести известных в то время планет можно найти, вписывая в определенном порядке пять правильных тел в сферу орбиты Сатурна.

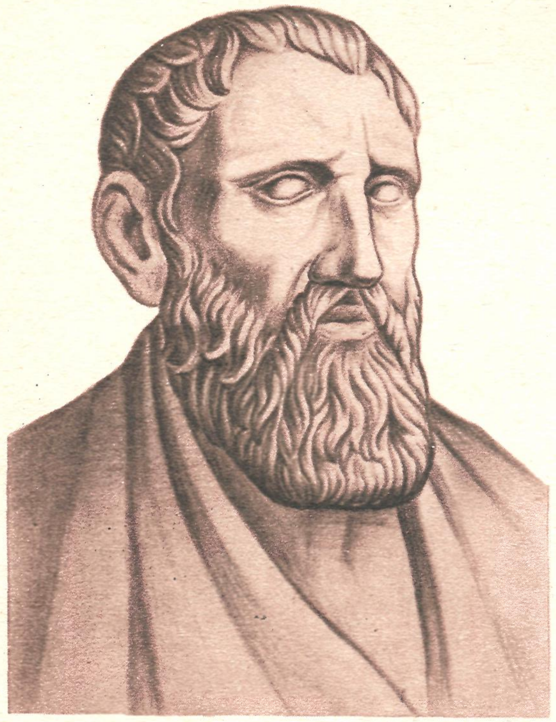
Природа конструирует многие материальные структуры в форме правильных многогранников. Среди кристаллов обнаружены формы тетраэдра, октаэдра, куба, додекаэдра. В наше время формы правильных многогранников широко используются в архитектуре; их очертания придают многим бытовым предметам: светильникам, календарям и т. д.







12. Апории Зенона Элейского



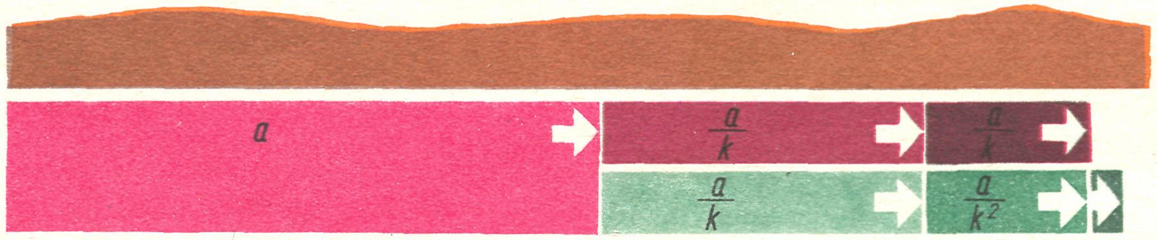
Апории Зенона Элейского (ок. 490 — 430 до н. э.) с гениальной глубиной раскрыли диалектическую противоречивость понятия актуальной бесконечности и на многие века стали мощным генератором научного поиска в области математики, физики и философии. Они произвели огромное впечатление на ученых. Историк математики Д. Я. Стройк писал, что „его четыре парадокса вызвали такое волнение, что и сейчас можно наблюдать некоторую рябь". Ведь ни одно понятие не волновало так человеческую мысль, как понятие бесконечности.

Быстроногий Ахиллес никогда не догонит черепаху, если в начале движения черепаха движется на некотором расстоянии впереди него. Таким образом, движения нет, поскольку если бы оно было, то, начавшись, оно никогда не закончилось бы. В этой апории противоречие возникает при попытке разобраться, как можно исчерпать отрезок суммой бесконечного ряда, у которого в сущности нет последнего слагаемого, ведь

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{k^n} \to 0.$$

$$S_Ч = \frac{a}{k} + \frac{a}{k^2} + \frac{u}{k^3} + \dots$$

$$S_A = a + \frac{a}{k} + \frac{a}{k^2} + \dots$$

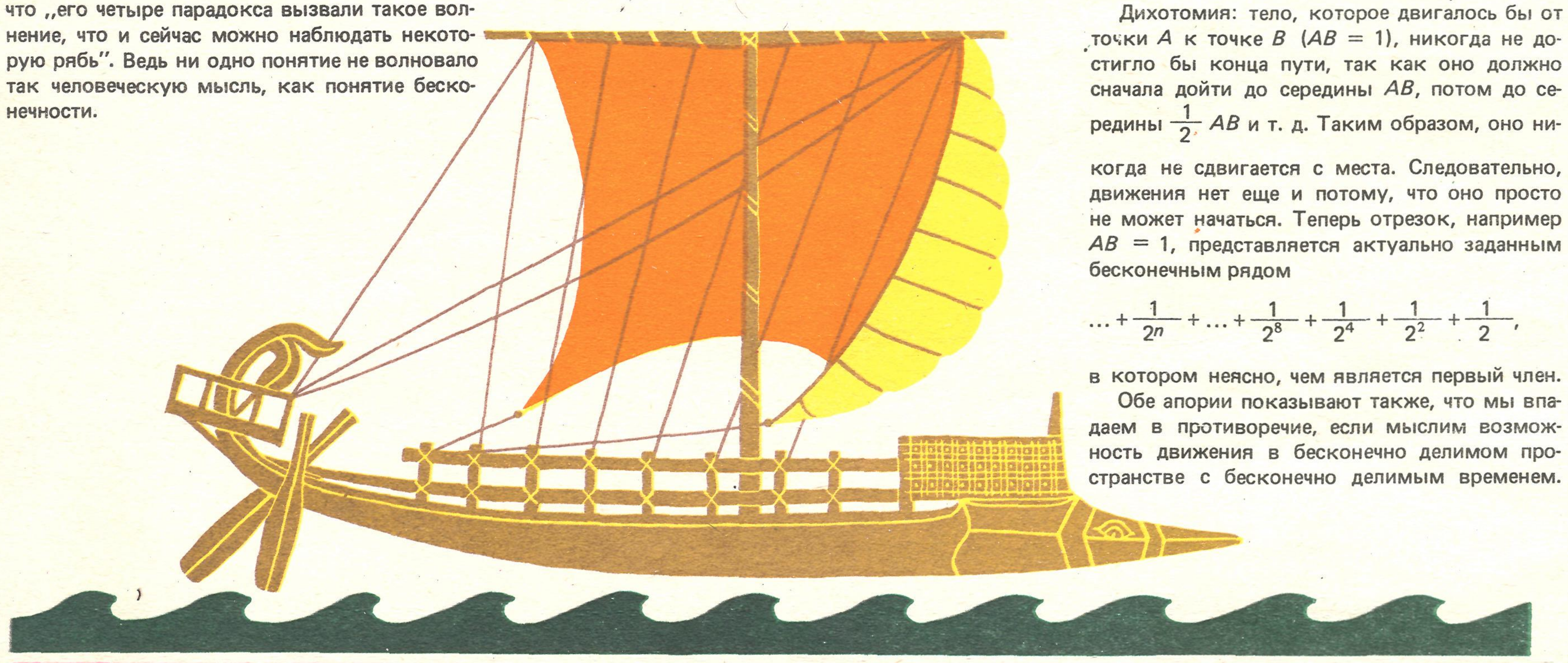


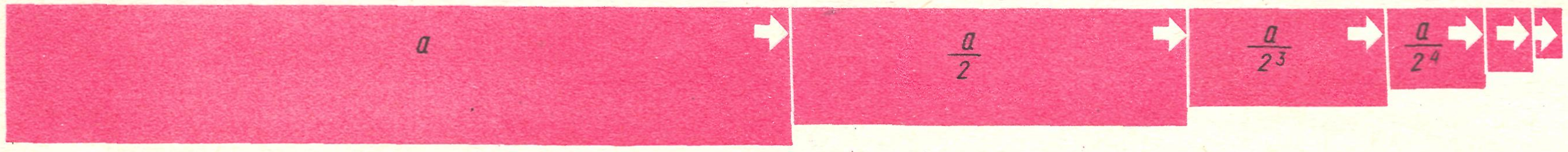
Дихотомия: тело, которое двигалось бы от точки A к точке B ($AB = 1$), никогда не достигло бы конца пути, так как оно должно сначала дойти до середины AB, потом до середины $\frac{1}{2}$ AB и т. д. Таким образом, оно никогда не сдвигается с места. Следовательно, движения нет еще и потому, что оно просто не может начаться. Теперь отрезок, например $AB = 1$, представляется актуально заданным бесконечным рядом

$$\dots + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2},$$

в котором неясно, чем является первый член.

Обе апории показывают также, что мы впадаем в противоречие, если мыслим возможность движения в бесконечно делимом пространстве с бесконечно делимым временем.

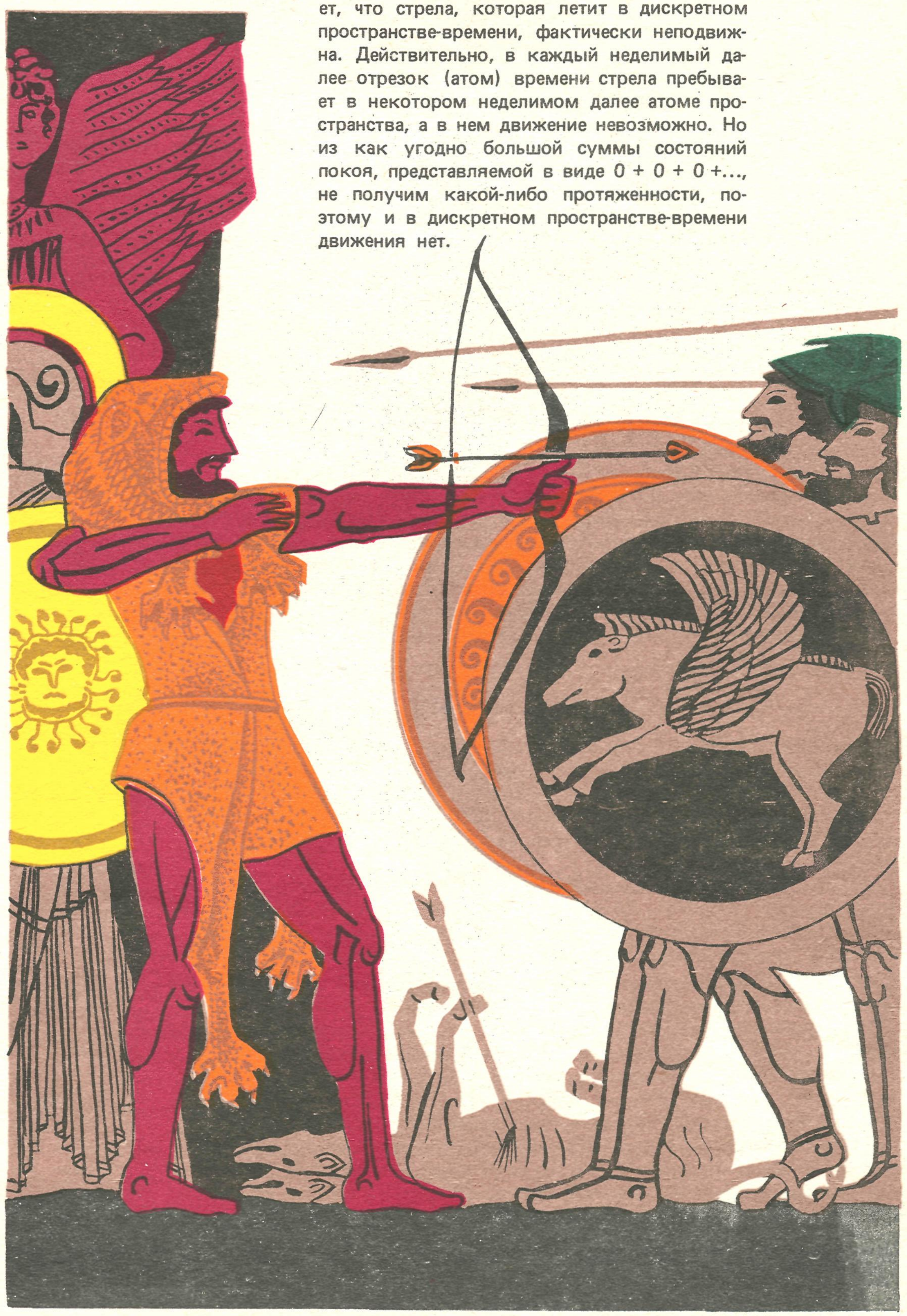




Мы не можем представить, выразить, смерить, изобразить движения, не прервав непрерывного, не упростив, угрубив, не разделив, не омертвив живого. Изображение движения мыслью есть всегда огрубление, омертвление, — и не только мыслью, но и ощущением, не только движения, но и в с я к о г о понятия.

В. И. Ленин

Изящными рассуждениями Зенон показывает, что стрела, которая летит в дискретном пространстве-времени, фактически неподвижна. Действительно, в каждый неделимый далее отрезок (атом) времени стрела пребывает в некотором неделимом далее атоме пространства, а в нем движение невозможно. Но из как угодно большой суммы состояний покоя, представляемой в виде 0 + 0 + 0 +..., не получим какой-либо протяженности, поэтому и в дискретном пространстве-времени движения нет.



12. Апории Зенона Элейского

Зенон Элейский первым четко высказал идею пространственной и математической бесконечности. Он выдвинул 45 аргументов, или апорий (от греч. *απορία* — тупик, безысходность), в которых с гениальной прозорливостью, хотя и в наивной, далекой от математики форме, поставил сложные, глубокие вопросы о диалектической противоречивости понятий конечного и бесконечного, дискретного и непрерывного.

Понятие бесконечности в математике отражает некоторые признаки процессов, происходящих в природе или осуществляемых человеком. Рассматривая такие процессы, можно предположить, что за каждым выполненным шагом некоторого процесса всегда можно осуществить следующий, например: $1, 1+1=2, 2+1=3, \ldots, (n-1)+1=n, \ldots$. Если пренебречь неминуемыми физическими ограничениями и предположить возможность продолжения этого процесса как угодно долго, то в результате получим N.

Таким образом, приходим к понятию потенциальной (от лат. potentia — возможность) бесконечности. Здесь N как бы разворачивается в процессе бесконечного выполнения некоторых шагов.

Абстрагируясь от процесса образования множества N, можно представить этот процесс завершенным. Тогда множество N будет задано полным набором своих элементов, будет актуально заданным (от лат. actualic — действенный).

В случае конечных множеств такое предположение не вызывает никаких осложнений и практика подтверждает его правомерность. Рассматривая актуально заданными бесконечные множества, вводим абстракцию более высокого порядка. Однако введение этой абстракции без точного уяснения ее природы и сущности приводит к настоящим логическим катастрофам. Среди многих парадоксов науки апории Зенона Элейского оказались наиболее разрушительными. Он показал, что, рассматривая пространство и время как неограниченно делимые или как суммы мельчайших неделимых структурных единиц материального мира, в том и другом случаях приходим к логическому противоречию.

Зенон Элейский не отрицал движение как физическую реальность, он только указывал на трудности описания его в понятиях науки. Действительно, если считать пространство и время бесконечно делимыми или дискретными и быть последовательными в описании движения, то необходимо вводить понятие актуальной бесконечности, что приведет к противоречию.

Математическая модель непрерывного движения легко решает апории Зенона, например две первые. Ведь сумма бесконечного ряда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2^2}+\ldots+\frac{a}{2^n}+\ldots\right)=a$. Но математическая модель не исчерпывает проблем, поставленных Зеноном. Об этом выразительно пишет видный советский философ академик АН ЭССР Г. И. Наан: „Внимательный анализ показывает, что на каждом данном уровне знаний Зенона действительно можно опровергнуть „на 99 процентов"; остается „только" один процент. Но затем выясняется, что в этом одном проценте вся соль, зародыш новых трудностей, новых противоречий и нового знания... .

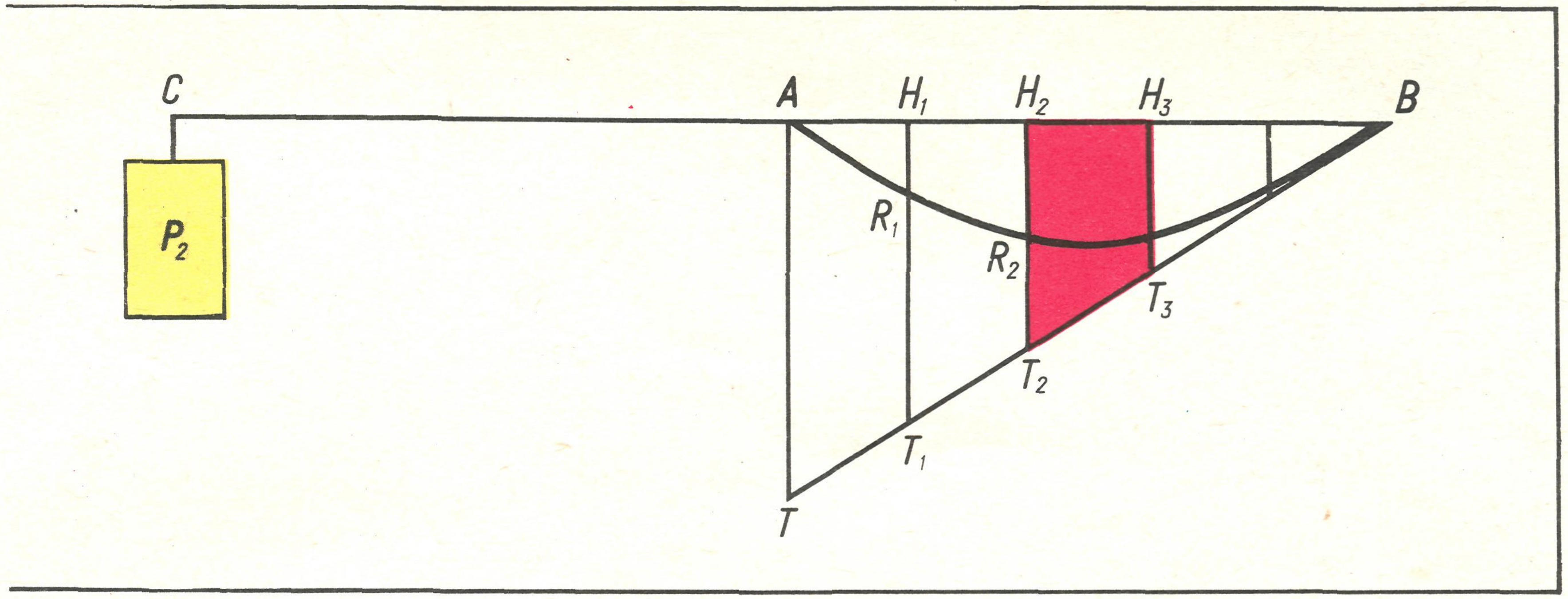
Возможно, что человечество вообще никогда не сумеет опровергнуть элеата „на все 100" процентов: бесконечность неисчерпаема, а Зенон, как нам кажется, сумел охватить в наивной, но гениальной форме три „вечные" проблемы, тесно связанные между собой и с проблемой бесконечности: проблему *ничто,* проблему *непрерывности* и проблему *существования*" (см.: Бесконечность и Вселенная.— М.: Мысль, 1969. — С. 10).

О сущности этих трудностей, вырастающих из „одного неопровергнутого процента", писала советский философ и историк математики С. А. Яновская (1896—1966) в статье „Преодолены ли в современной науке трудности, известные под названием „Апорий Зенона"?" Она дает отрицательный ответ на поставленный вопрос. Суммируя современное состояние проблематики, С. А. Яновская заканчивает статью словами: „Приходится, таким образом, на неизмеримо более высоком уровне развития науки возвращаться снова к проблематике, связанной с апориями Зенона" (Я н о в с к а я С. А. Методологические проблемы науки. — М.: Мысль, 1972. — С. 234).

Глубокий философский анализ апорий Зенона дал В. И. Ленин. Конспектируя книгу Гегеля „Лекции по истории философии", он сделал замечание с пометкой NB (от лат. nota bene — заметить хорошо): „Сие можно и должно *о б е р н у т ь:* вопрос не о том, есть ли движение, а о том, как его выразить в логике понятий" [15, с. 230].

Далее В. И. Ленин сформулировал свою замечательную формулу неизбежности создания упрощающих моделей исследуемых явлений. Таков единственно возможный путь познания количественных закономерностей движений.

13. Архимед



Архимед (ок. 287—212 до н. э.) — знаменитый древнегреческий математик, механик и военный инженер. Гений его вызывал удивление современников, перед ним преклоняемся и мы — отдаленные потомки ученого.

Архимед решил целый ряд сложных задач, приведших к созданию новых методов решения математических проблем. Открытия Архимеда явились бесценным вкладом в сокровищницу математической мысли. Это прежде всего задачи на вычисление площадей и объемов фигур, ограниченных кривыми линиями и кривыми поверхностями, на вычисление центров масс различных фигур, задачи на метрические зависимости в геометрических фигурах и на зависимости между различными фигурами.

Для вычисления площадей криволинейных поверхностей Архимед широко применял открытый им закон рычага. Он определил, что площадь сегмента параболы равна 1/3 площади треугольника, ограниченного хордой этого сегмента, касательной BT к сегменту и перпендикуляром AT к хорде сегмента.

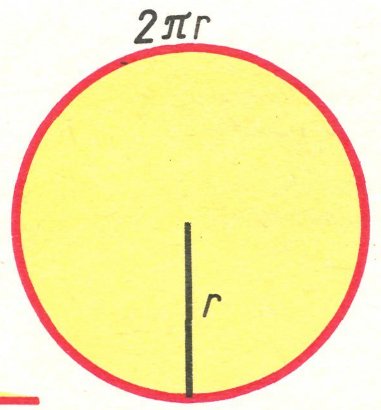
Архимед первым поставил на научную основу задачи об измерении длины окружности и площади круга, получив следующие важные результаты:

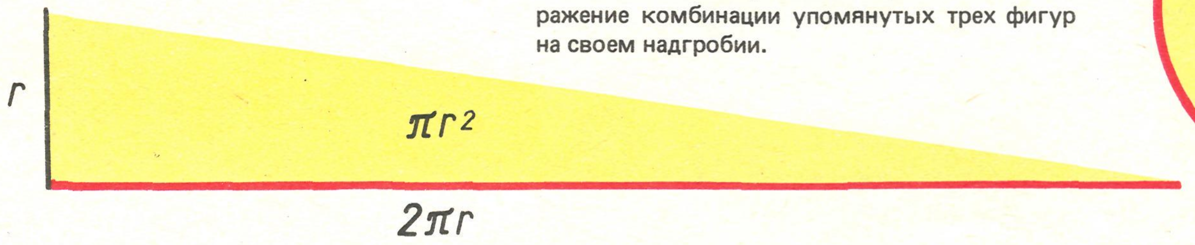
Площадь круга равна площади прямоугольного треугольника, один из катетов которого равен длине окружности, а второй — радиусу этого круга.

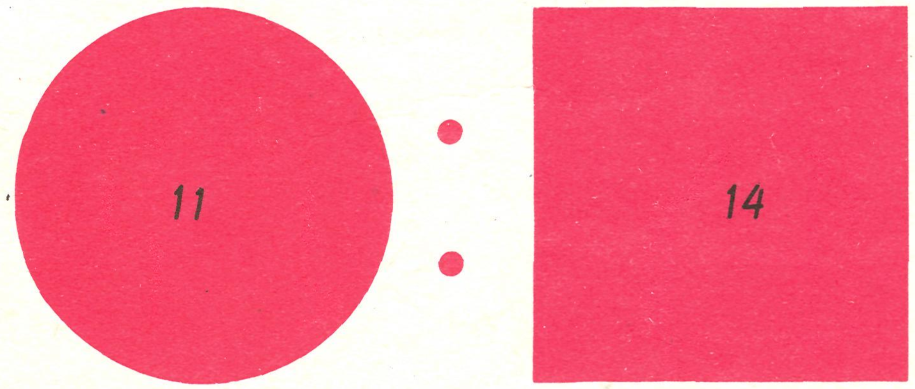
Площадь круга относится к площади квадрата, построенного на его диаметре, почти как 11 : 14.

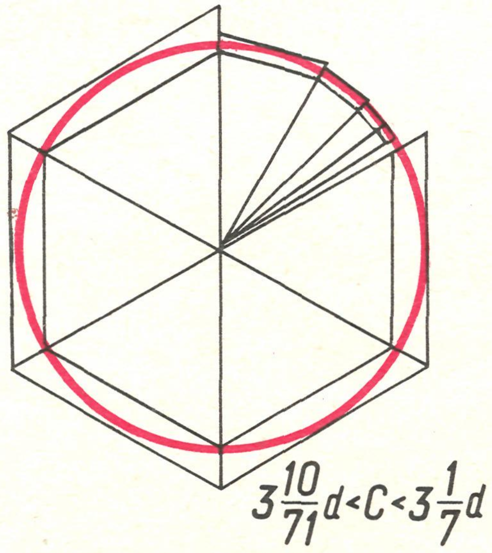
Длина окружности находится в пределах $3\frac{10}{71}d < C < 3\frac{1}{7}d$.

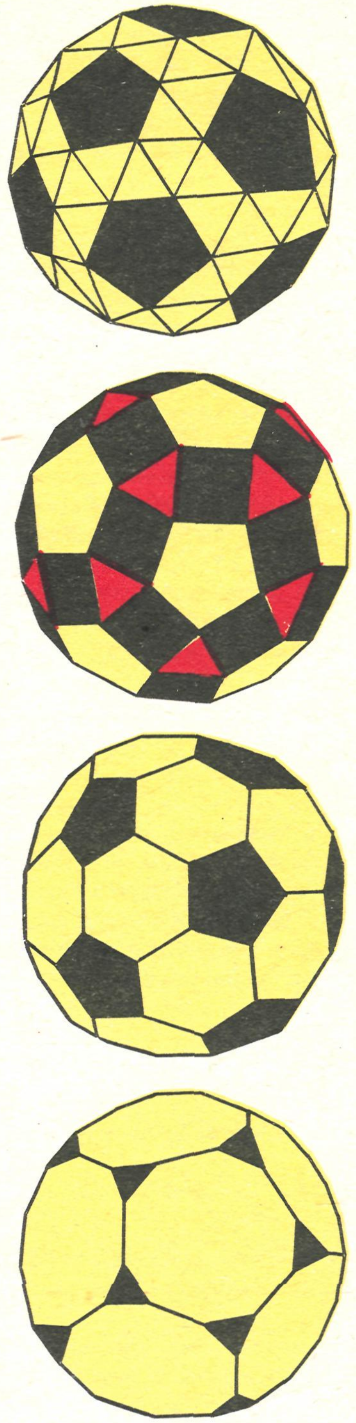
Архимед ошеломлял современников своими удивительными находками в геометрии. Он открыл тринадцать полуправильных многогранников, установил, что площадь поверхности шара в четыре раза больше площади его большого круга, что объемы цилиндра и вписанных в него полушара и конуса относятся, как 3 : 2 : 1. Этот свой результат Архимед ценил так высоко, что завещал высечь изображение комбинации упомянутых трех фигур на своем надгробии.











Архимед открыл многогранники, у которых все многогранные углы равны между собой, а все грани являются правильными многоугольниками. Такие многогранники называются полуправильными, или архимедовыми.

13, 14. Архимед

В 75 г. до н. э. Цицерон, объезжая подчиненный Риму остров Сицилию, посетил Сиракузы. Исполнив свои служебные обязанности, высокий сановник пожелал увидеть могилу Архимеда. Он не только сам принял участие в поисках захоронения ученого, но и отдал приказ отремонтировать заброшенное надгробие. И все это несмотря на то, что Архимед был последовательным неприятелем римлян и своими изобретениями причинял римской армии большой ущерб. Такими были авторитет и слава ученого-математика, механика, инженера.

Архимед родился и жил в Сиракузах. В молодые годы он, желая пополнить знания, побывал в Египте, где в г. Александрии познакомился с выдающимися математиками и астрономами того времени. В Египте Архимед интенсивно изучал математику и астрономию, руководил сооружением плотин и дамб.

Возвратившись в Сиракузы, Архимед более 25 лет посвятил научной и инженерно-изобретательской деятельности.

Математические открытия Архимеда — бесценный научный клад. Они послужили источником революционных сдвигов в науке. Наибольшее внимание Архимед уделял вычислению длины кривых линий, площадей криволинейных фигур, поверхностей и объемов тел. Особенно плодотворной для дальнейшего развития математики была разработка Архимедом фундаментальных идей и методов решения различных задач. В частности, для вычисления поверхностей и объемов криволинейных фигур Архимед развил и углубил „метод исчерпывания" Евдокса Книдского.

До открытия интегрального и дифференциального исчисления это был единственный научно обоснованный метод исследования предельных процессов. Архимед впервые точно выразил длину окружности, площадь круга и его частей через радиус окружности.

Трудно даже перечислить все открытия ученого, сделанные им в различных отраслях знаний. Он предложил поразительный счет, с помощью которого удобно записывать любые числа, нашел удивительно изящное соотношение объемов цилиндра и вписанных в него шара и кругового конуса (3 : 2 : 1). Чертеж с изображением этих геометрических тел ученый завещал высечь на своем надгробии.

Выдающиеся результаты получил Архимед, вычисляя площади криволинейных фигур и объемы тел. Его формулы равносильны следующим соотношениям:

$$\int_0^a x\,dx = \frac{a^2}{2}; \quad \int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}; \quad \int_0^a (x^2 + bx)\,dx = \frac{a^3}{3} + b\,\frac{a^2}{2}.$$

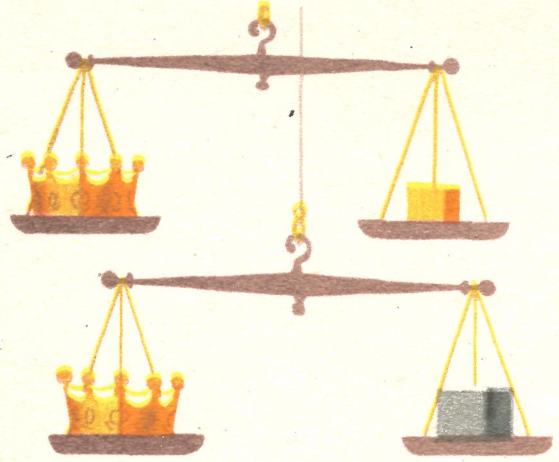
В последнем случае было, в сущности, доказано, что

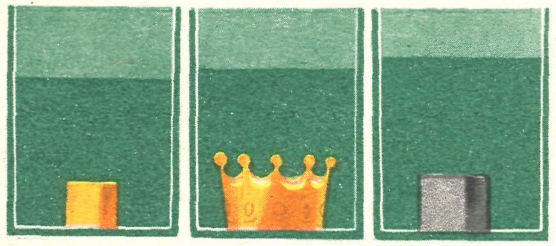
$$\int_0^a (x^2 + bx)\,dx = \int_0^a x^2\,dx + \int_0^a bx\,dx.$$

Важным открытием Архимеда был закон рычага, позволивший необычайно широко использовать огромные возможности этого простейшего механизма.

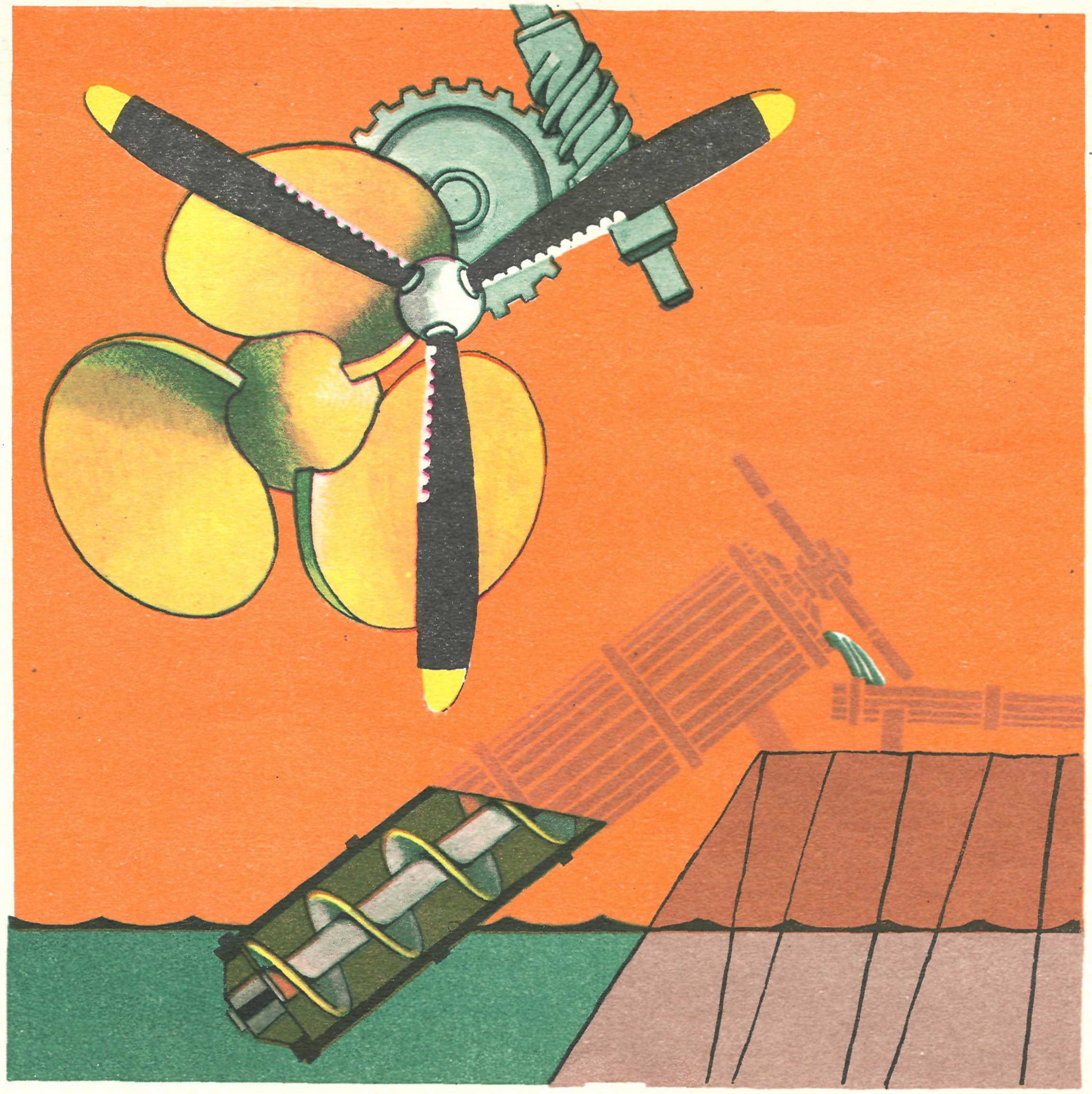
Архимед открыл закон, названный его именем и лежащий в основе современной гидро- и аэростатики.

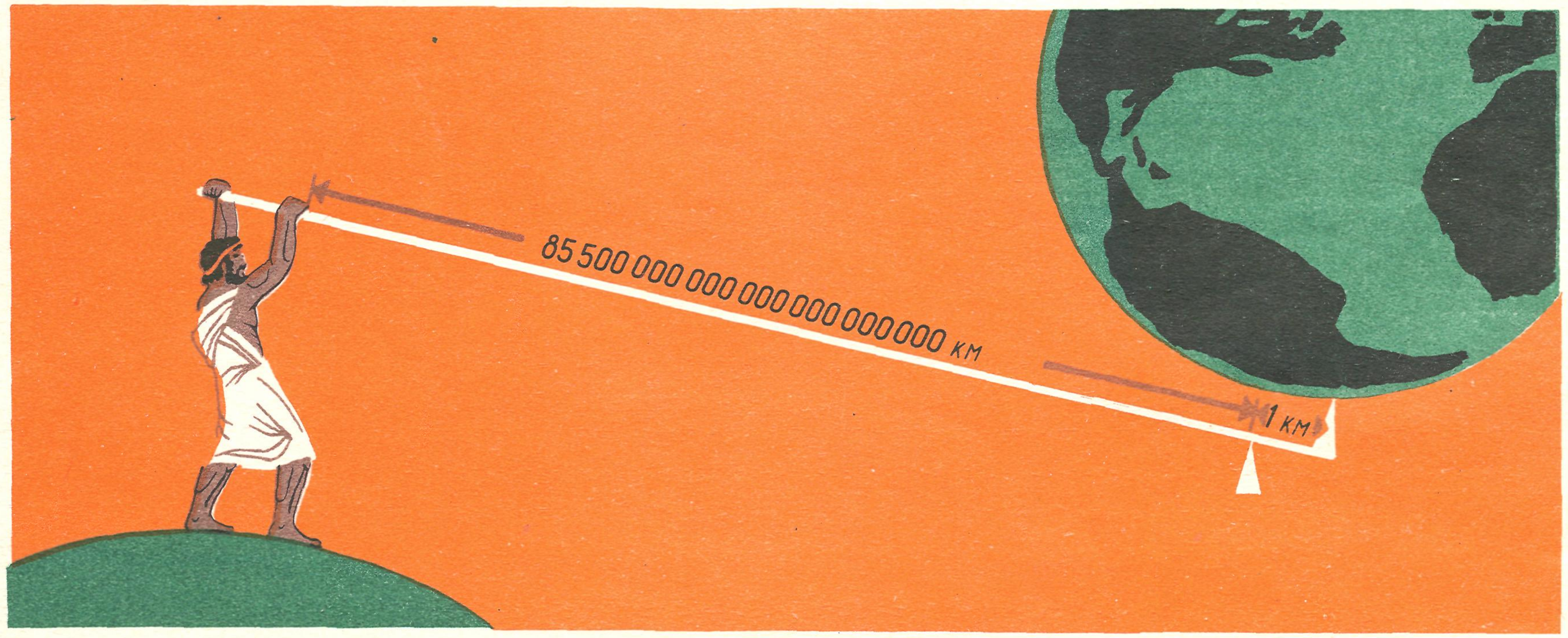
14. Архимед





Одна из многочисленных задач, связанная с именем Архимеда: корона сиракузского царя Гиерона изготовлена из сплава золота и серебра. Вес этой короны в воде составляет 93,55 % ее веса в воздухе. Зная, что 1 кг золота теряет в воде $\frac{4}{77}$ кг, а серебро $9\frac{11}{21}$ % своего веса, определить массу каждого металла, использованного на изготовление короны.



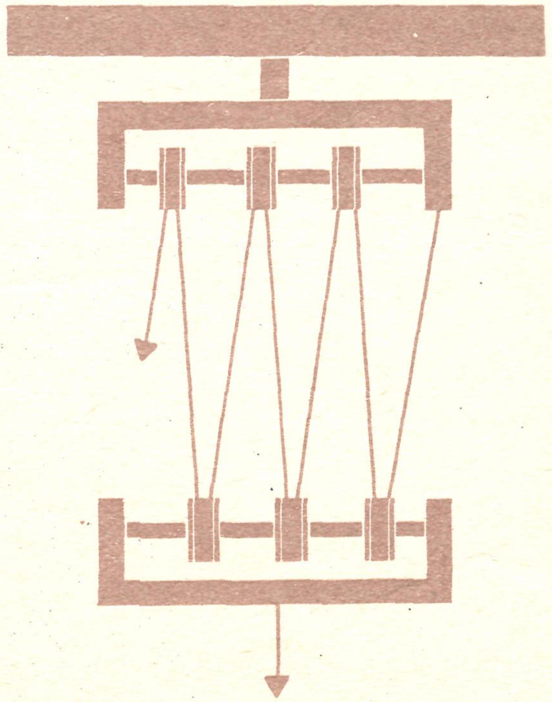


Биографы Архимеда рассказывают, что ученый, установив закон рычага, произнес гордую фразу: „Дайте мне точку опоры, и я сдвину землю". Отсюда произошло выражение „архимедов рычаг", употребляемое в значении „двигательная сила" вообще.

Сегодня трудно назвать все применения гениального изобретения Архимеда — его улитки.

В Сиракузах воздвигнут памятник Архимеду, где он изображен с зеркалом в руках. По преданию, Архимед сжигал римские боевые корабли. Лишь в 1973 г. ученые на практике убедились, что эти предания имеют реальную почву. Архимед действительно мог сжигать римские корабли с помощью солнечной энергии. Возможно, именно поэтому после неудачного штурма Сиракуз римляне повторный штурм организовали ночью, когда использование зеркал было невозможным.

Полиспаст — одно из многочисленных механических устройств, изобретенных Архимедом и широко используемых им при создании машин.



15. Три знаменитые задачи древности

Три знаменитые задачи древности (V в. до н. э.) сыграли исключительную роль в истории математики.

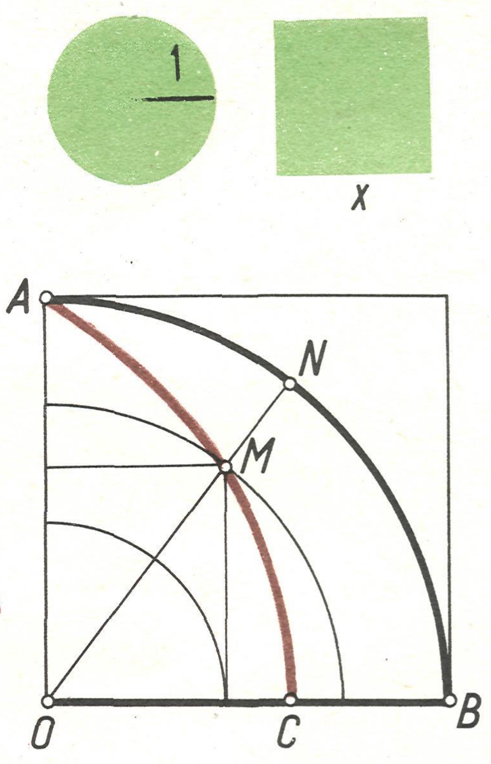
В классической постановке задач требовалось лишь с помощью идеальных циркуля и линейки за конечное число операций:

1) построить квадрат, равновеликий данному кругу (квадратура круга);

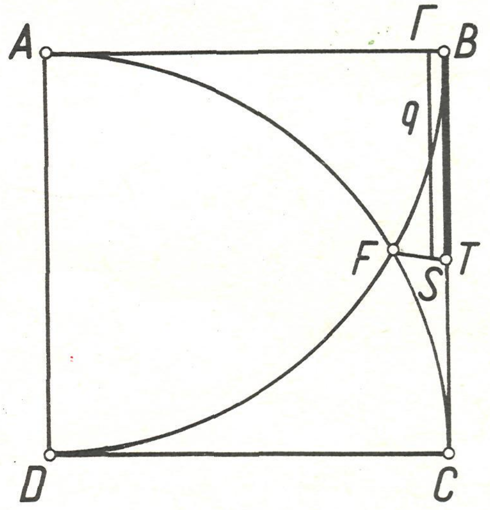
2) построить куб, имеющий объем, в два раза превышающий объем данного куба (удвоение куба);

3) разделить данный угол на три равные части (трисекция угла).

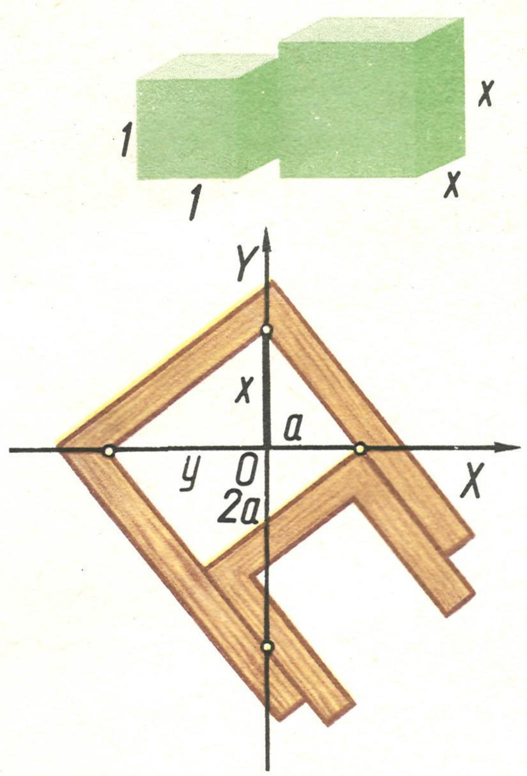
Поиск классических и различных неклассических способов решения трех знаменитых задач древности — это почти двухтысячелетний штурм наиболее волнующих тайн математики, проводимый учеными разных народов и стран. Благодаря этому были открыты новые трансцендентные и алгебраические кривые, усовершенствованы и созданы новые методы решения задач, созданы новые математические теории, вошедшие в золотой фонд научной мысли.



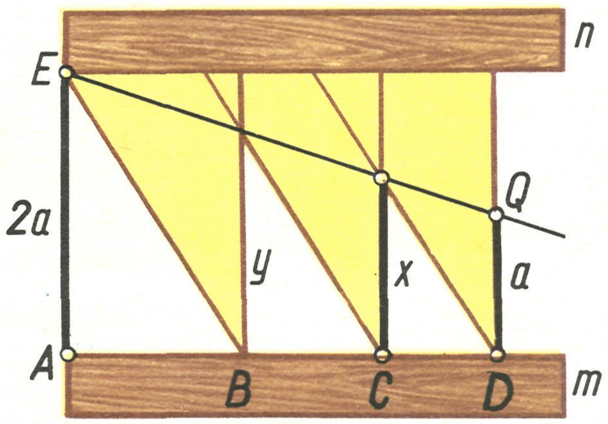
Квадратура круга, осуществленная древнегреческим математиком Диностратом (IV в. до н. э.) с помощью трансцендентной кривой — „квадратрисы".



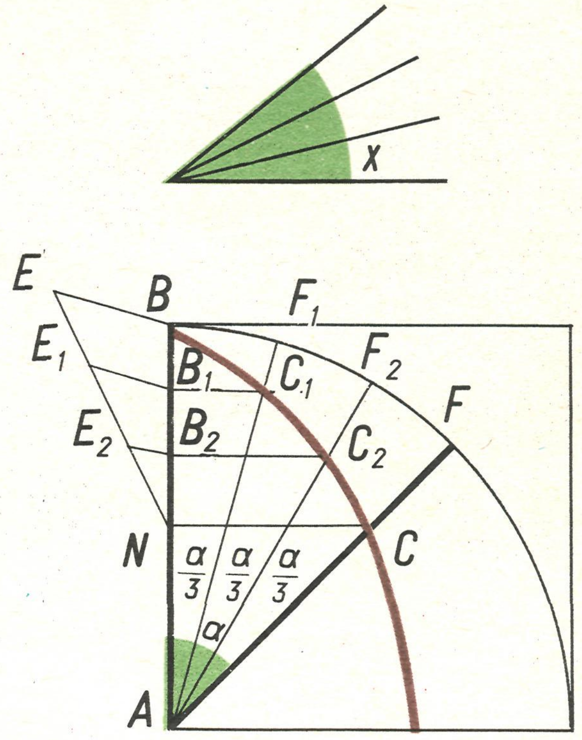
Одна из десяти квадратур круга известного английского философа-материалиста Томаса Гоббса (1588—1679).



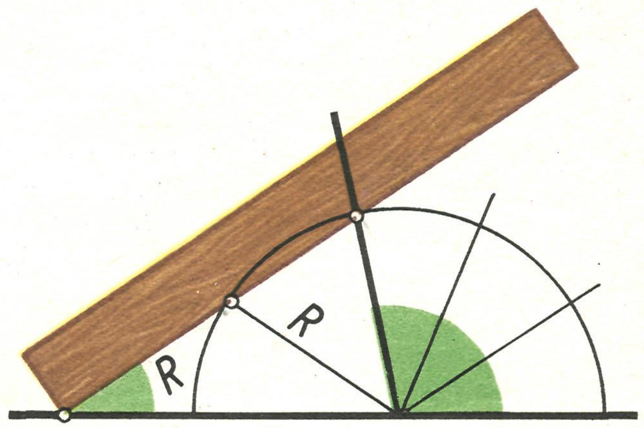
Механический метод решения делосской задачи (удвоение куба), приписываемый древнегреческому философу Платону (428—348 до н. э.).



Мезолябий Эратосфена Киренского для решения делосской задачи.



Трисекция угла, осуществленная Гиппием Элидским (V в. до н. э.) с помощью найденной им трансцендентной кривой — „квадратрисы".



Неклассическая трисекция угла, осуществленная Архимедом с помощью метода вставки.

15. Три знаменитые задачи древности

В V в. до н. э. греческие математики поставили три задачи, ставшие очень популярными и сыгравшие важную роль в истории математики.

Задача квадратуры круга равносильна построению отрезка π и, таким образом, неотъемлема от истории этого замечательного числа. Простота формулировки задачи и найденные квадратуры некоторых лунок создали иллюзию ее разрешимости. Некоторые ученые, пренебрегая требованием квадратуры круга, лишь с помощью циркуля и линейки искали иные способы. Поиски решения этой задачи часто обогащали математику.

В 1873 г. французский математик Шарль Эрмит (1822—1901) доказал, что числа e и e^2 не могут быть корнями никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, т. е. являются числами трансцендентными. Доказательство Эрмита послужило немецкому математику Фердинанду Линдеману (1852—1939) ключом при доказательстве трансцендентности числа π. Результаты Ф. Линдемана изложены в его труде „О числе π". Из них следовало, что задача квадратуры круга в ее классической постановке неразрешима, хотя и в наши дни встречаются „квадратурщики", пытающиеся решить ее.

С задачей удвоения куба связана старинная легенда. В ней повествуется о том, что во время одной из эпидемий чумы на острове Делос его жители обратились к оракулу за советом. Он порекомендовал увеличить жертвенник божества так, чтобы объем его стал в два раза больше прежнего. Так возникла вторая задача, названная делосской.

Если ребро заданного куба обозначить через a, а искомого — через x, то делосская задача приводит к уравнению $x^3 = 2a^3$. На языке алгебры решение задачи сводилось к представлению $\sqrt[3]{2}$ в виде конечной суперпозиции квадратных радикалов. Гиппократ свел делосскую задачу к нахождению двух средних пропорциональных x и y к числам a и $2a$. Действительно, из пропорции

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

следует, что $2a^2 = xy$ и $ay = x^2$.

Перемножая почленно эти два равенства, получим $2a^3y = x^3y$, откуда $2a^3 = x^3$.

Известны многочисленные примеры других, „неклассических" методов решения делосской задачи. Возможно, именно поиски решения этой задачи обусловили введение в математику необычайно важных кривых — конических сечений.

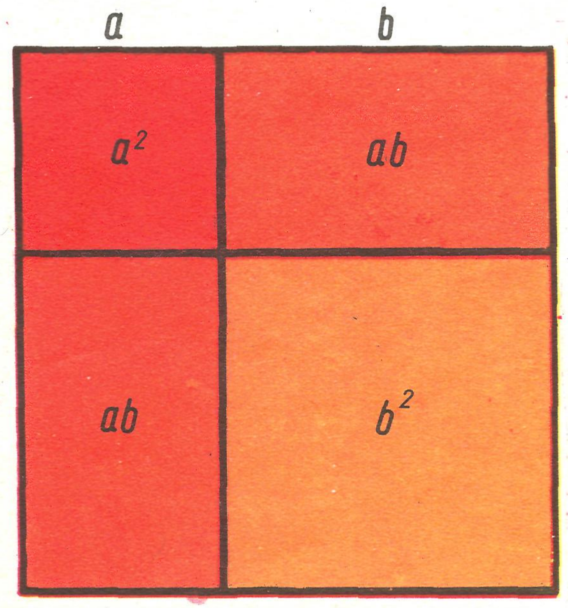
Первая попытка доказательства неразрешимости частного случая кубических уравнений ($x^3 + 2x^2 + 10x = 20$) в квадратичных иррациональностях принадлежит Леонардо Пизанскому. Однако только через четыре столетия Декарт сформулировал утверждение о том, что корни кубического уравнения с рациональными коэффициентами можно построить с помощью циркуля и линейки тогда и только тогда, когда это уравнение имеет хотя бы один рациональный корень. Первое строгое доказательство этого утверждения было сделано только в 1837 г.

Задачу трисекции угла древние математики не сумели свести к кубическим уравнениям. Если обозначить $a = \sin a$, $x = \sin \dfrac{a}{3}$, то задача сводится к кубическому уравнению $4x^3 - 3x + a = 0$.

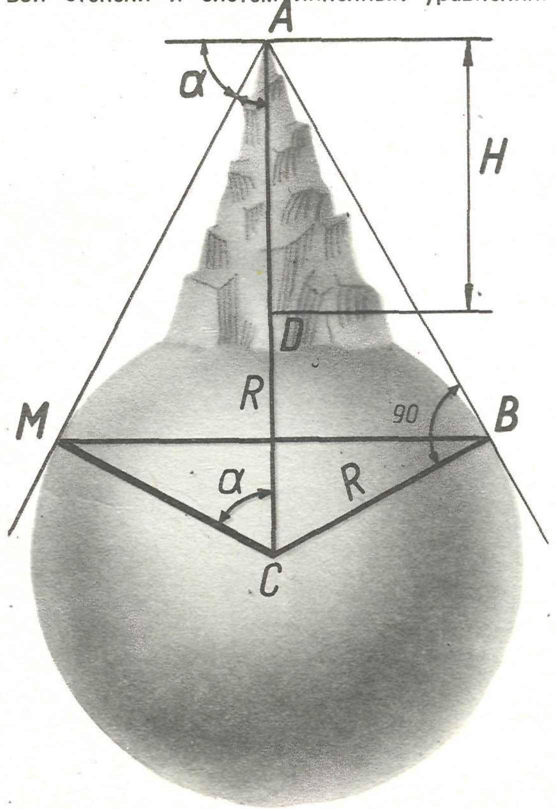
Важное значение для истории математики задачи о трисекции угла состоит в том, что при ее решении был применен метод „вставки" и введена первая трансцендентная кривая — квадратриса, изобретение которой приписывают известному софисту Гиппию Элидскому. Уравнение этой кривой в декартовых координатах $x = \operatorname{ctg} \dfrac{\pi x}{2a}$, а в полярных $\rho = \dfrac{a(\pi - 2\varphi)}{\pi \cos \varphi}$, где $a = AB$.

Мухаммед бен Муса аль-Хорезми (783 — ок. 850) — выдающийся среднеазиатский математик. Жил и работал в столице арабского халифата Багдаде, возглавлял библиотеку „Дома мудрости" (своеобразной академии). Арифметический трактат ученого „Об индийском счете" послужил началом к введению десятичной нумерации в Азии и Европе. Алгебраический трактат аль-Хорезми „Краткая книга об исчислении алгебры и альмукабалы" стал основой алгебраической науки (именно этому трактату данная ветвь математической науки обязана своим названием). Тригонометрические таблицы ученого были одними из первых на Ближнем и Среднем Востоке.

Латинизированная фамилия ученого (Algorithmi) сначала служила названием всей десятичной позиционной системы счисления, а в наше время является наименованием одного из фундаментальных математических понятий — понятия алгоритма.

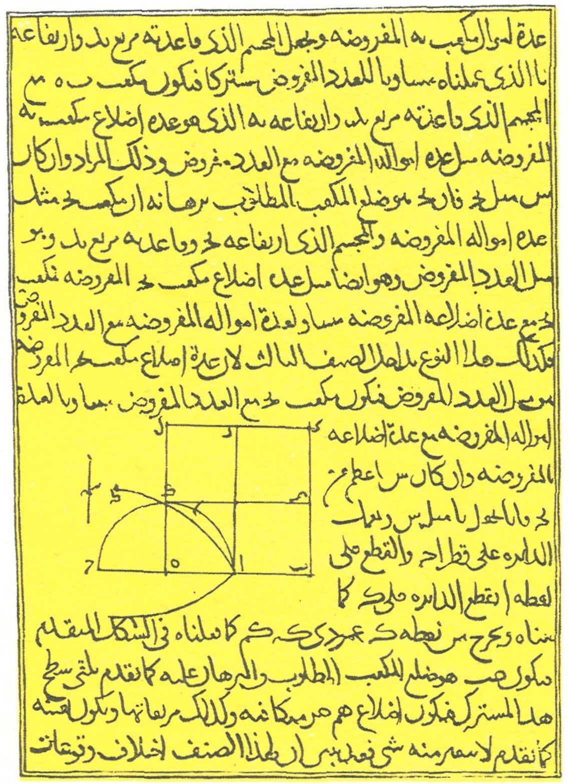


Абу Рейхан Мухаммед ибн Ахмед аль-Бируни (973—1048) — выдающийся среднеазиатский математик и естествоиспытатель. Родился в столице Хорезма городе Кяте (ныне г. Бируни Узбекской ССР). Аль-Бируни был ученым-энциклопедистом. Его исследования относятся к математике, астрономии, географии, натурфилософии, минералогии, истории, этнографии. В теоретической арифметике Бируни изучал суммирование рядов и комбинаторные задачи, отдельный трактат посвятил „правилу трех", рассматривал различные способы нахождения числа π, классифицировал различные способы решения уравнений первой степени и систем линейных уравнений.

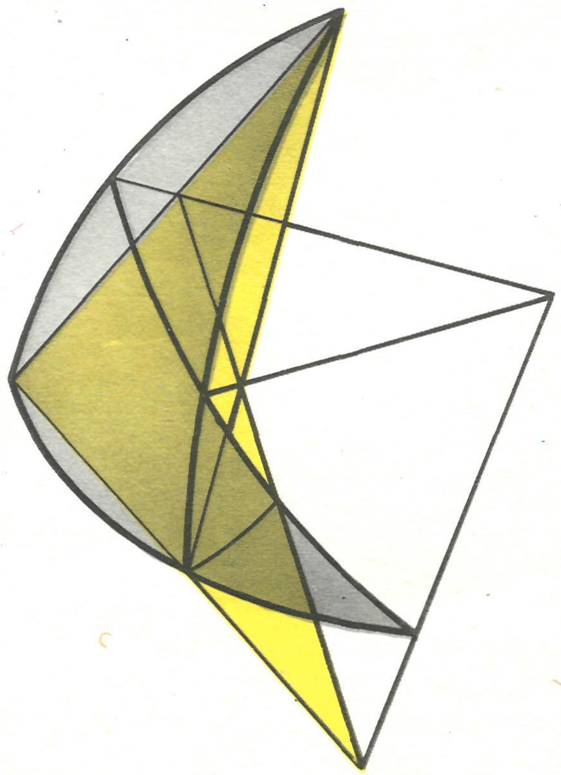


Абу-л-Фатх Омар ибн Ибрахим Хайям (1048 — ок. 1131) — выдающийся среднеазиатский ученый и поэт. Научные труды посвящены математике, астрономии, философии. Предложил подробную классификацию и теорию графического решения кубических уравнений. Большое внимание уделял теории параллельных прямых и впервые явно заменил V постулат Евклида более простым утверждением. В сущности, именно он впервые вывел некоторые теоремы неевклидовых геометрий Лобачевского и Римана.

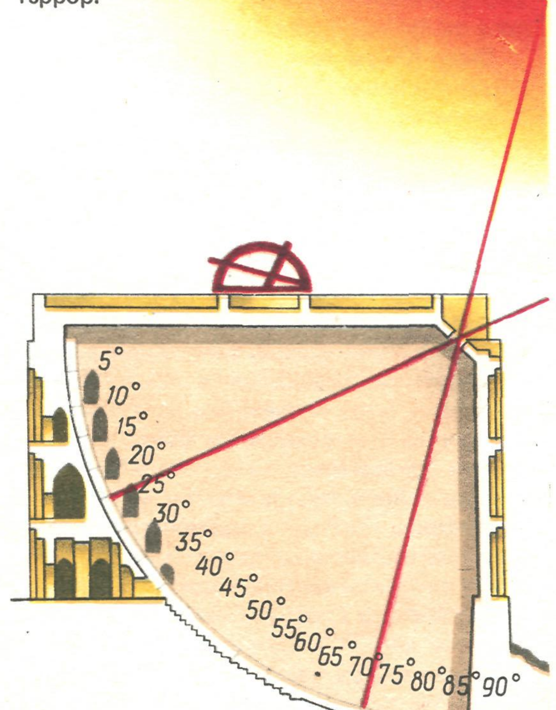
Мировую славу принесли Омару Хайяму его замечательные рубаи, по праву принадлежащие к шедеврам мировой лирики.



Мухаммед Насирэддин ат-Туси (1201—1274) — азербайджанский астроном и математик. Получил важные результаты в тригонометрии, которой посвятил отдельную книгу, выделив тем самым этот важный раздел математики. В теории параллельных прямых сформулировал новый постулат — эквивалент V постулата Евклида — и вывел ряд утверждений, являющихся ему равносильными. Свои работы ученый посвятил астрономии, медицине, минералогии, логике. Он перевел и прокомментировал труды выдающихся ученых Древней Греции.



Мухаммед Тарагай Улугбек (1394—1449) — выдающийся узбекский астроном и математик, организатор и руководитель Самаркандской астрономической школы, где работали такие выдающиеся математики, как аль-Каши (ум. ок. 1430 г.) и аль-Кушчи (ум. в 1474 г.). Улугбек активно способствовал созданию в Самарканде научной школы, открыл высшее учебное заведение (медресе). Выдающиеся результаты были получены учеными, работавшими в знаменитой Самаркандской обсерватории. По приговору реакционного духовенства Улугбек предательски был убит, а его обсерватория уничтожена. Некоторые ученые спаслись, покинув Самарканд, где после гибели Улугбека свирепствовал террор.



16. Математика стран Средней Азии

Математика стран ислама развивалась из потребностей практики: землеустройства, геодезии, возведения военных сооружений, архитектуры, астрономии. Большое внимание уделялось разработке численных методов. В VIII—XVI вв. ученые Средней Азии внесли большой вклад в развитие общечеловеческой культуры, в том числе и математики.

Среди них узбекский математик, астроном и географ аль-Хорезми, багдадский ученый Сабит ибн-Корра (836—901), ученый-энциклопедист аль-Фараби (870—950), уроженец Хорасана, работавший в Багдаде, Абу-ль-Вефа (940—998), известный хорезмийский ученый-энциклопедист аль-Бируни, выдающийся ученый и поэт Омар Хайям, в Азербайджане работал выдающийся математик и астроном ат-Туси, в Самарканде в астрономической обсерватории Улугбека — аль-Каши и многие другие.

Аль-Хорезми подробно описал четыре арифметических действия, а также извлечение квадратного корня с помощью индийских цифр. Ат-Туси впервые описал известное правило извлечения корней любой степени. Аль-Каши в книге „Ключ арифметики" (1427) изложил теорию и правила действия над открытыми им десятичными дробями. Ученые много работали над разработкой теории приближенных вычислений. Оперируя с алгебраическими иррациональностями, математики готовили почву для формирования понятия иррационального числа. Постепенно исчезла грань, разделявшая геометрические несоизмеримости и алгебраические иррациональности.

Наряду с арифметическими задачами ученые рассматривали квадратные и кубические уравнения. Омар Хайям создал общую теорию кубических уравнений. В его трактате „О доказательстве задач алгебры и альмукабалы" (1074) алгебра впервые выступает уже как самостоятельная наука об уравнениях, называемых ныне алгебраическими, но поиски численного решения кубических уравнений были безуспешными.

Характерной чертой геометрии в странах ислама было широкое применение к решению геометрических задач численных методов. В „Трактате об окружности" аль-Каши, вычислив среднее арифметическое периметров правильных многоугольников (до многоугольника с $3 \cdot 2^{28}$ сторонами), вписанных в окружность и описанных около нее, нашел число π с 16 правильными десятичными знаками. Ученые стран ислама первыми высказали и мысль об иррациональности этого числа. Им удалось также решить много задач на геометрические построения. Были найдены различные способы построения параболы, эллипса, приближенно построены правильные семи- и девятиугольники.

Особое внимание уделялось теории параллельных прямых. Сабит ибн-Корра посвятил V постулату Евклида две книги. Он доказывал это утверждение, опираясь на один из его эквивалентов: *если две прямые удаляются одна от другой с одной стороны, то они непременно приближаются с другой.*

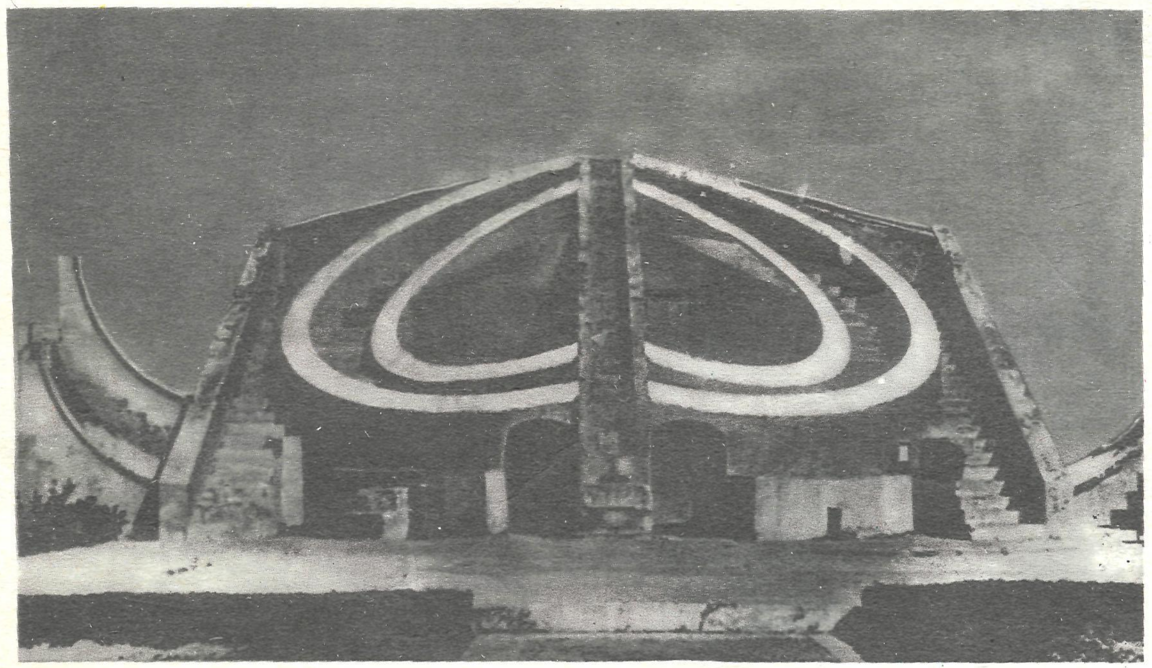
Омар Хайям ввел при доказательстве V постулата утверждение, которое он считал более простым, чем этот постулат: две сближающиеся прямые пересекаются, и невозможно, чтобы две сближающиеся прямые удалялись одна от другой в направлении сближения. Главную роль в рассуждениях Хайяма играл четырехугольник с двумя равными сторонами, перпендикулярными к основанию. Углы, прилегающие к четвертой стороне, равны один другому. Хайям рассматривал три гипотезы относительно величин этих углов. Он доказывал, что они не могут быть тупыми (гипотеза тупого угла), считал, что ему удалось также опровергнуть и гипотезу острого угла. Тогда правильной является гипотеза прямого угла. Отсюда следует истинность V постулата.

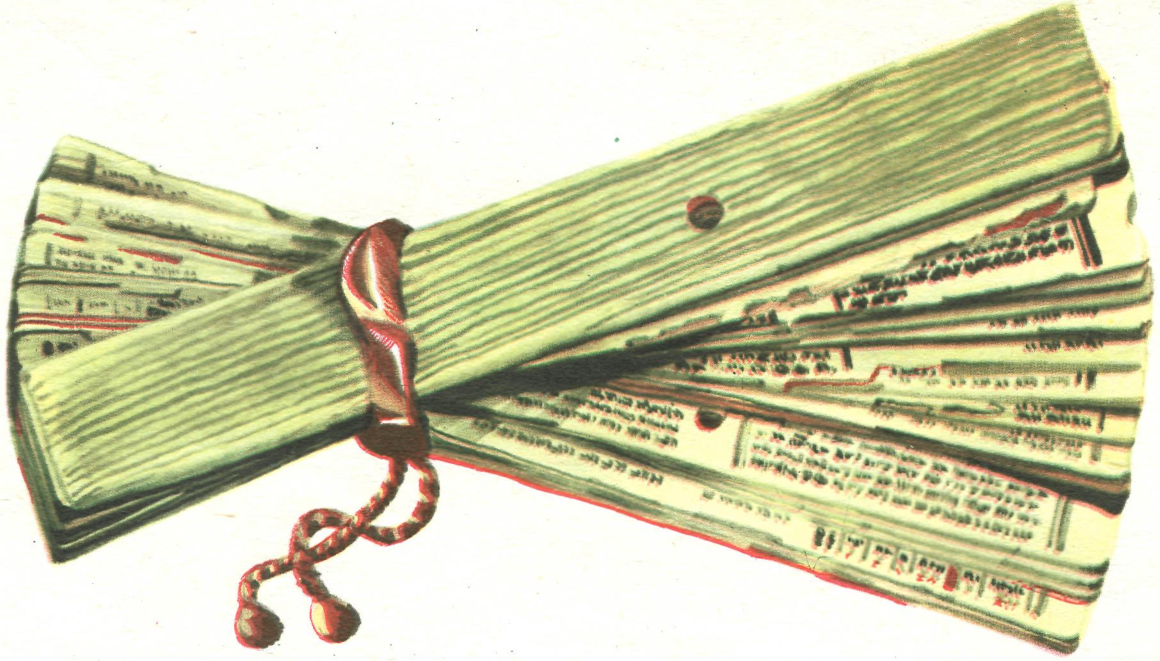
Ученые стран ислама, работавшие в области теории параллельных прямых, не допускали возможности существования неевклидовой геометрии. Все их усилия были направлены на доказательство V постулата с помощью утверждений, казавшихся им более простыми или очевидными. Таким образом, их доказательства чаще всего были ошибочными.

Выдающиеся результаты были получены в плоской и сферической тригонометрии. Ученые продемонстрировали большое вычислительное искусство при составлении тригонометрических таблиц, решили ряд сложных задач сферической тригонометрии.

Математики Средней Азии оказали большое влияние на развитие математических знаний в Западной Европе. Об этом свидетельствуют такие общеупотребительные термины, как „цифра", „арабская цифра", „алгебра", „алгоритм", „корень", „синус", многочисленные астрономические термины, названия многих звезд.

17. Математика в Индии

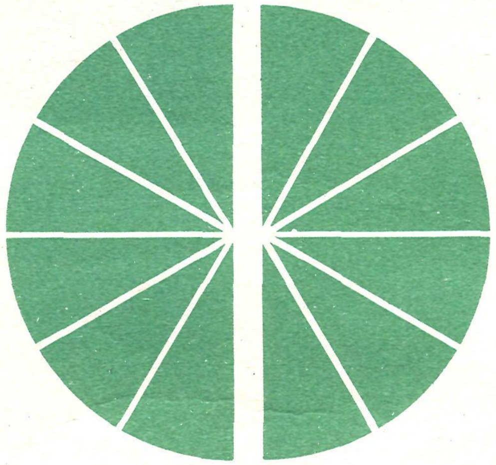


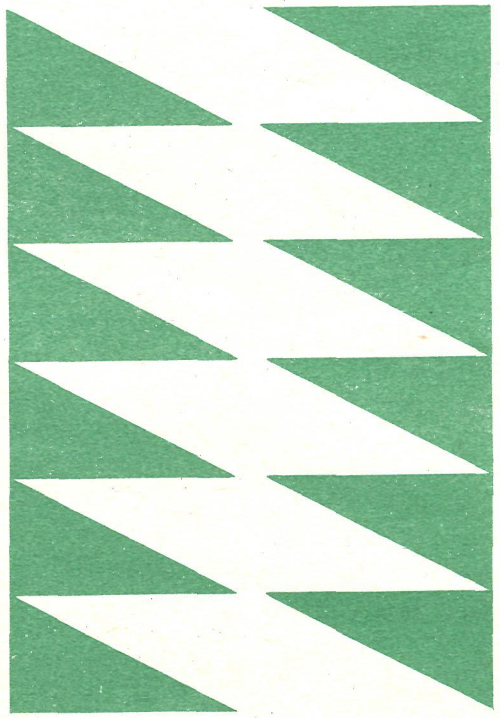


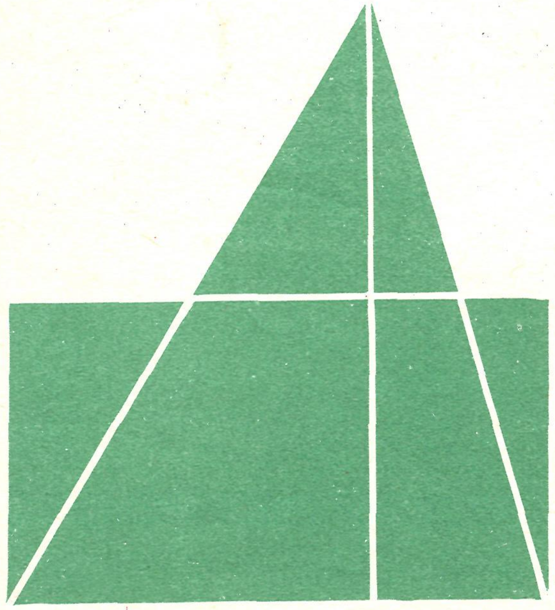
Индия — один из древнейших центров мировой цивилизации. Наибольшего расцвета математика в Индии достигла в V—XV вв. В этот период в Индии работали такие выдающиеся математики, как Ариабхата I (род. в 475 г.), Брахмагупта (ок. 598—660), Бхаскара I (VII в.), Ариабхата II (X в.), Бхаскара II (1114 — ок. 1185).

В Индии были разработаны арифметика, основанная на десятичной позиционной нумерации, правило трех и другие арифметические методы решения задач. Индийским ученым мы в значительной степени обязаны введением отрицательных и рациональных чисел.

В Индии не была создана дедуктивная математическая теория. Геометрические рассуждения, например, обосновывались выразительным рисунком с надписью „Смотри". Так, в XVI в. индийский математик Ганеша обосновал правила вычисления площади треугольника и круга.



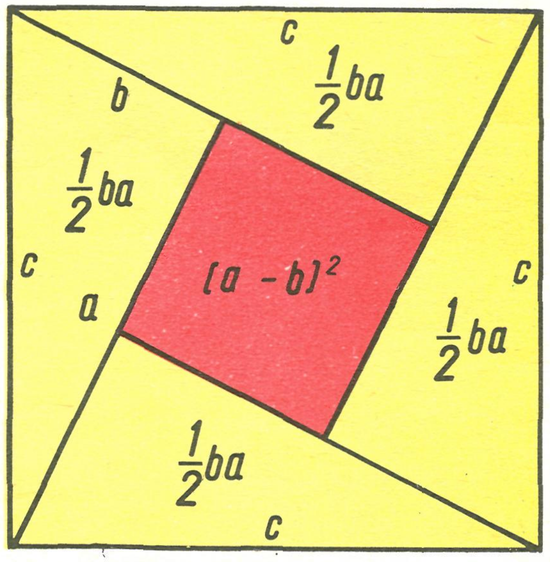


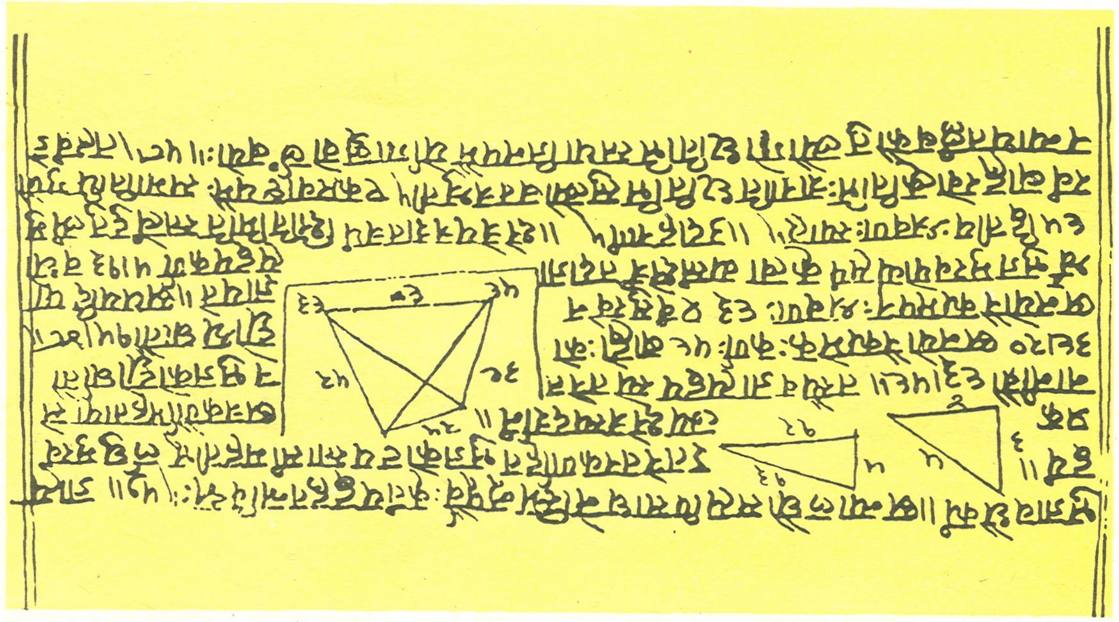


Крупнейшим математиком и астрономом средневековой Индии был Бхаскара II. Математике посвящены его арифметический трактат „Лилавати" (Прекрасная) и алгебраический „Биджаганита".

В „Лилавати" описаны действия с целыми и дробными числами, извлечение квадратного и кубического корней, дается решение различных арифметических и алгебраических задач. „Биджаганита" посвящена решению алгебраических уравнений первой и второй степени, диофантовых уравнений, рассматриваются некоторые геометрические вопросы, приведены два доказательства теоремы Пифагора.

Записанный в XIV в. на пальмовых листьях трактат „Лилавати" Бхаскары II, одно из его доказательств теоремы Пифагора и отрывок из рукописной копии на санскрите его математического трактата.





Математический гений Индии Сриниваса Рамануджан (1887—1920), профессор, член Английского королевского общества (с 1918).

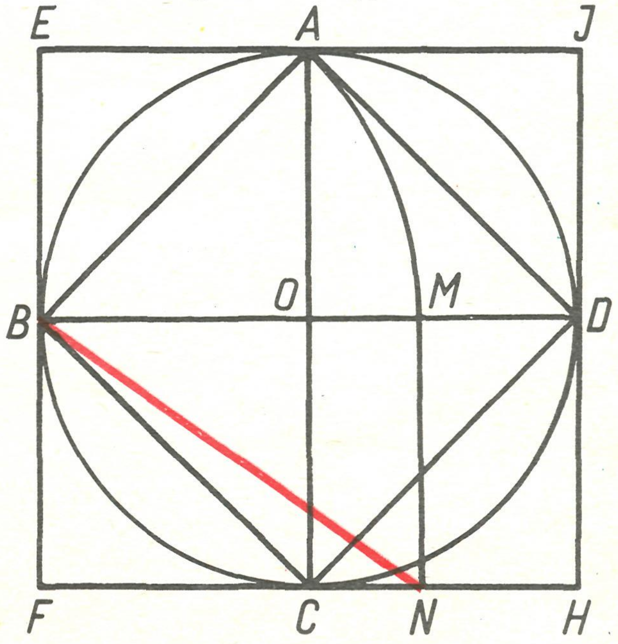
В древнеиндийском трактате „Сульва-сутра" площадь круга приравнивается к площади квадрата, сторона которого равна 13/15 длины диаметра круга:

$$BM = BA = \frac{d\sqrt{2}}{2} = \frac{d}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{d}{2} = MN = AO;$$

$$BN = \sqrt{BM^2 + MN^2} = \sqrt{\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{d^2}{4}} = \frac{d\sqrt{3}}{2}.$$

Если $\sqrt{3} \approx \frac{26}{15}$, то $BN = \frac{13}{15}d$.



17. Математика в Индии

Древнеиндийская цивилизация оказала большое влияние на общечеловеческую культуру и науку, в том числе и на развитие математики. Выдающийся математик Магавира (X в.) в первой главе своего трактата „Краткий курс математики" провозгласил хвалу этой науке: „Наука вычисления высоко почитается в науке любви, в науке о богатстве, в медицине, в архитектуре, в просодии, в поэтике и поэзии, в логике и грамматике и в других вещах... Она используется в связи с движением Солнца и других светил, с затмениями и соединениями планет и в связи с направлением, положением и временем и с ходом Луны" (см. Физико-математические науки в странах Востока. — М.: Наука, 1969. — Вып. 2 (V). — С. 100).

Именно в Индии была создана десятичная позиционная нумерация и арифметика, базирующаяся на ней. От индийских цифр „деванагари" (божественное письмо) происходит десятичная позиционная нумерация арабов и европейских народов.

Индийские ученые Ариабхата I, Брахмагупта, Бхаскара II, Рамануджан С. А. получили выдающиеся научные результаты. Ими были указаны алгоритмы действий с целыми и дробными числами, в частности, несколько способов возведения в квадрат и куб, извлечения квадратных и кубических корней.

Выдающимся достижением индийской математики явилось создание алгебраической символики: знаков для обозначения неизвестных, арифметических и алгебраических действий. Начиная с Брахмагупты, индийские ученые систематически пользовались отрицательными числами, рассматривая положительное число как имущество, а отрицательное как долг.

Брахмагупта сформулировал общее правило решения квадратных уравнений, представленных в канонической форме $ax^2 + bx = c$ $(a > 0)$.

Бхаскара II с помощью формул

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

и $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

упрощал довольно сложные выражения

$$\frac{\sqrt{9+\sqrt{54}+\sqrt{450}+\sqrt{75}}}{5+\sqrt{3}}=3\sqrt{2}+\sqrt{3}, \qquad \sqrt{5+\sqrt{24}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}.$$

Бхаскара II сформулировал правило существования двух положительных корней. Он рассматривал специально подобранные уравнения третьей степени, целочисленные корни которых находил с помощью несложных преобразований. Например, к обеим частям уравнения $x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$ он прибавлял $4x^2 + 400x + 1$ и получал

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 4x^2 + 400x + 10\,000.$$

Извлечение из обеих частей квадратного корня дает

$$x^2 + 1 = 2x + 100, \quad \text{откуда} \quad x = 11.$$

Рассматривая календарно-астрономические задачи, индийские математики достигли значительных успехов при решении диофантовых уравнений. Ариабхата I решил в целых числах уравнение $ax + b = cy$. Позднее было решено даже уравнение $ax^2 + b = y^2$ и его важный частный случай $ax^2 + 1 = y^2$.

Специальных геометрических трактатов в Индии не было, все геометрические сведения содержались в трудах по арифметике и астрономии.

Бхаскара II доказал теорему Пифагора, ограничившись лишь чертежом с надписью: „Смотри!".

Брахмагупта умел приближенно вычислять площадь произвольного четырехугольника как произведение полусумм противолежащих сторон. Для вычисления площади четырехугольника он пользовался также формулой Герона, аналогичной правилу Архимеда о вычислении площади трехугольника

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где a, b, c, d — стороны четырехугольника, p — полупериметр. Эта формула верна только для четырехугольников, вписанных в круг. Брахмагупта не оговаривает этого, но рассматривает лишь равнобедренные трапеции и четырехугольники с пересекающимися под прямым углом диагоналями, для которых эта формула справедлива.

Ариабхата I пользовался приближенным значением π в виде $\frac{62832}{20000}$, у Брахмагупты $\pi \approx \sqrt{10}$.

Математик Шридхара (IX—X вв.) приводит правила вычисления объема призмы $V = \frac{1}{3}SH$, объема срезанного конуса $V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 + rR)$, а Бхаскара II — правило вычисления объема шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где $\pi = 3{,}1416$.

В тригонометрии индийские математики ввели линии синуса, косинуса, открыли некоторые простейшие соотношения между ними:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad \sin\alpha = \cos(90^0 - \alpha),$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha.$$

Позднее были решены некоторые сложные астрономические задачи. Например, была определена высота h Солнца над горизонтом по широте φ местности, склонению δ Солнца и его часовому углу t. Определение высоты Солнца сводилось к вычислению стороны сферического треугольника на небесной сфере.

18. Математика Древней Руси

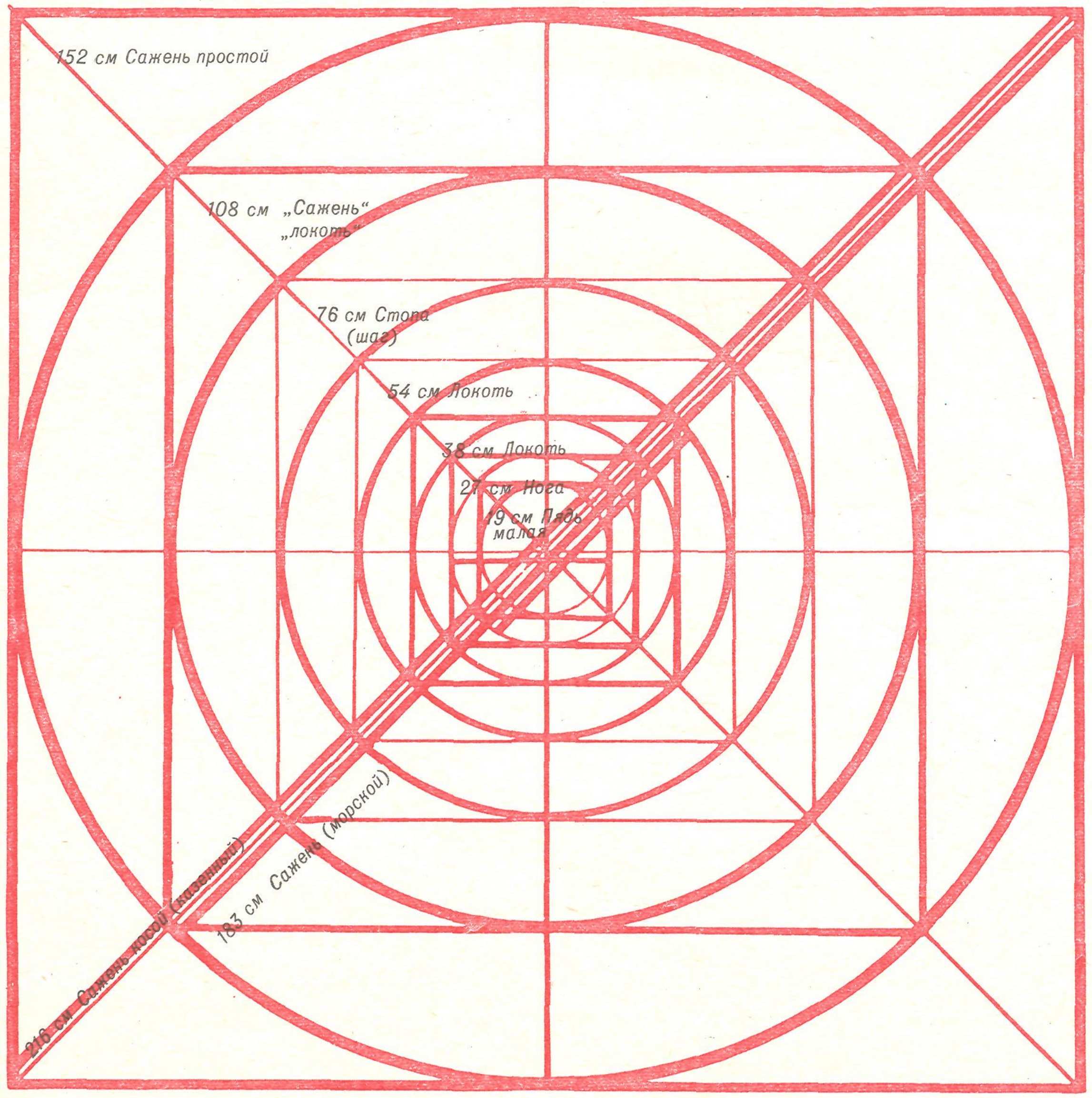
Фрагмент берестяной грамоты первой половины XIV в. В верхнем ряду записаны цифры 1, 2, 3 (частично), 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40 (частично); в среднем 60, 70, 80, 90, 100, 200 (частично), 300, ..., 700; в нижнем 2000, ..., 9000, 10 000, 40 000, от 50 000 остался след.

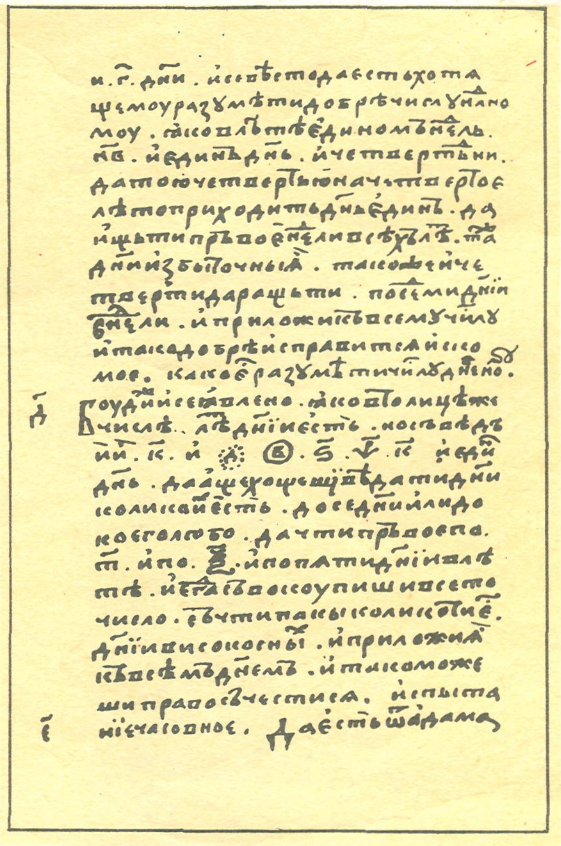
С глубокой древности развивались математические знания на Руси. Но татарское нашествие (XIII—XV вв.) нанесло огромный ущерб всем формам общественной жизни, надолго затормозив и развитие науки.

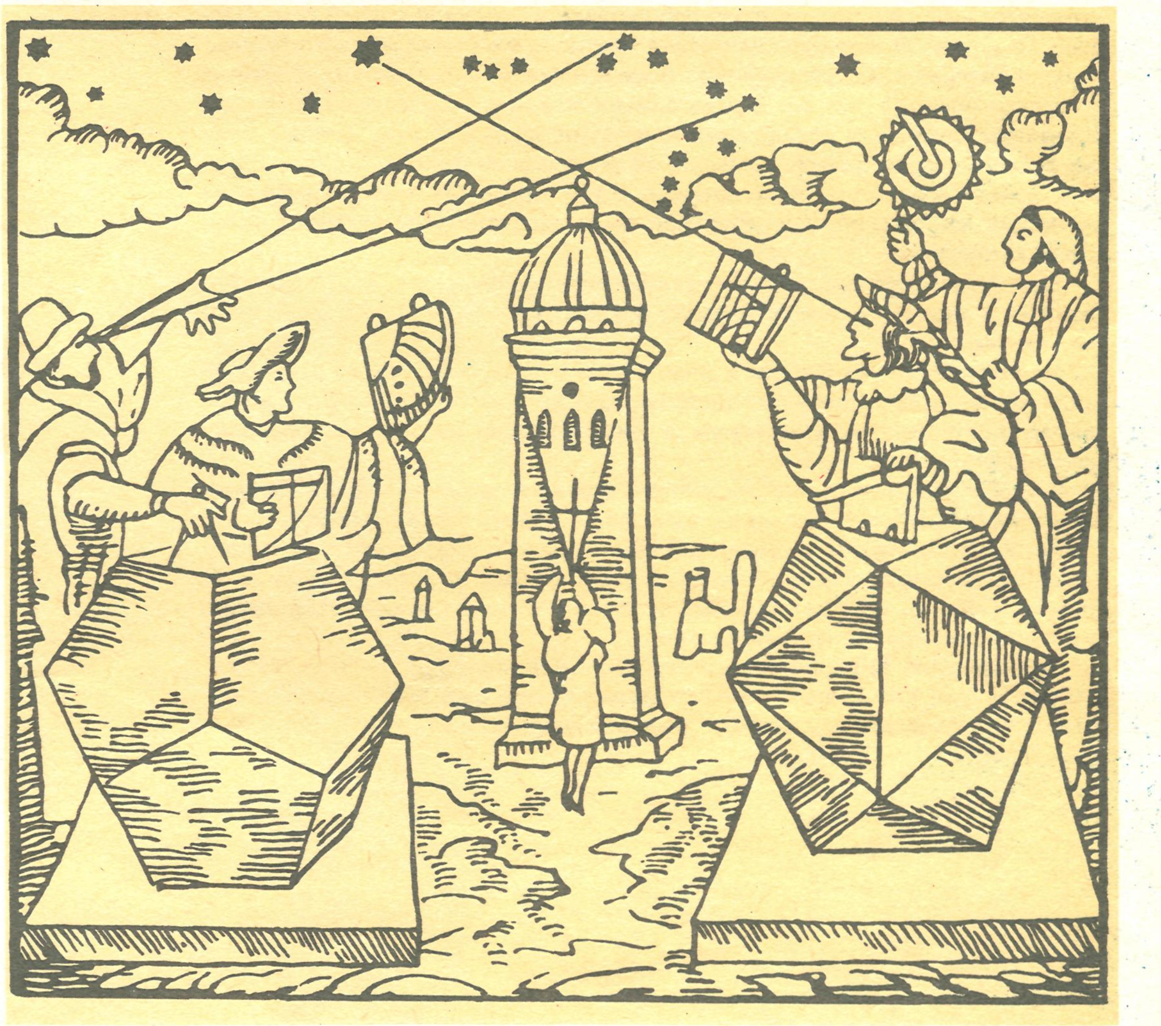
Погибли многочисленные памятники культуры и науки. Буквально по крупицам приходится восстанавливать достижения наших далеких предков в области математики.

Страница первого русского математического сочинения „Учение им же ведати человеку числа всех лет", написанного в 1136 г. первым русским математиком Кириком Новгородцем (род. в 1100 г.). „Учение..." возникло в связи с нуждами календарных вычислений и посвящено счету числа месяцев, недель и дней „от сотворения мира" (1136 г. считался 6644 г. от этой мифической даты).

На чертеже представлено геометрическое построение системы мер длины древнерусских зодчих (по Б. А. Рыбакову).

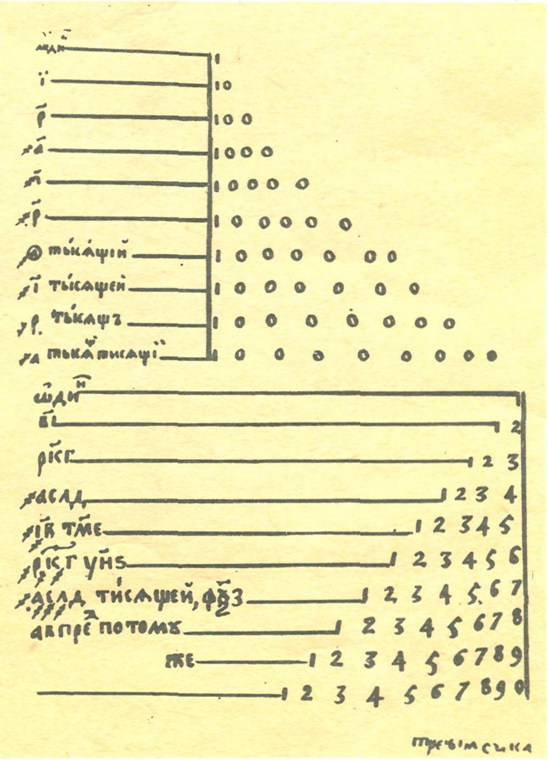




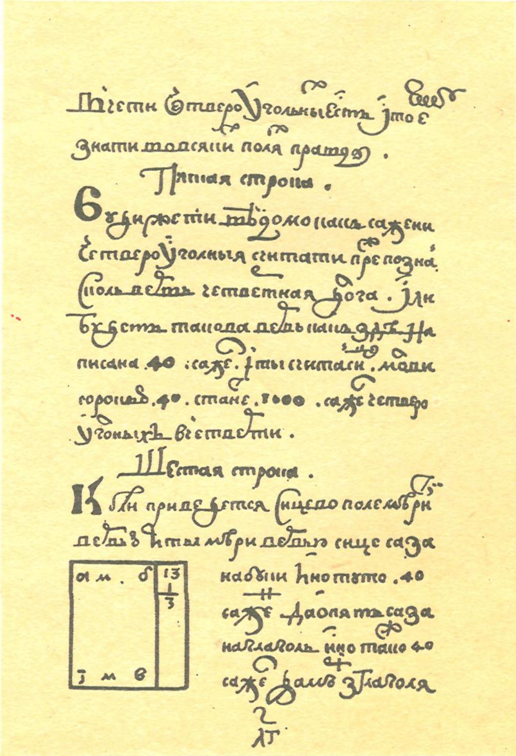


Начало первого русского рукописного пособия по геометрии Ивашки Елизарьевого сына, 1625 г.

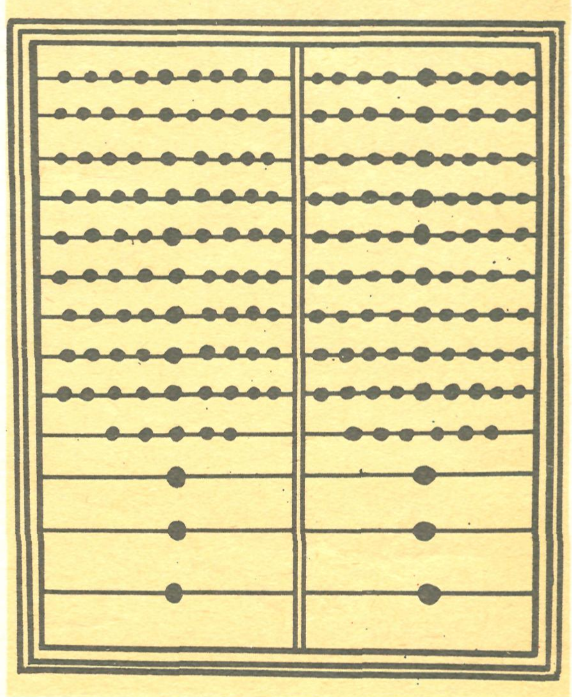
Примеры записи чисел славянскими и индийскими цифрами в арифметической рукописи XVII в.



Страница древнерусской математической рукописи XVII в.



Прибор для дощаного счета (состоял из четырех или двух полей). Приборы для такого счета уже в середине XVII в. называли просто счетами.



18. Математика Древней Руси

Первые сведения о развитии математики, а точнее арифметики, в России относятся к IX–XII вв. — эпохе процветания и упадка Киевской Руси. Первые дошедшие до нас математические тексты — это статьи математического и метрологического содержания, помещенные в юридическом сборнике „Русская правда" (IX в.). В этих статьях шла речь о вычислении приплода домашних животных, определении количества зерна или сена, которое можно собрать с поля данной площади, об определении суммы, которую обидчик должен выплатить потерпевшему, и т. д. Среди задач встречались и не имеющие прикладного значения, они лишь удовлетворяли интересы любителей вычислений.

Задачи сельскохозяйственного содержания подобны известной задаче Фибоначчи о кролях, решение которой привело к рекуррентному ряду чисел Фибоначчи.

Математические выкладки в ряде статей строились на основе древнерусской метрологии и денежной системы. Авторы этих статей свободно владели арифметическими действиями с именованными числами, оперировали десятками и сотнями тысяч.

В 1136 г. Кирик Новгородец написал первый из дошедших до нас математических трактатов — „Учение им же ведати человеку числа всех лет".

Кирик рассматривал и дробление часа. Он писал, что час делится на пять „первых дробных" чисел, которые, в свою очередь, делятся на пять „вторых дробных" и т. д., до „седьмых дробных", которых в часе 78125. Далее, считал Кирик, дробление невозможно.

Произведение Кирика и архитектурные памятники той эпохи свидетельствуют о том, что уровень математических знаний русских ученых соответствовал уровню математических знаний византийских математиков и лучших западноевропейских.

19. Нумерации

Вавилонская, сначала не последовательно позиционная, шестидесятеричная нумерация сформировалась около XXIV в. до н. э.

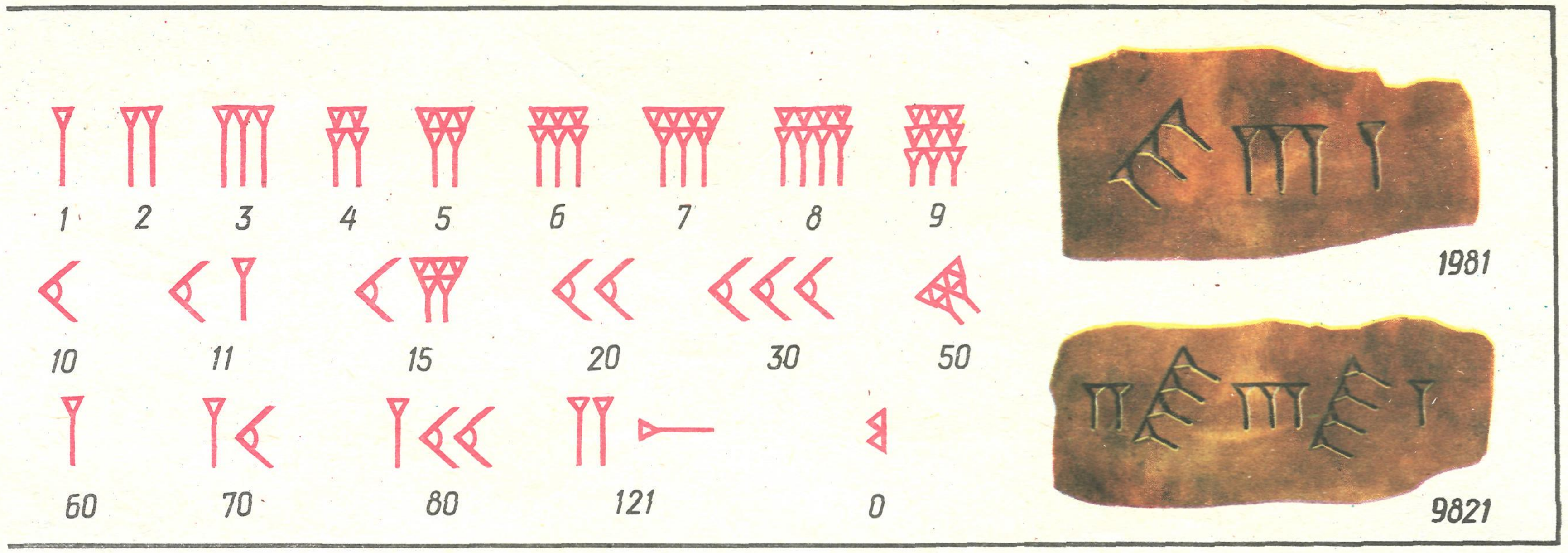
Характерным для вавилонской математики было широкое использование различных математических таблиц для значений: $\frac{1}{n}$, $m \times n$, n^2, n^3, $n^2 + m^3$, $\sqrt{n}$, $\sqrt[3]{n}$, $\frac{1}{125 \cdot 2n}$. При помощи разных таблиц выполнялись действия умножения и деления, осуществлялось численное решение уравнений и их систем. Вавилоняне свели деление a на b к умножению a на $\frac{1}{b}$.

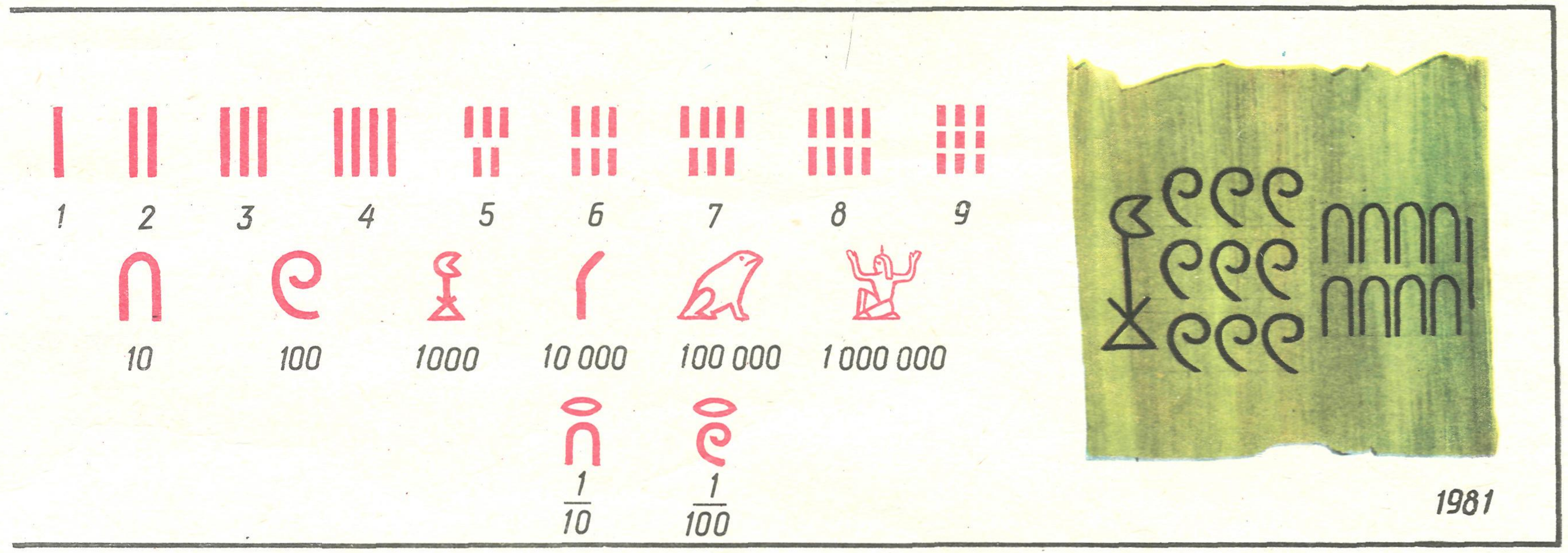
Египетская иероглифическая десятичная непозиционная, чисто аддитивная, нумерация без знака нуля возникла около XXX в. до н. э. Каждый иероглиф изображал слово или слог. Позже иероглифическое письмо было заменено иератическим, в котором от каждого иероглифа остались только характерные черты. Еще более упрощенным было демотическое письмо.

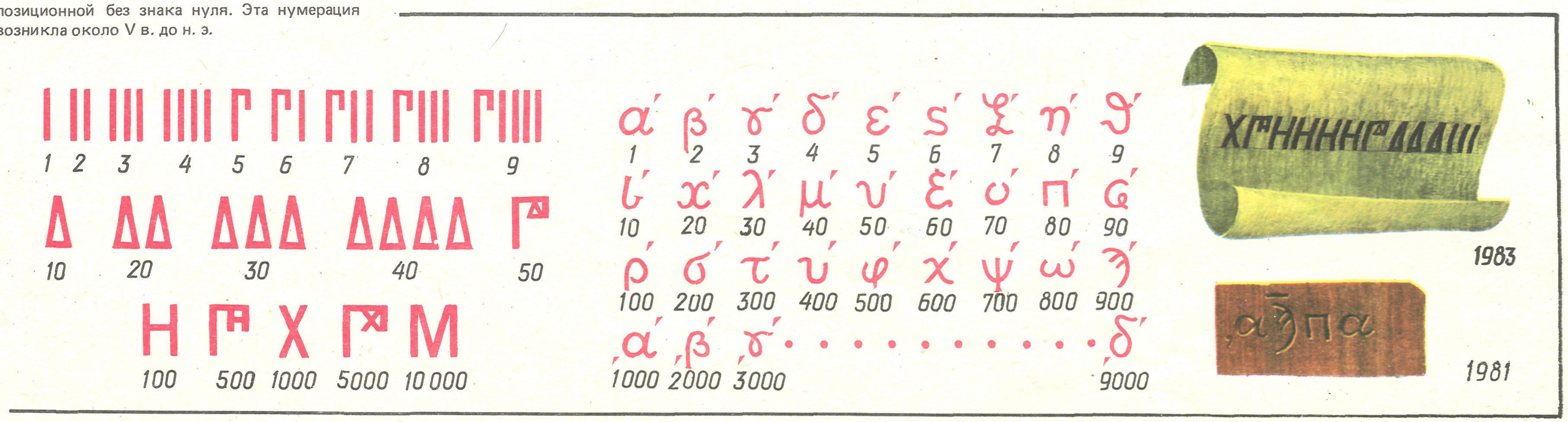
Древние египтяне использовали отдельные иероглифы только для некоторых обыкновенных дробей: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$. Но им не было известно общее понятие обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$. Они знали только так называемые аликвотные дроби, т. е. дроби вида $\frac{1}{n}$, возникающие в процессе дробления целого на равные части. Для обозначения дробей вида $\frac{1}{n}$ применялся специальный знак $\circ$ („рот" — часть), который ставился над числом. Таким образом, $\overset{\circ}{n}$ означало $\frac{1}{n}$.

Аттичная иероглифическая, непозиционная нумерация была чисто аддитивной, без знака нуля. Возникла она около VII—VI вв. до н. э.

Ионийская алфавитная нумерация была непозиционной без знака нуля. Эта нумерация возникла около V в. до н. э.







В связи с усложнением практической деятельности люди вынуждены были искать достаточно удобные и надежные способы кодирования числовой информации о количественных отношениях и пространственных формах действительности. Сначала они просто делали зарубки на дереве или кости, завязывали узелки на веревках. Отсюда и выражения: „Заруби себе на носу", „Завяжи узелок на память".

Позднее у разных народов возникли специальные знаки для обозначения чисел. Обозначение чисел цифрами называется нумерацией (от лат. numeres — число). Сначала запись чисел осуществлялась на основе аддитивного (от лат. additio — сложение) и реже субстрактивного (substractio — вычитание), а несколько позднее — мультипликативного (multiplicatio — умножение) принципов.

Аддитивный принцип состоит в том, что вводится лишь несколько основных знаков (например, для 1, 10, 100), а остальные числа вида n, $10n$, $100n$ записывают, повторяя n раз соответствующие знаки. Аддитивная нумерация была шагом вперед по сравнению с инструментальным счетом, осуществляемым с помощью палочек, ракушек и других предметов. Чисто аддитивной была египетская нумерация.

В некоторых нумерациях сочетание цифр m и n, где $m < n$, означает разность $n - m$. Здесь соблюдается субстрактивный принцип.

Дальнейшим шагом по усовершенствованию нумераций явилось открытие мультипликативного принципа, при котором сочетание чисел означает их произведение. Согласно мультипликативному принципу, называются десятки и сотни, например в русском языке — 20, 30, 50, 80, 200, 900. По субстрактивному принципу строится название числа 90 как результат объединения первоначального названия этого числа „девять-десять" и выражения „10 до 100". Яркими примерами применения аддитивного и субстрактивного принципов является римская нумерация. Цифры II, VI, VII, VIII, XX, XXX и т. д. построены по аддитивному принципу; IV, IX, XL -- по субстрактивному.

В свое время были довольно распространенными алфавитные нумерации. Ими пользовались греки, сирийцы, армяне, грузины, славяне и другие народы. Создание алфавитных нумераций явилось значительным шагом вперед, так как позволило кратко записывать числа, быстрее выполнять вычисления.

Клинопись изобрели шумеры, населявшие Междуречье. Она была заимствована разными народами, населявшими позднее эту территорию, прежде всего аккадянами. Культуру, созданную этими народами, называют шумеро-вавилонской, или вавилонской. Она просуществовала почти до нашей эры. Для записи чисел шумеры пользовались двумя знаками: вертикальный знак обозначал единицу, горизонтальный — десять. С помощью соответствующих комбинаций их можно было записать любое число до 59 (см. таблицу). Использовались и более компактные формы записи.

Итак, шумеры вели счет и в десятичной, и в шестидесятеричной системах счисления, однако позиционный принцип осуществлялся лишь в шестидесятеричных разрядах. Это дает право рассматривать их нумерацию как шестидесятеричную позиционную.

Однако из-за отсутствия у вавилонских математиков эквивалента современного нуля в начале и в конце числовых выражений запись чисел является, вообще говоря, неоднозначной.

Запись числа $20 \cdot 60$ могла соответствовать любому числу вида $20 \cdot 60^n$: $20 \cdot 60^2$, $20 \cdot 60^7$ и т. д.; запись числа $5 \cdot 60 + 32$ могла обозначать $5 \cdot 60^2 + 32 \cdot 60$, $5 \cdot 60^3 + 32 \cdot 60^2$, $5 + \frac{32}{60}$, $\frac{5}{60} + \frac{32}{60^2}$ и т. д. В астрономических текстах эпохи Селевкидов (III в. до н. э.) уже встречается эквивалент нуля. И все-таки нуль писали лишь в средине и не ставили в конце числа.

Особые знаки существовали лишь для дробей $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$. Остальные дроби записывали на основе шестидесятеричной позиционной системы счисления.

Древние египтяне разработали аддитивную непозиционную иероглифическую нумерацию без нуля. Цифры от 1 до 9 обозначали вертикальными палочками. Далее применялись отдельные знаки.

Египтяне не были знакомы ни с систематическими (например, десятичными), ни с обыкновенными дробями. Им было чуждо определение дроби как пары чисел m и n. Частное вида $m : n$ египтяне представляли с помощью так называемых аликвотных (от лат. aliquot — несколько) дробей $\frac{1}{n}$. Аликвотные дроби обусловили разработку в вычислительной технике Древнего Египта теоретико-числовой задачи разложения дробей на сумму аликвотных. Она сводилась к составлению таблицы канонического разложения дробей вида $\frac{2}{n}$ на сумму аликвотных, например:

$$\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}; \quad \frac{2}{61} = \frac{1}{40} + \frac{1}{244} + \frac{1}{488} + \frac{1}{610}.$$

Именно такими таблицами начинается папирус Райнда.

Обозначение чисел в египетской нумерации также свидетельствует о тесной связи математики с практической деятельностью людей. В самом деле, знак 10 — это символ пута — веревки для стреноживания коров, 100 — веревка для измерения полей, 1000 — цветок лотоса, 10 000 — указательный палец, 100 000 — головастик, 1 000 000 — удивленный человек, 10 000 000 — огромное количество лучей восходящего Солнца.

Первая греческая письменная нумерация возникла в X в. до н. э. после появления письменности, созданной на основе финикийского алфавита. Эту нумерацию называют геродиановой, так как первым, кто описал ее, был грамматик Геродиан (ок. 170—ок. 240). Известны две ее разновидности — аттическая и беотийская (области Греции). Древнейшие записи с использованием геродиановой нумерации относятся к VI в. до н. э. Знаками ее были первые буквы соответствующих числительных:

Г (Γεντε) — для числа 5; Δ (Δεκα) — 10,

Н (Ηεκατον) — 100, Χ (Χiλioi) — 1000,

Μ (Μυρioi) — 10 000.

Другие большие числа записывали, комбинируя основные знаки.

На Руси были известны два алфавита: сначала глаголица, а затем — кириллица, которая в конце X в. вытеснила глаголицу. Древние рукописи, написанные кириллицей, относятся к XI в.

Кириллица стала основой древнерусской (славянской) алфавитной системы счисления. Без существенных изменений она сохранялась до XVIII в.

В славянской нумерации числа обозначались в порядке их следования буквами кириллицы: сначала 9 единиц, далее 9 десятков, и, наконец, 9 сотен.

Для того чтобы цифры в тексте отличить от букв, над ними ставили специальный знак — титло или просто черту. Каждая буква обозначала одно и то же число, независимо от ее позиции. Таким образом, славянская нумерация была непозиционной. И хотя знака нуля в ней не было, круглые числа записывали специальными символами. В частности, для обозначения разрядов чисел применялся знак перечеркнутой черты. Так можно было записать любое число до 10^6. С помощью вспомогательных символов записывали и очень большие числа — до 10^{50}.

В практике людям не приходилось оперировать большими числами, которые поэтому казались загадочными. Об этом свидетельствуют и названия больших чисел: 10 000 — тьма, 100 000 — легеон.

Несмотря на многовековую историю существования славянской системы счисления, до нас не дошли сведения о выполнении в ней каких-либо действий. Вероятно, в этой системе и не могли быть выполнены никакие вычисления.

Обозначений для дробей в славянской системе счисления не было вообще. Действия с ними и результаты записывали словами. Так поступал, в частности, и Кирик Новгородец.

Возможно, все выкладки представлялись с помощью „счета костьми" или разновидности абака — „дощаного счета".

С XVII в. славянскую алфавитную систему постепенно начала вытеснять современная позиционная десятичная система счисления. Распространение ее обусловило усовершенствование дощаного счета — создание прибора, названного счетами.

Хотя имеются сведения, что славяне знали индийскую нумерацию с XI в., преимущественное ее применение относится здесь у этих народов к XV — XVII вв.

„Арифметика" Л. Ф. Магницкого (1703) завершает переход к позиционной нумерации. В ней уже нет ни единого упоминания об инструментальном счете. Славянский счет Магницкий использовал для нумерации страниц, а также для пояснения значения чисел индийской нумерации. Все выкладки у него были сделаны с помощью новой нумерации и сопровождались подробными пояснениями о выполнении действий с записанными в ней числами.

Своеобразную позиционную двадцатеричную нумерацию создал народ майя, обитавший на территории полуострова Юкатан. В системе майя было одно исключение, нарушавшее двадцатеричный принцип. Разрядными единицами нумерации майя должны были быть числа 1, 20, 400. В действительности же наименьшим трехзначным числом у майя было не 400, а 360. Здесь проявился удивительный рационализм народа, подчинившего абстрактную теорию практическим целям. Известно, что математические расчеты с большими числами у майя были тесно связаны с астрономическими вычислениями, положенными в основу календаря. Чтобы упростить эти расчеты, майя максимально приблизили единицу третьего разряда к количеству дней их года, равному именно 360 дням.

В дальнейшем позиционный принцип двадцатеричности майя вновь вступает в силу. Единица четвертого разряда $7200 = 360 \cdot 20$, пятого $144\,000 = 7200 \cdot 20$ и т. д. Обнаружена даже запись мифической даты начала летоисчисления майя — 5 041 738 г. до н. э.

Замечательным открытием явился позиционный принцип записи чисел. Известный французский математик и физик Лаплас писал о нем: „Мысль — выражать все числа немногими знаками, придавая им, кроме значения по форме, еще значение по месту, — настолько проста, что именно из-за простоты трудно оценить, насколько она удивительна. Как нелегко прийти к этому, мы видим ясно на примере величайших гениев греческой учености — Архимеда и Аполлония, от которых эта мысль осталась скрытой" [26; IV — VI классы, с. 149].

Но путь к признанию позиционной десятичной системы в Западной Европе был очень нелегок. Распространению ее способствовало проявление и широкое распространение арифметического трактата узбекского математика, астронома и географа Мухаммеда аль-Хорезми „Об индийском счете". Именно имя аль-Хорезми в латинизированной форме Algorihmus — послужило сначала для обозначения десятичной системы счисления, а затем — для обозначения произвольного регулярного вычислительного процесса и вошло в нашу речь как слово „алгоритм", или „алгорифм". В то же время сторонники римской нумерации (абацисты) и церковники длительное время оказывали огромное сопротивление распространению новой системы. Лишь в XVII в. она получила в Европе полное признание.

20. Нумерации

Славянская древнерусская десятичная алфавитная нумерация возникла в X в. Над буквами ставили особый значок — титло. Тысячи обозначали теми же буквами алфавита, что и единицы, однако им предшествовал особый знак — перечеркнутая черта. Для единиц более высоких разрядов применялись специальные названия и обозначения. Эта нумерация существовала без изменений до XVII в. включительно.

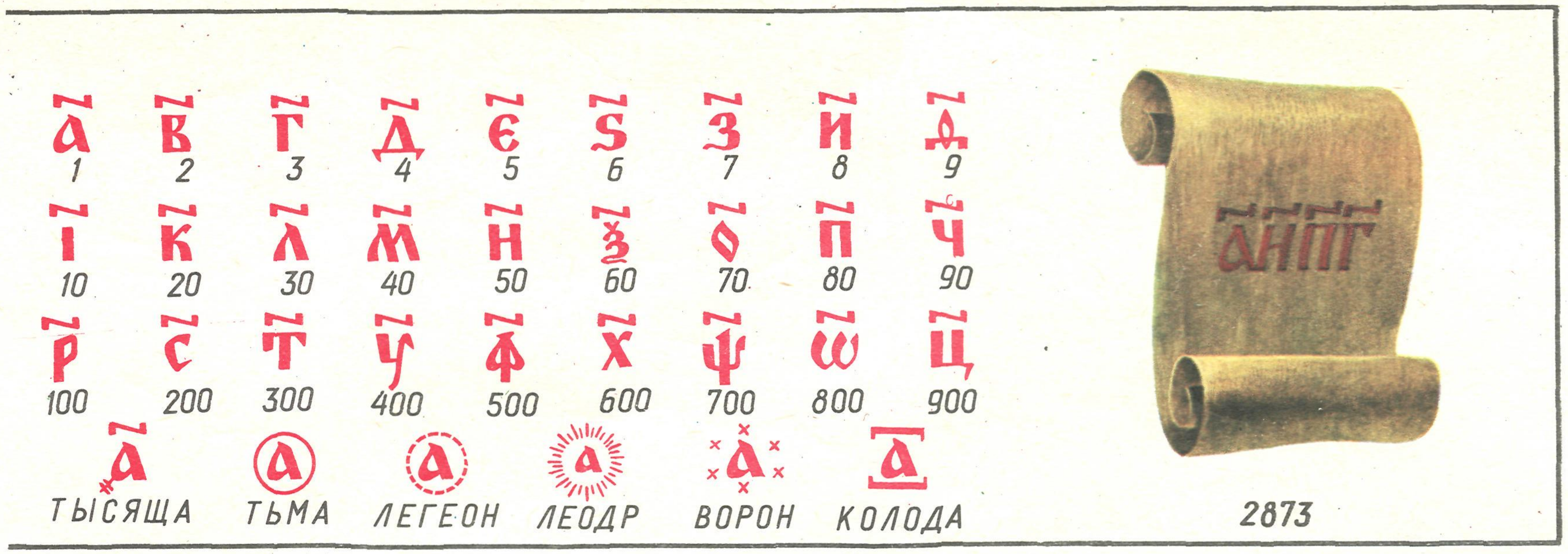
В системе, называвшейся „малым числом", тысяща означала 10^3, тьма — 10^4, легеон — 10^5, леодр — 10^6, ворон (или вран) — 10^7, колода — 10^8. Существовала, однако, и другая система — „великое число", применявшаяся, „коли прилучался большой счет и перечень". В ней тьма означала уже 10^6, легеон — 10^{12}, леодр — 10^{24}, вран — 10^{48}, колода — 10^{49}.

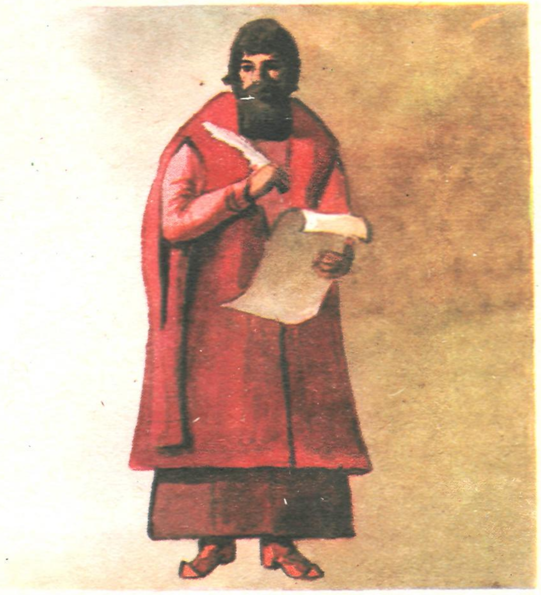
Римская нумерация предшествовала позиционной десятичной нумерации. Она родственна по своей структуре устной нумерации многих современных европейских народов. Это непозиционная десятичная (со следами пятеричной) нумерация. Алгоритмические числа образуются вследствие сложения или вычитания узловых чисел. Хотя в римской нумерации нуль отсутствует, однако с ее помощью можно записать числа, „содержащие" нули, например MDCCC.

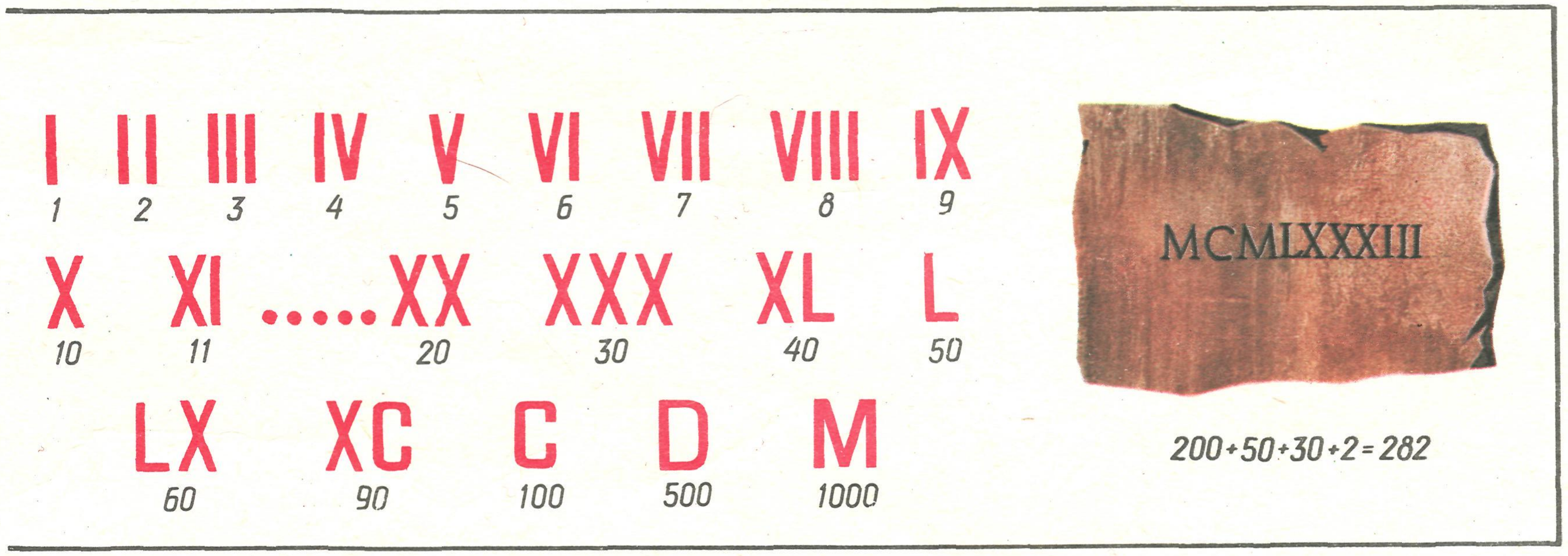
Большие числа, например 29 635, записывались следующим образом: XXIX_m DCXXXV (индекс m означает тысячи, от первой буквы латинского слова milia — тысяча).

Римские цифры — это, собственно, заглавные латинские буквы: „и", „вэ", „икс", „эль", „це", „де", „эм".

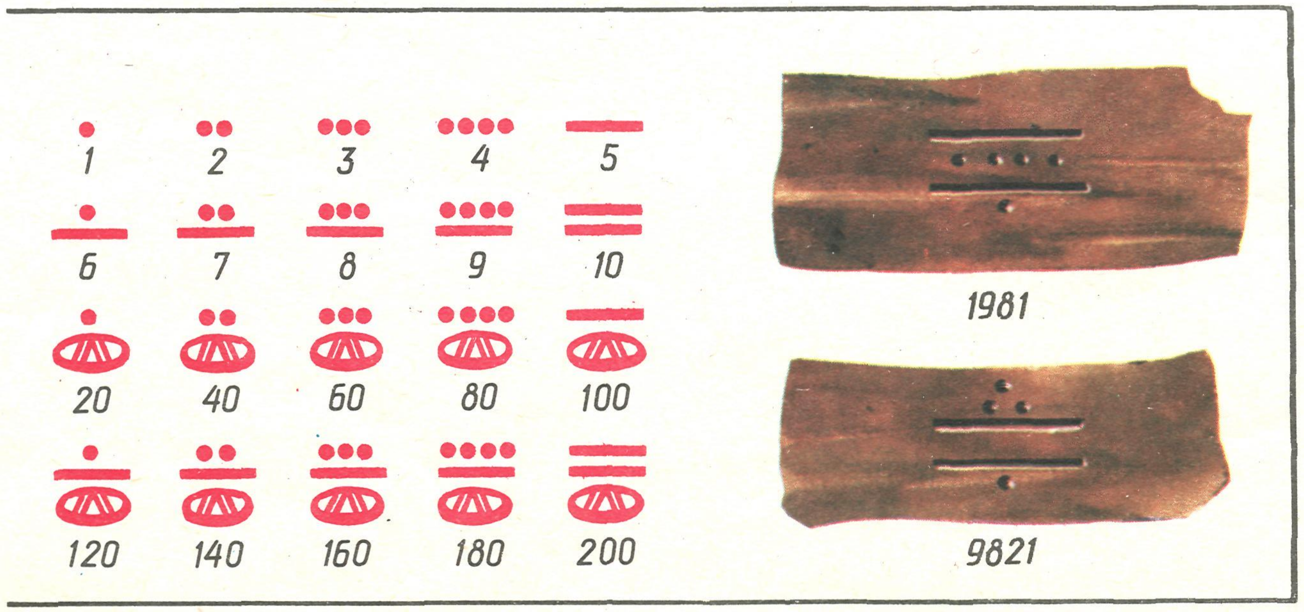
Двадцатеричная позиционная нумерация майя формировалась в V—XII вв. В ней использовались три числовых знака: для единицы, пяти и нуля (стилизованная ракушка).



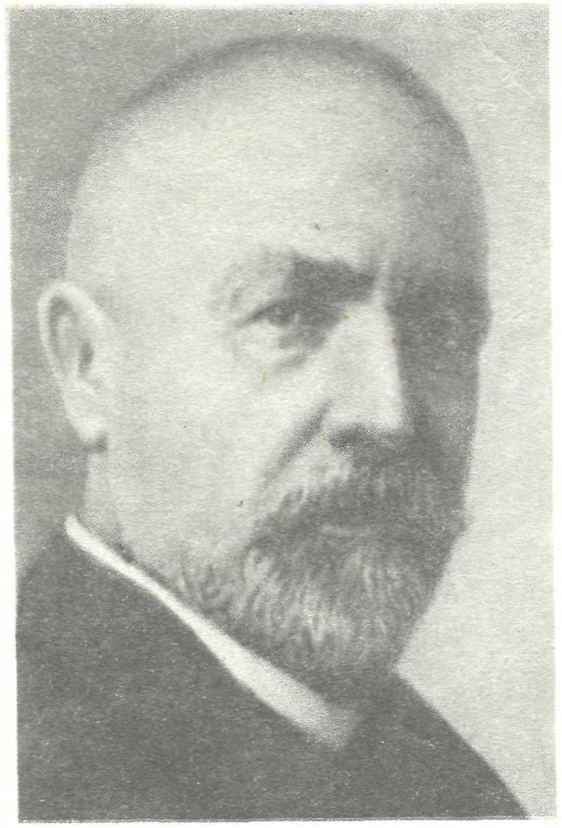




Эволюция современных цифр										
Цифры индийского начертания IX в.	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	०
Цифры индийского начертания XI—XII вв.	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	०
Цифры восточных арабов	١	٢	٣	٤	[illegible]	[illegible]	٧	٨	٩	٠
Цифры Максима Плануда (Византия XIII в.)	١	٢	٣	[illegible]	[illegible]	[illegible]	٧	٨	٩	०
Цифры западных арабов (цифры „Гобарь")	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	7	[illegible]	[illegible]	०
Цифры Сакробоско (XIII в.)	1	2	3	[illegible]	[illegible]	6	[illegible]	8	9	
Современные арабские цифры	١	٢	٣	٤	٥;٥	٦	٧	٨	٩	٠;٠
Европейские цифры конца XIV в.	[illegible]	[illegible]	3	[illegible]	[illegible]	6	[illegible]	8	[illegible]	[illegible]
Цифры XVI в.	[illegible]	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Современные цифры	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

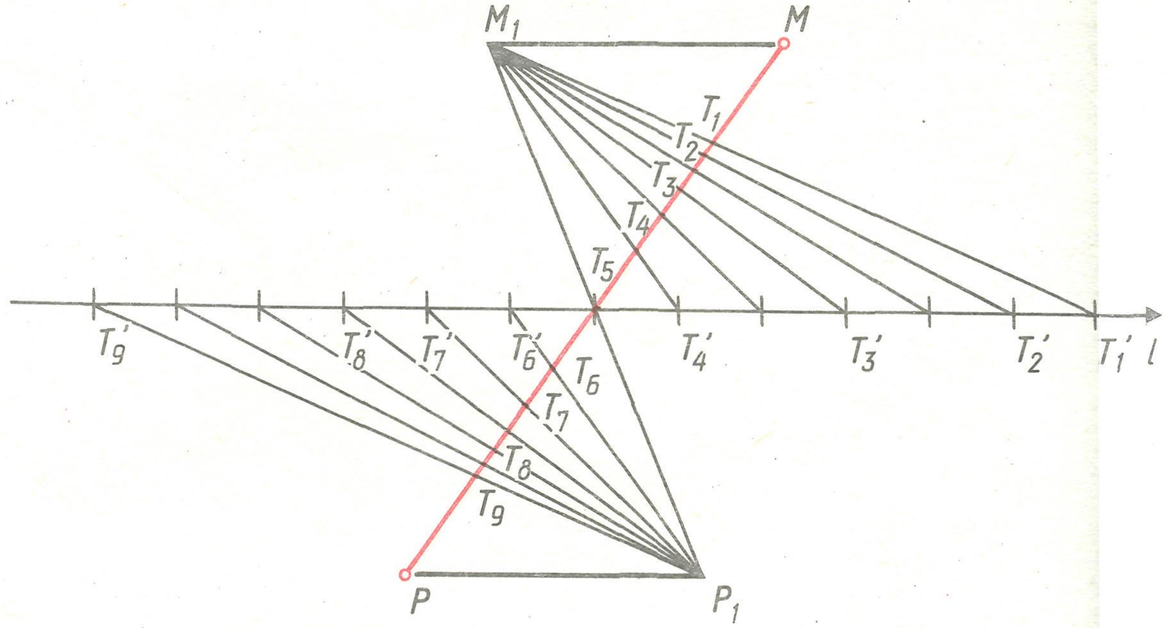


25. Множества раскрывают тайны бесконечного



Георг Кантор (1845—1918) — известный немецкий математик, создатель теории множеств и арифметики трансфинитных чисел.

Давид Гильберт (1862—1943) — выдающийся немецкий математик, много сделал для преодоления кризиса в методологических основаниях математики.



Для любого кардинального числа a такого, что $2 \leqslant a \leqslant \mathfrak{C}$, выполняется условие $a^{\aleph_0} = \mathfrak{C}$. В частности, $2^{\aleph_0} = 3^{\aleph_0} = \ldots = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_1^{\aleph_0} = \mathfrak{C}^{\aleph_0} = \mathfrak{C}$.

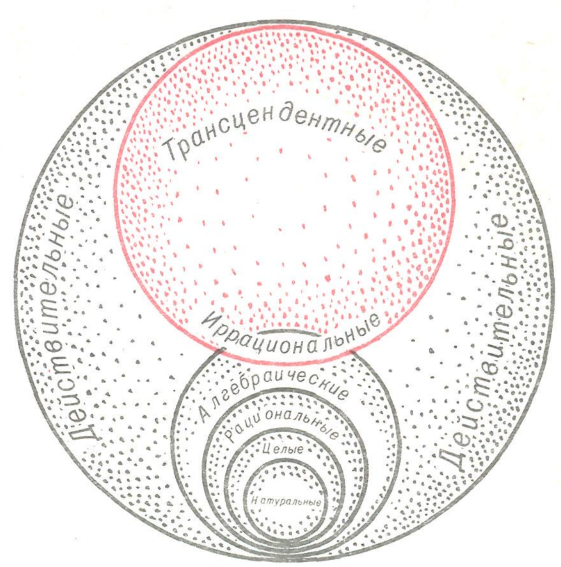
Континуум-гипотеза утверждает, что мощность континуума является первым несчетным кардинальным числом, т. е. $2^{\aleph_0} = \mathfrak{C} = \aleph_1$.

Обобщение этого равенства на произвольное кардинальное число называется обобщенной континуум-гипотезой: для всякого ординального (порядкового) числа a : $2^{\aleph_a} = \aleph_{a+1}$. В частности, $2^{\aleph_1} = \aleph_2$, $2^{\aleph_2} = \aleph_3$, ...

Всевозможные точечные множества образуют класс еще большей мощности.

Расширение понятия числа от множества натуральных чисел (N) до множества действительных чисел (R).

Отношения включения и пересечения на множестве действительных чисел.

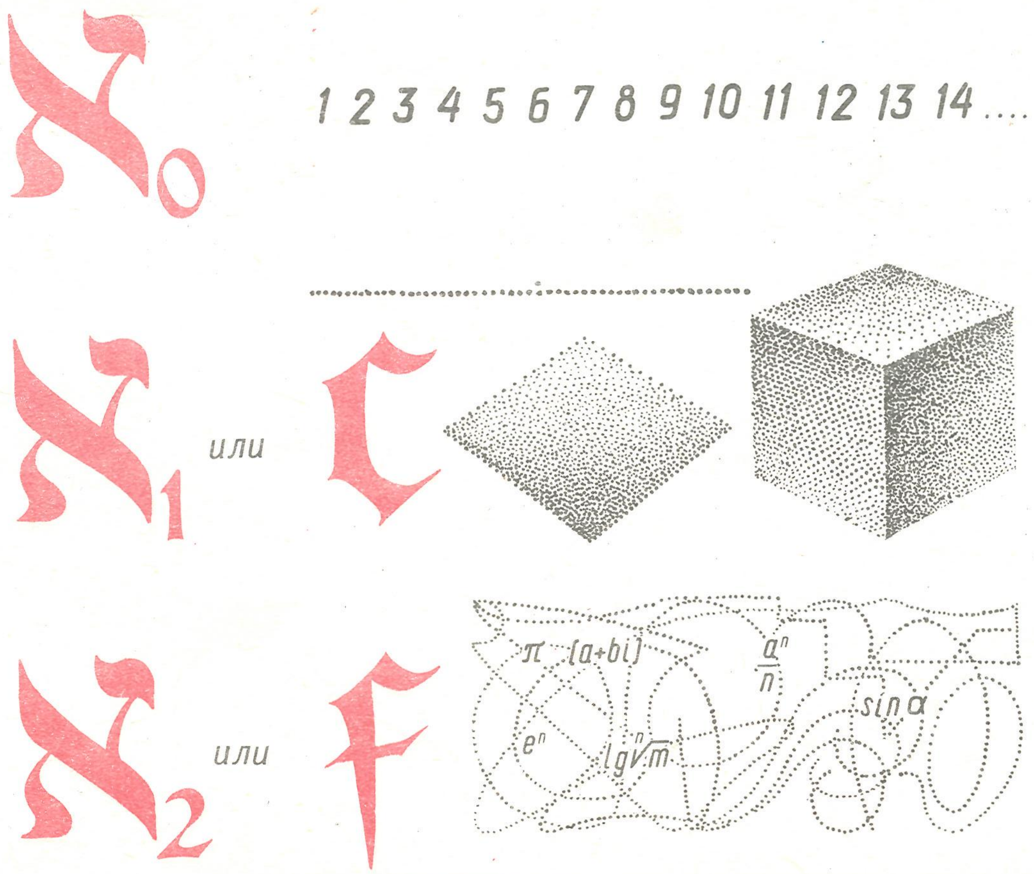


Особенности арифметики трансфинитных (бесконечных) кардинальных чисел. Это только некоторые простейшие свойства удивительного мира бесконечностей. Может быть, в них „мы уже слышим новые слова о мире, в котором живем, но только не понимаем пока их смысла" (слова в кавычках принадлежат советскому математику Ю. И. Манину).

Из множества точек прямой l легко выделить собственное подмножество (например, единичный отрезок MP) и установить взаимно однозначное соответствие между этими множествами. Следовательно $MP \subset l$ и отрезок MP равномощный l. Это характеристическое свойство бесконечных множеств.

Бесконечное множество N натуральных чисел — представитель класса счетных множеств. Множество называется счетным, если его элементы можно поставить во взаимно однозначное соответствие с элементами множества N. Среди совокупности бесконечных множеств N есть множество наименьшей мощности. Количественной характеристикой N является кардинальное число $\aleph_0$ (алеф нулевой) — первая буква древнефиникийского алфавита.

Мощность континуума есть кардинальное число $\mathfrak{C} = 2^{\aleph_0}$, являющееся мощностью множества всех подмножеств натуральных чисел. Эту же мощность имеют: 1) множество R всех действительных чисел; 2) множество всех точек интервала (0; 1); 3) множество всех иррациональных чисел из того же интервала; 4) множество всех точек пространства R^n, где n — натуральное число; 5) множество всех трансцендентных чисел; 6) множество всех непрерывных функций действительного переменного.



$$n + \aleph_0 = \aleph_0$$

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

$$\aleph_0 + \mathfrak{C} = \aleph_0 \cdot \mathfrak{C} = \mathfrak{C}$$

$$\mathfrak{C} + \mathfrak{C} = \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{C} = \mathfrak{C}$$

$$2^{\aleph_0} = \mathfrak{C}$$

$$\mathfrak{C} + \mathfrak{F} = \mathfrak{F}$$

25. Множества раскрывают тайны бесконечного

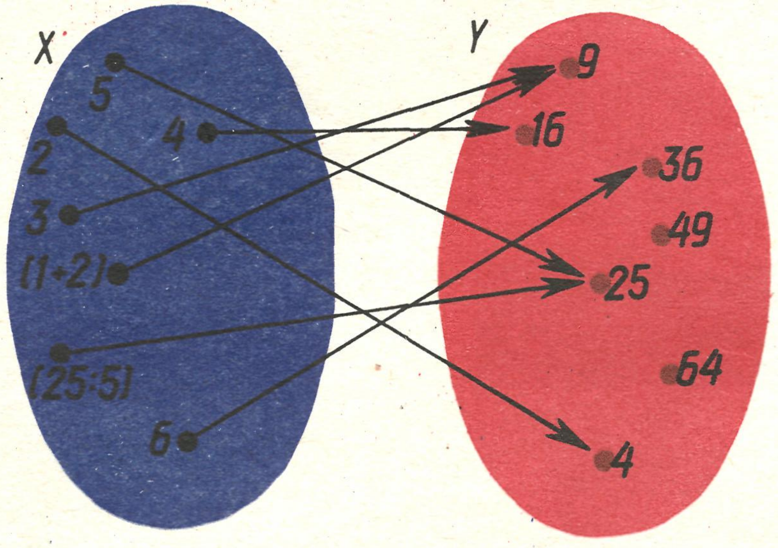
Наивная, или канторова, теория множеств приоткрыла завесу над многими загадками, веками таящимися в понятии бесконечности. Было найдено характеристическое свойство бесконечных множеств. В каждом из них можно выделить собственное подмножество, эквивалентное всему множеству; были раскрыты шеренги бесконечностей, среди которых множество натуральных чисел оказалось самым малочисленным. Бесконечность приоткрыла новые загадки, над которыми ученые работают и в наше время.

Впечатляющим результатом было решение знаменитой континуум-гипотезы Г. Кантора (1878). Она состоит в том, чтобы средствами теории множества доказать или опровергнуть утверждение о том, что мощность континуума ($\mathfrak{C}$) есть первая из мощностей, превосходящих мощность (N) – $\aleph_0$, т. е. $\mathfrak{C} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Эта гипотеза является частным случаем обобщенной континуум-гипотезы: для всякого кардинального числа α справедливо соотношение

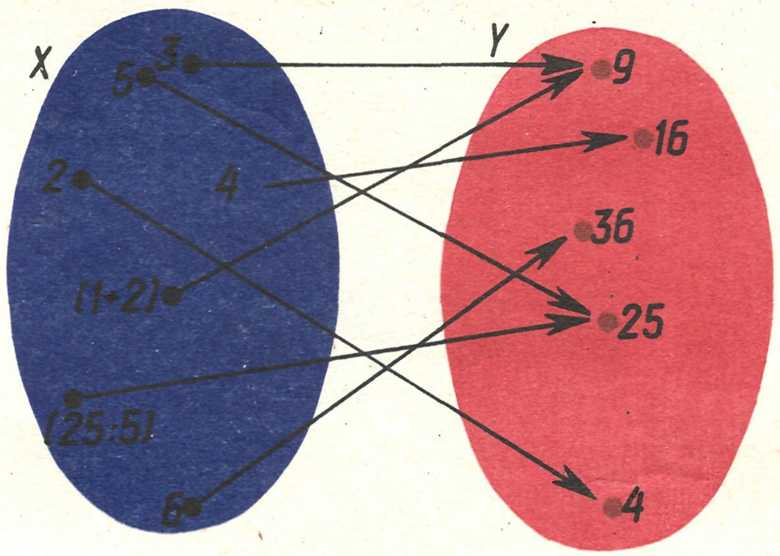
$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}.$$

В 1936 г. австрийский математик и логик Курт Гедель (1906–1978) доказал, что обобщенная континуум-гипотеза не может быть опровергнута средствами традиционной теории множеств. Окончательно эта проблема была решена в 1963 г., когда американский математик Поль Коэн (род. в 1934 г.) доказал, что обобщенная континуум-гипотеза не может быть доказана обычными средствами теории множеств. В решении континуум-гипотезы усмотрели аналогию при попытках доказательства V постулата Евклида. Тогда открытия Н. И. Лобачевского и Яноша Бойаи (1802–1860) привели к созданию неевклидовых геометрий. Теперь стали говорить о возможности канторовой и неканторовой теории множеств. Но полученные результаты касаются таких глубинных вопросов математики бесконечного, что пока не удается получить какие-либо новые выводы из отрицательных результатов К. Геделя и П. Коэна.

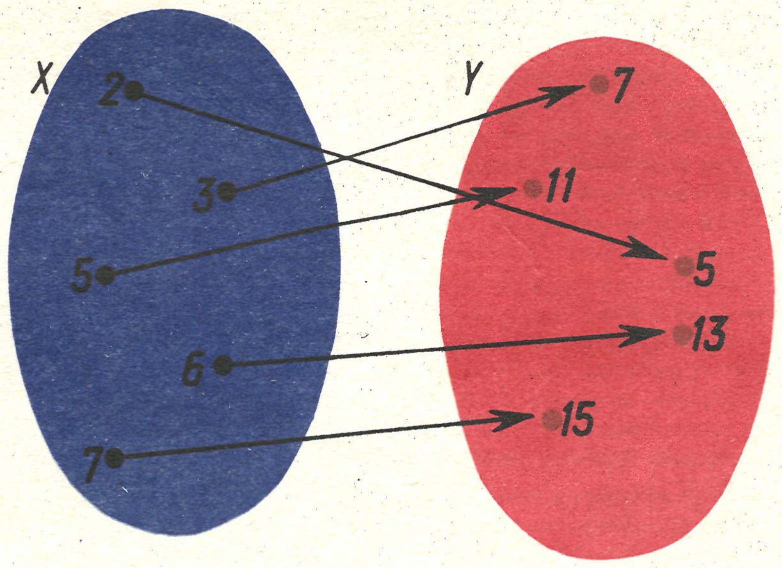
26. Отношения



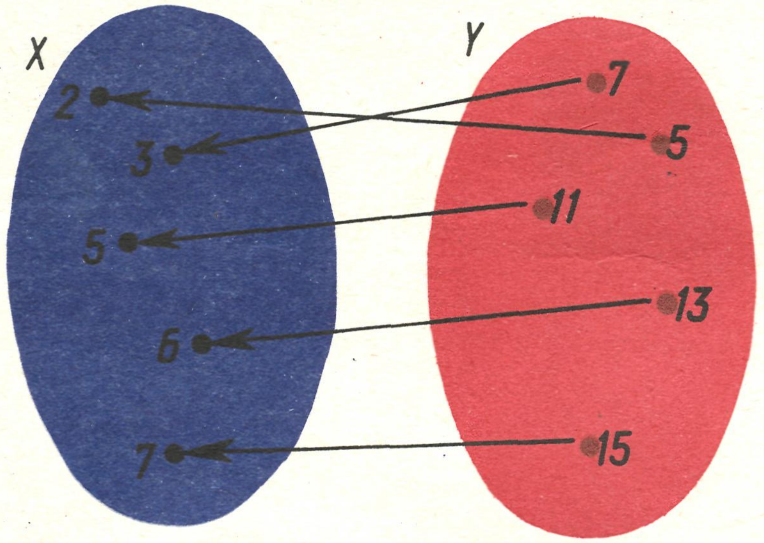
Отображением X в Y называется соответствие, при котором каждому $x \in X$ соответствует единственный $y \in Y$.
φ_1 — отображение X в Y.



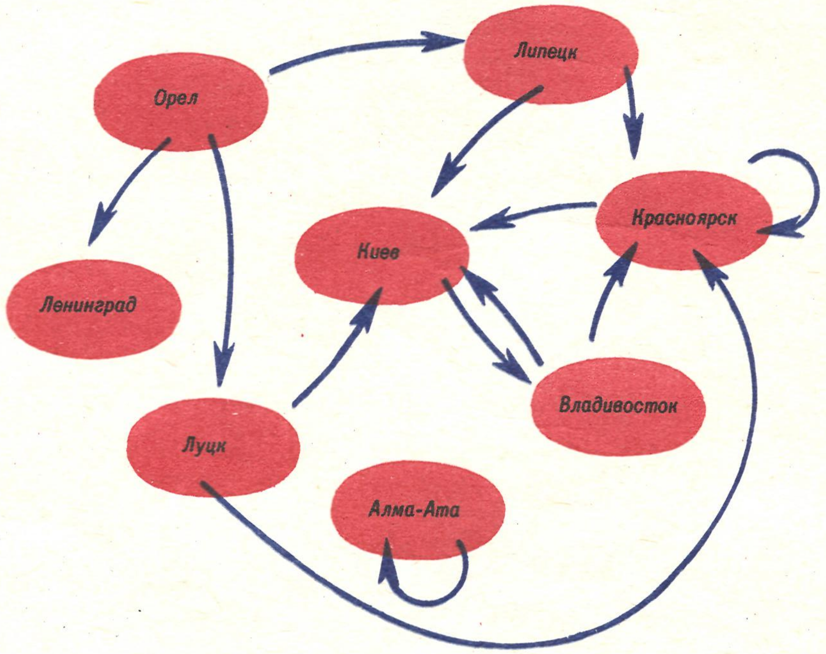
$X \xrightarrow{\varphi_2} Y$ или $(x, y) \in \varphi_2$; $y = x^2$; φ_2 — отображение X на Y.



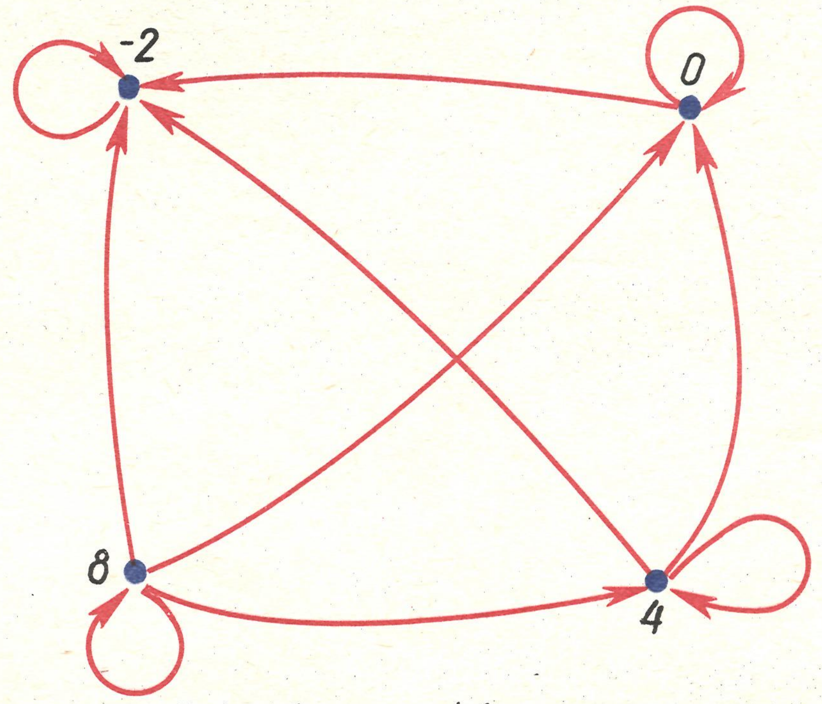
$X \xrightarrow{\varphi_3} Y$ или $(x, y) \in \varphi_3$; $y = 2x + 1$. Взаимно однозначное, или обратимое, отображение X на Y. Обратимые отображения φ_i имеют обратные отображения, которые обозначают соответственно через φ_i^{-1}.



$Y \xrightarrow{\varphi_4} X$, $x = \dfrac{y-1}{2}$ (φ_4 — отображение, обратное отображению φ_3, т. е. отображение φ_3^{-1}).



Граф отображения φ_5, заданного на множестве городов $K = \{$Алма-Ата, Владивосток, Киев, Красноярск, Ленинград, Липецк, Луцк, Орел$\}$. Последняя буква названия каждого города из множества K является первой буквой названия города, который сопоставляется (соотносится) с ним.



Граф отображения φ_6 („больше или меньше"), заданного на множестве $K = \{0, -2, 4, 8\}$.

26, 27. Отношения

Рассмотрим следующий пример. Пусть элементами множества A являются учащиеся 8 класса некоторой школы. С помощью ростомера или мерной ленты каждому учащемуся можно поставить в соответствие определенный отрезок, длина которого равна росту этого учащегося. Таким образом, множество A учащихся класса отобразится во множество A_1 отрезков. Множество A можно отобразить и во множество A_2 наборов масс, каждая из которых соответствует массе одного из учащихся; можно также отобразить множество A во множество A_3 троек чисел, обозначающих число, месяц и год рождения каждого ученика и т. д. Установление каждого нового из таких отображений расширяет круг сведений об элементах множества A, в частности об их связи с окружающей действительностью.

Одним из первых видов отображений, которыми овладел человек, был счет предметов. При этом, если множество X объектов, которые подлежали пересчету, например множество отправления, было реально существующим, то множество прибытия N (ряд натуральных чисел) создавалось в процессе овладения отображением, называемым теперь счетом предметов.

В общем случае *отношением, соответствием* f, или *отображением* множества X во множество Y называется любое подмножество G декартова произведения $X \times Y$. Это означает, что $(x, y) \in f \Leftrightarrow \exists x \in X \wedge \exists y \in Y$. Множество первых компонент, или координат всех пар $(x,y) \in f$, называется *областью определения отношения* f (обозначение: $D\ (f)$), или его первой проекцией; множество вторых координат всех пар $(x, y) \in f$ называется *областью значений отношения* f (обозначение: $E\,(f)$), или его второй проекцией. Множество всех пар вида (x,y), таких, что $(x,y) \in f$, называется *графиком отношения* (отображения или соответствия) f.

Если $D\,(f) = X$ и $E\,(f) = Y$, то отношение f является отображением X на Y.

Если $D\,(f) = X$ и $E\,(f) \subset Y$, то f является отображением X в Y.

Если $D\,(f) \subset X$ и $E\,(f) = Y$, то f является отображением из X на Y.

Если $D\,(f) \subset X$ и $E\,(f) \subset Y$, то f является отображением из X в Y.

Отношение f называется *оборотным отношением* X в Y, если каждый элемент Y является образом не более одного элемента из X. Если каждый элемент из Y является образом точно одного элемента из X, то отношение f называется *взаимно однозначным.*

Отношение называется:

1) *сюръективным,* или сюръекцией, если любой элемент $y \in Y$ является второй компонентой хотя бы одной пары графика этого отношения;

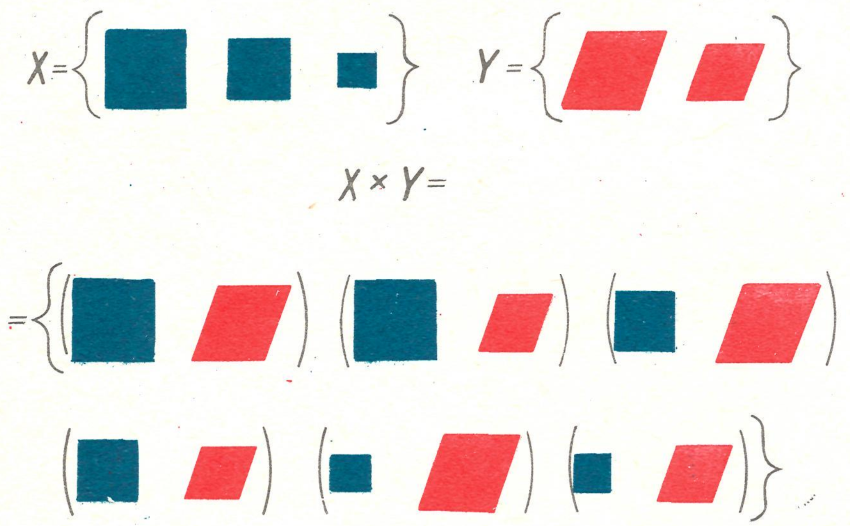
2) *инъективным,* или инъекцией, если график отношения не содержит пар с равными первыми компонентами;

3) *биективным,* или биекцией, если оно сюръективно и инъективно, т. е. если $y \in Y$ является образом точно одного элемента $x \in X$.

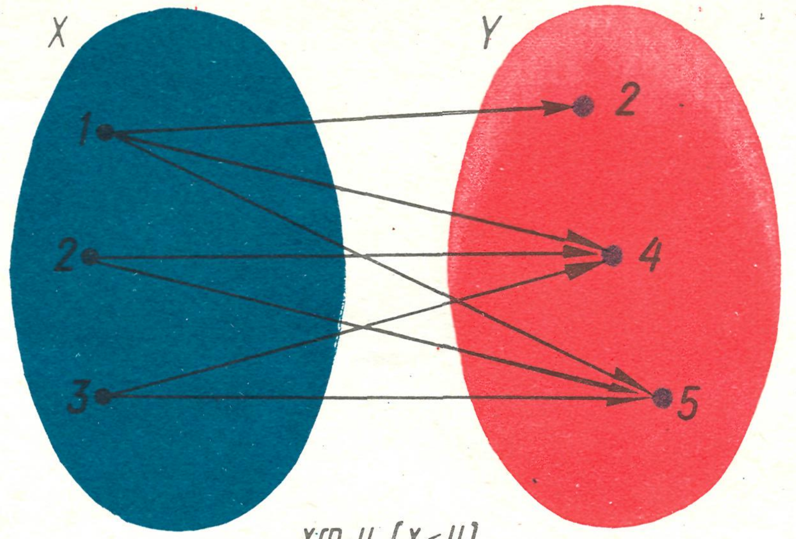
При $X = Y$ отношение f между элементами X и Y называется отношением на множестве X.

Рассмотрим декартово произведение $Y \times X$. Множество всех пар (y,x) таких, что $\forall\ (y, x) \in Y \times X \Leftrightarrow (x, y) \in X \times Y$, называется отношением, *обратным* отношению f, и обозначается f^{-1}.

Итак, $(y,x) \in f^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in f$.



Декартово, или прямое, произведение непустого множества X на непустое множество Y — это множество всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$.



$x\varphi_1 y \ (x<y)$

$\varphi_1 = \{(1,2)\ (1,4)\ (1,5)\ (2,4)\ (2,5)\ (3,4)\ (3,5)\}$

$D_{\varphi_1} = \{1,2,3\}$ $\quad E_{\varphi_1} = \{2,4,5\}$

D_{φ_1} — область определения отображения φ_1,
E_{φ_1} — область значений отображения φ_1.

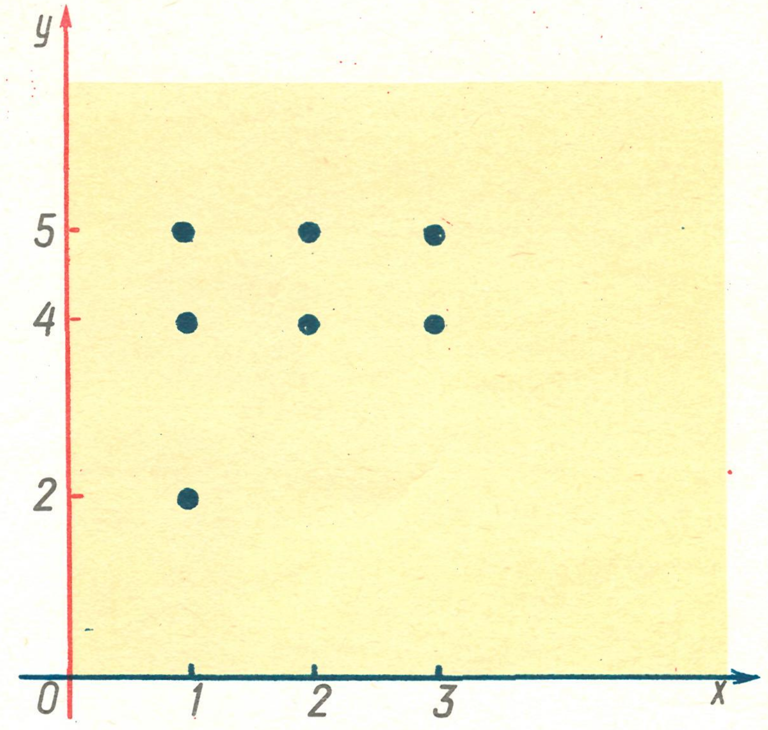
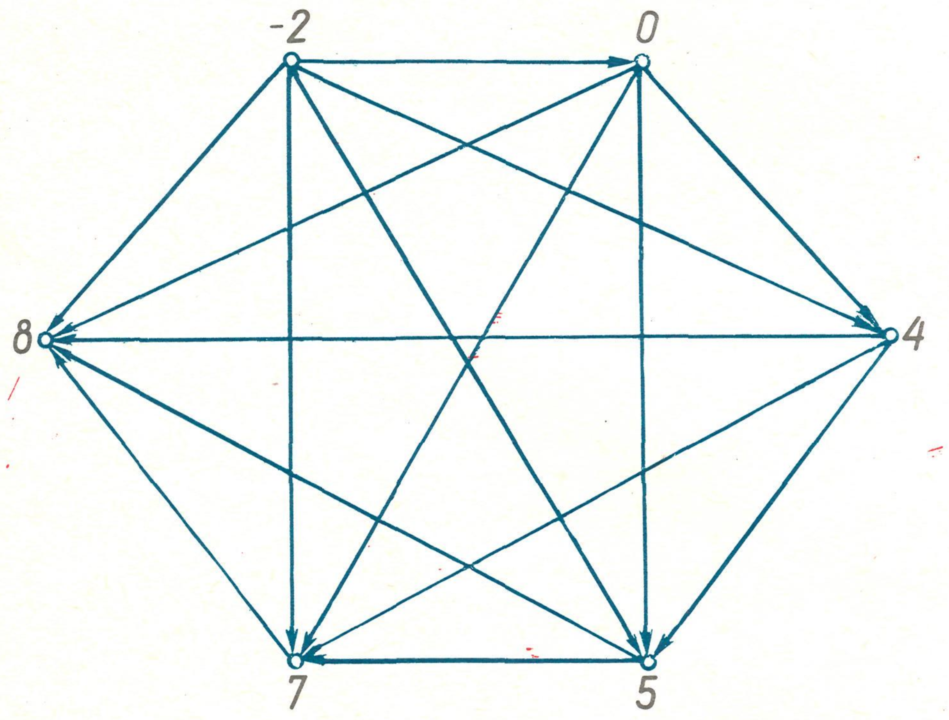


График отображения φ_1 от $X = \{1, 2, 3\}$ к $Y = \{2, 4, 5\}$.



Граф отображения φ_2 („меньше"), заданного на множестве $K = \{-2, 0, 4, 5, 7, 8\}$.

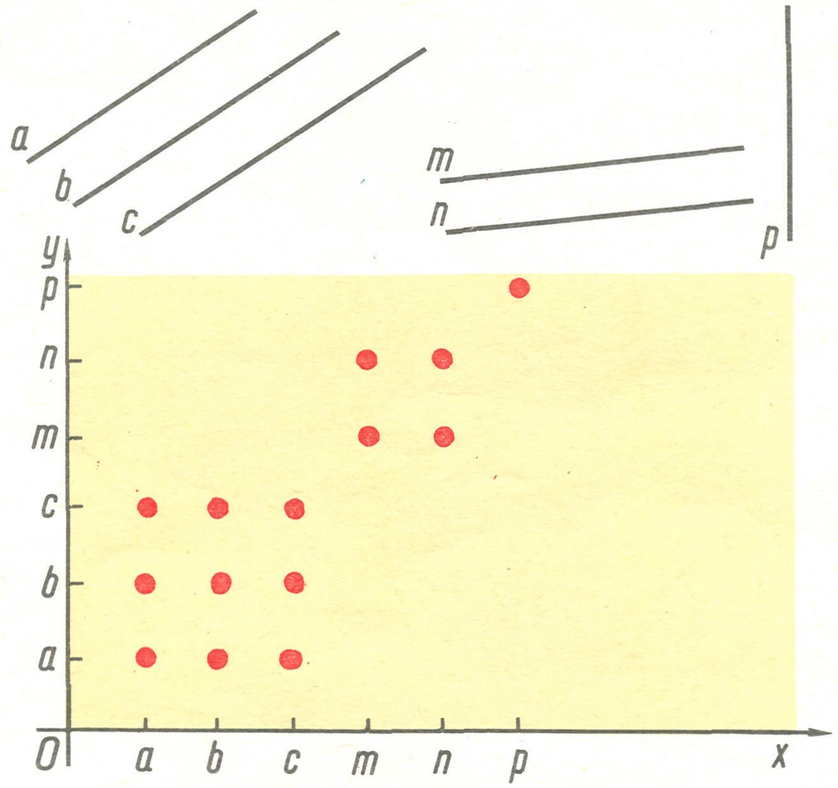
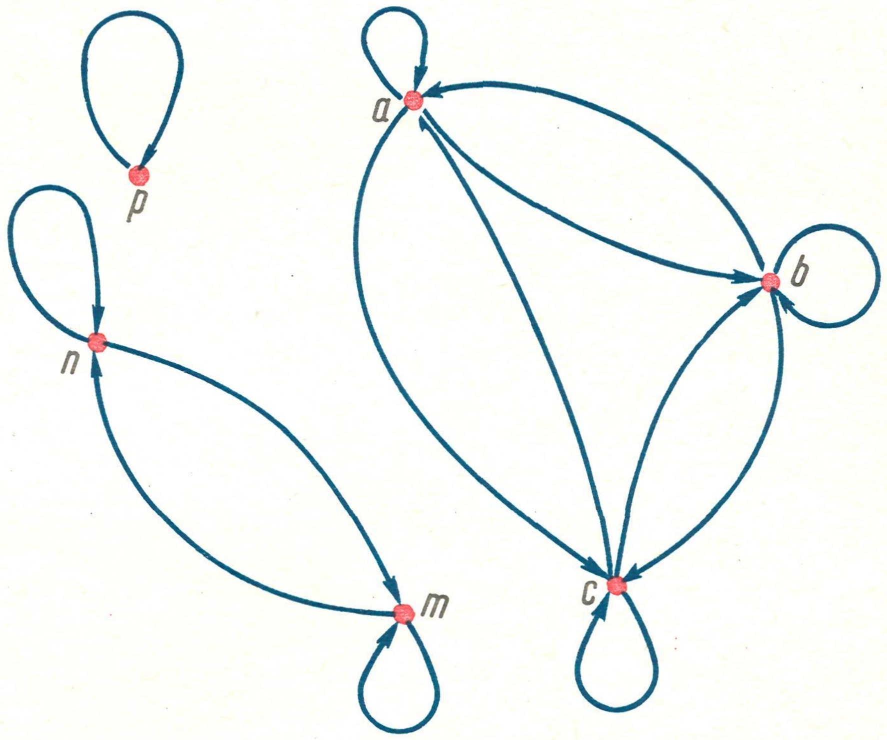
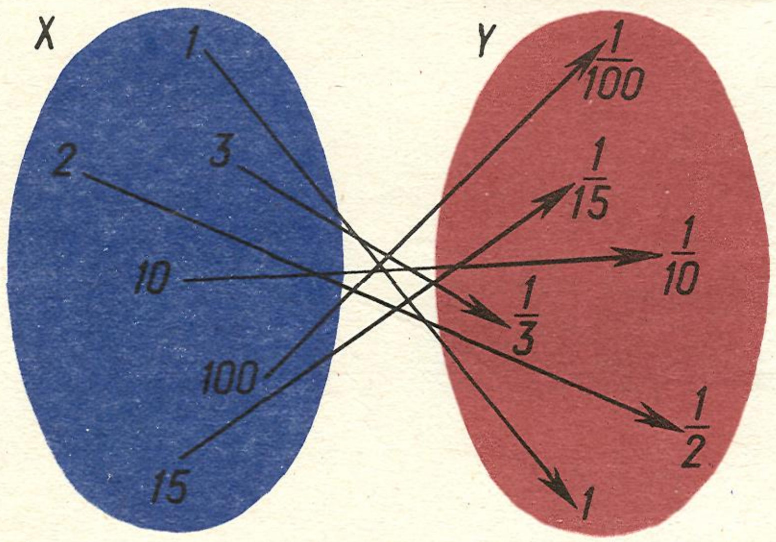


График отображения φ_3 („параллельно"), заданного на множестве прямых $L = \{a, b, c, m, n, p\}$.



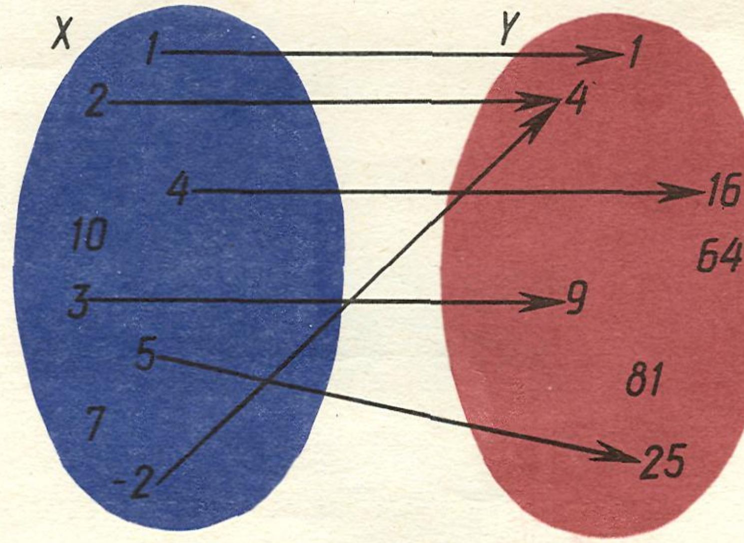
Граф отображения φ_3, заданного на множестве прямых $L = \{a, b, c, m, n, p\}$,

28. Функция



Отношение $f\,(X \xrightarrow{f} Y)$ между элементами множеств X и Y, при котором каждому $x_i \in X$ соответствует не более одного элемента $y_i \in Y$, называется функциональным, или просто функцией.

Функция с областью определения X ($D_f = X$) и областью значений Y ($E_f = Y$) называется также отображением множества X на множество Y.

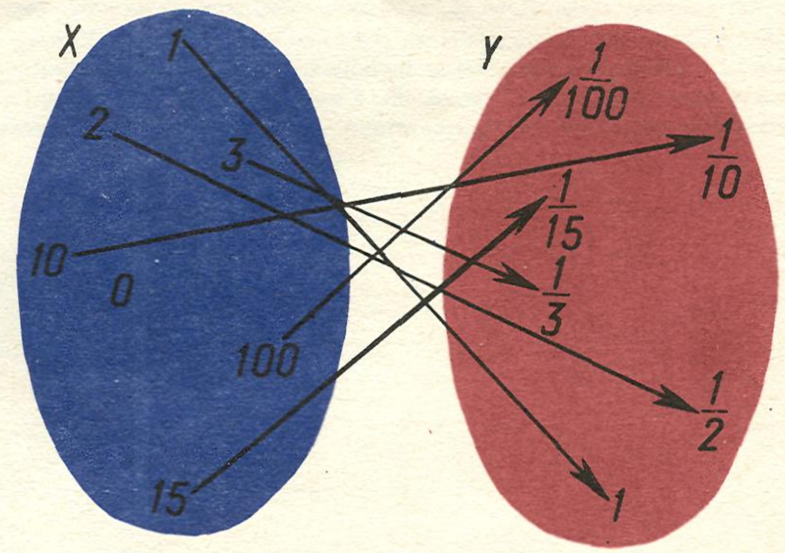


Функциональное отношение f_2 между множествами X и Y:

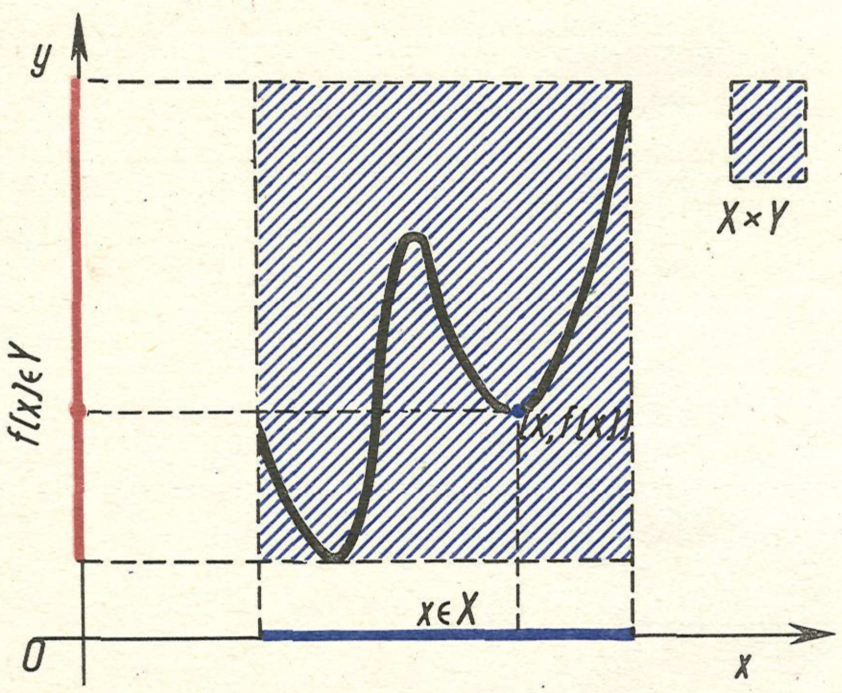
$D_{f_2} = \{-2, 1, 2, 3, 4, 5\}$,

$E_{f_2} = \{1, 4, 9, 16, 25\}$,

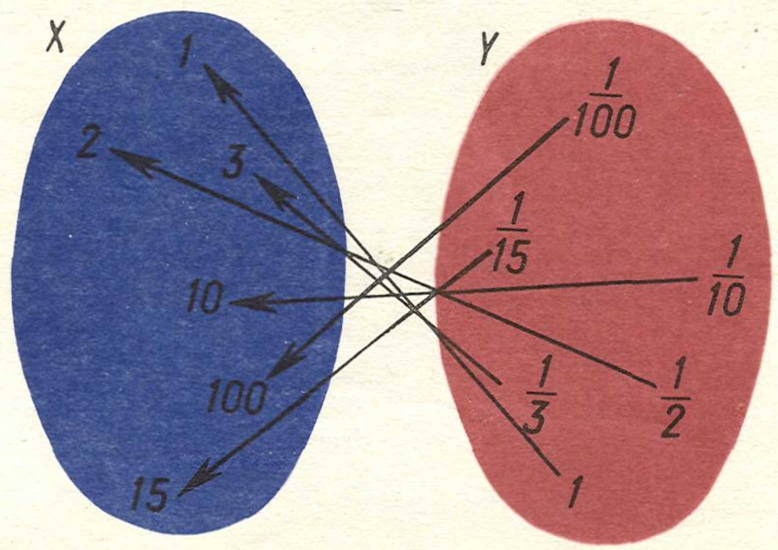
$7, 10 \notin D_{f_2}$, $64, 81 \notin E_{f_2}$.



Отношение f_3 является функцией, хотя для $0 \in X$ не существует $y_i \in Y$ такого, что $(0, y_i) \in f_3$, т. е. не существует числа, обратного числу 0 (деление на нуль невозможно!).

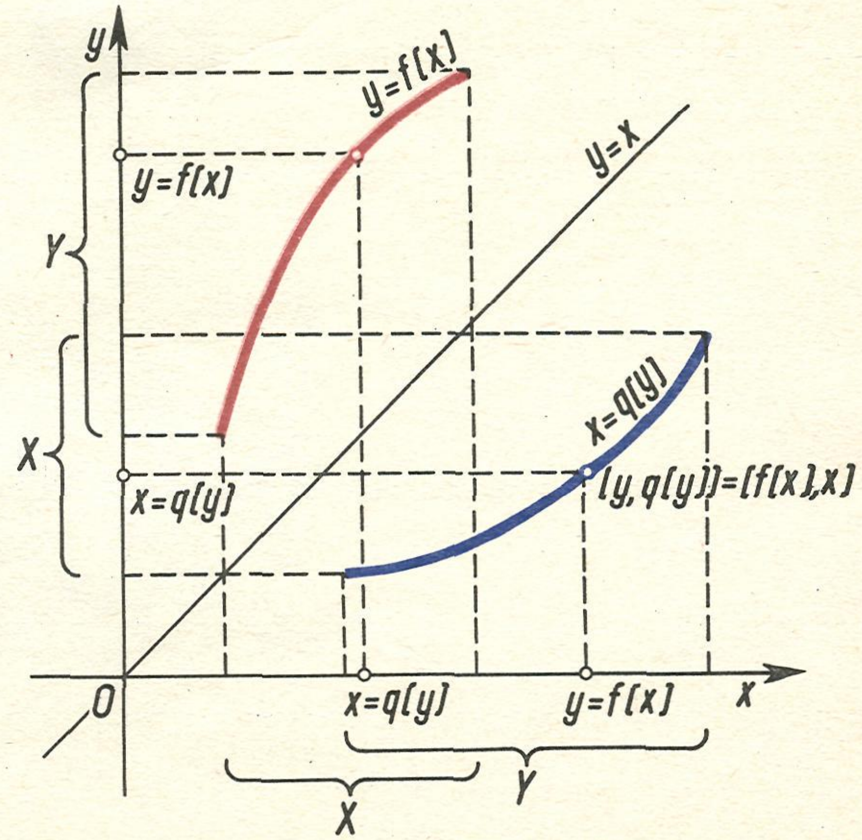


Если $X \xrightarrow{f} Y$, то множество пар $(x, f(x))$, где $x \in X$ и $f(x) \in Y$, т. е. $(x, f(x)) \in X \times Y$, называется графиком функции f.



Обратимое, или взаимно однозначное, отображение $X \xrightarrow{f} Y$ имеет обратное отображение $Y \xrightarrow{f^{-1}} X$. Пара $(y, x) \in f^{-1}$ тогда и только тогда, когда $(x, y) \in f$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$.

Графики взаимно обратных функций f и f^{-1} симметричны относительно прямой $y = x$.



28. Функция

Отношение называется *функциональным,* или *функцией,* если его график не содержит пар с равными первыми компонентами. Каждое функциональное отношение называется функцией. Таким образом, функциями называют отдельный класс отношений, а именно такие отношения, в которых каждому элементу $x \in X$ соответствует по крайней мере один элемент $y \in Y$.

29. Отображения в геометрии

Обратимое отображение множества на себя называется преобразованием этого множества. В школьном курсе геометрии рассматривают множество всех точек плоскости (R^2) и множество всех точек пространства (R^3) и изучают, соответственно, преобразования плоскости и пространства.

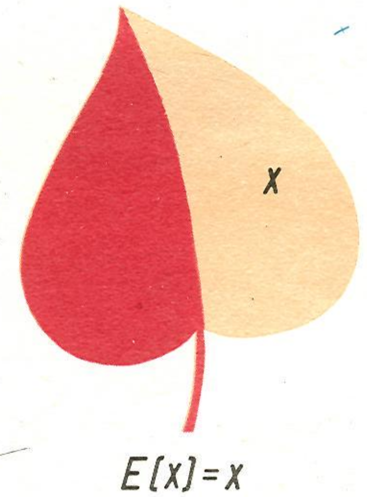
Преобразования плоскости, сохраняющие расстояния между соответствующими точками, называются перемещениями плоскости, т. е. если $f(A) = A_1$ и $f(B) = B_1$, то $f(AB) = A_1B_1$ для всех A и B. Перемещения — обратимые отображения.

Перемещения плоскости первого рода: тождественное перемещение, перенос, поворот, центральная симметрия; перемещения второго рода: осевые симметрии, переносные симметрии.

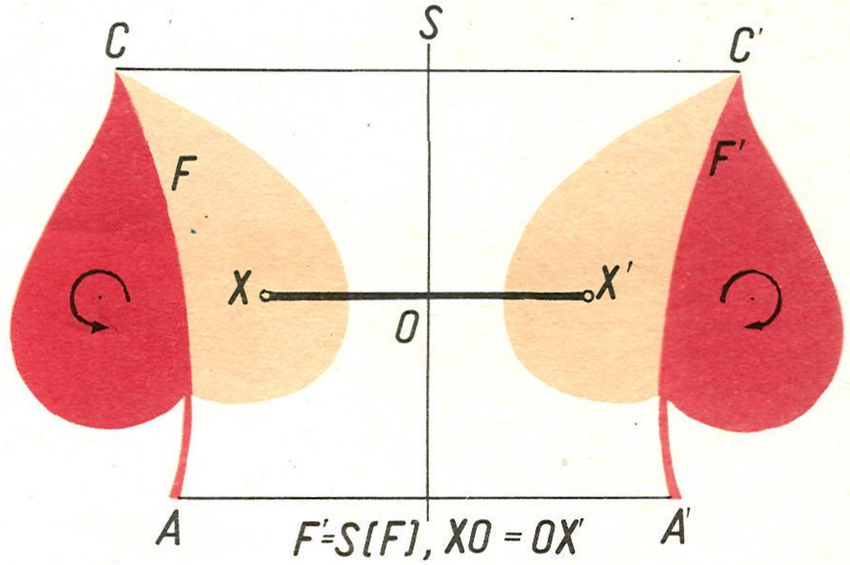
Французский математик М. Шаль (1793—1880) доказал, что: 1) всякое перемещение первого рода является либо поворотом, либо переносом; 2) всякое перемещение второго рода является либо переносной симметрией, либо осевой.

Преобразование E множества X называется тождественным, если $E(x) = x$ для любого $x \in X$. Поэтому для любого преобразования f множества X

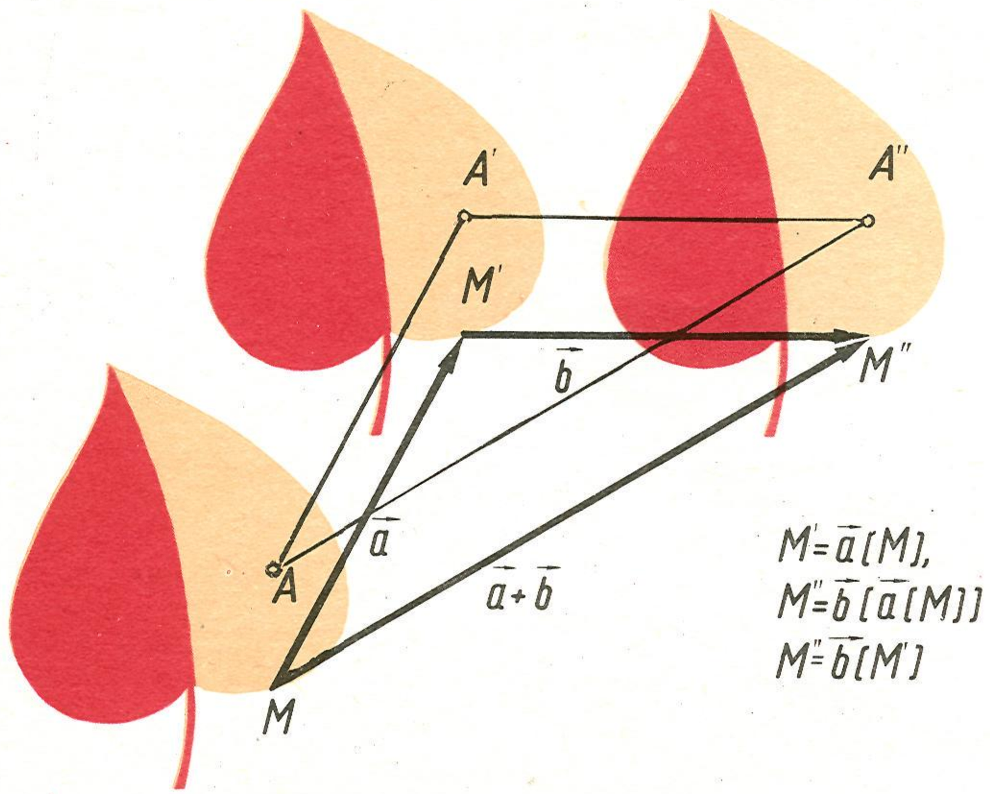
$E \circ f = f \circ E$ и $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = E$.



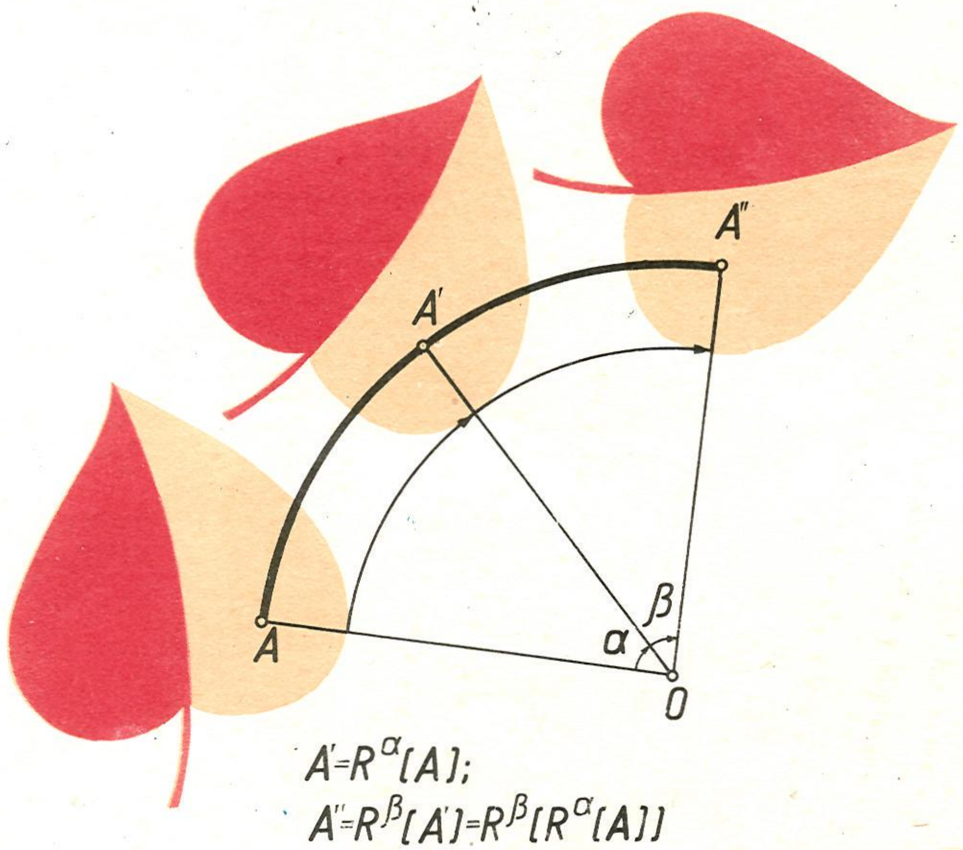
Осевая симметрия плоскости — это перемещение, при котором каждая точка некоторой прямой S отображается на себя, а полуплоскости с границей S отображаются одна на другую. Прямая S называется осью симметрии.

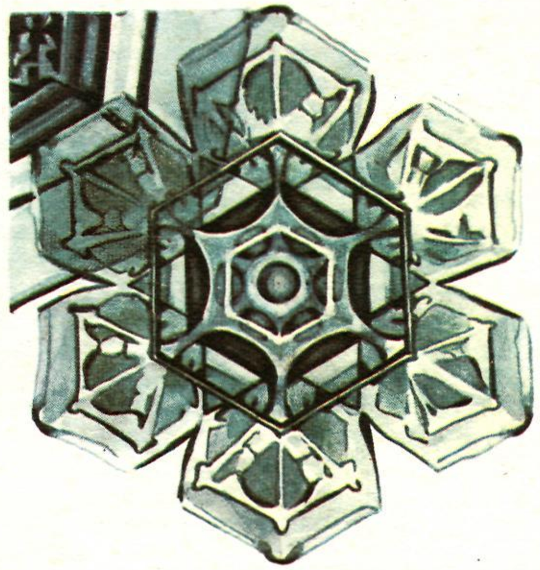


Параллельным переносом плоскости, заданным упорядоченной парой точек (A, A'), называется преобразование плоскости, которое каждую точку M отображает на такую точку M', что: 1) $MM' \uparrow\uparrow AA'$ и 2) $MM' = AA'$. Этот перенос называют иначе вектором и обозначают $\overrightarrow{AA'}$ или одной буквой: $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$. Можно доказать, что перенос является отображением.



Поворотом точки около данной точки O на заданный ориентированный угол α называется такое перемещение плоскости, которое точку O отображает на себя, а всякую другую точку A отображает на такую точку A', что ориентированный угол AOA' имеет величину α. Точка O называется центром поворота, а величина угла 2 — углом поворота.





29. Отображения в геометрии

Геометрия изучает реально существующие и логически возможные пространственные формы, а опосредствованно — геометрические свойства тел. Поэтому геометрически равными называются фигуры, которые можно совместить при движении. Можно сказать, что геометрия изучает свойства фигур, сохраняющиеся при всевозможных движениях.

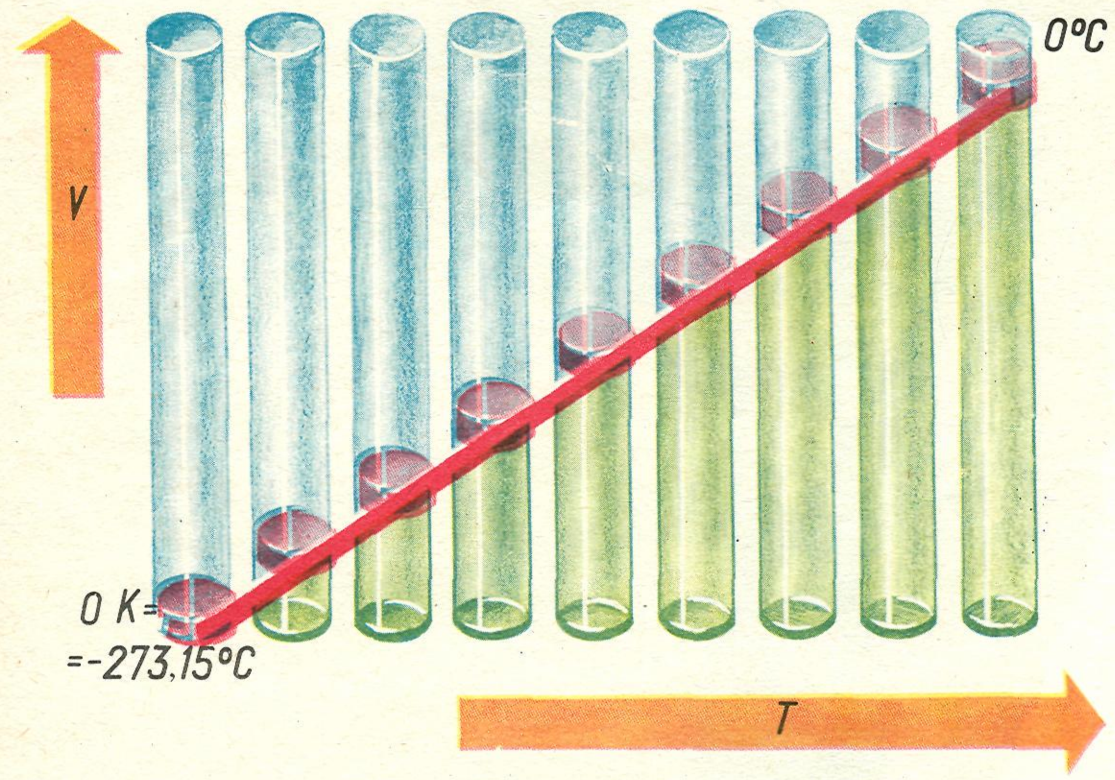
Практическая направленность школьной геометрии подчеркнута преимущественным изучением метрических свойств фигур. Этому способствует и то, что много внимания уделяется преобразованию геометрических фигур, которые связаны с метрической структурой геометрического пространства.

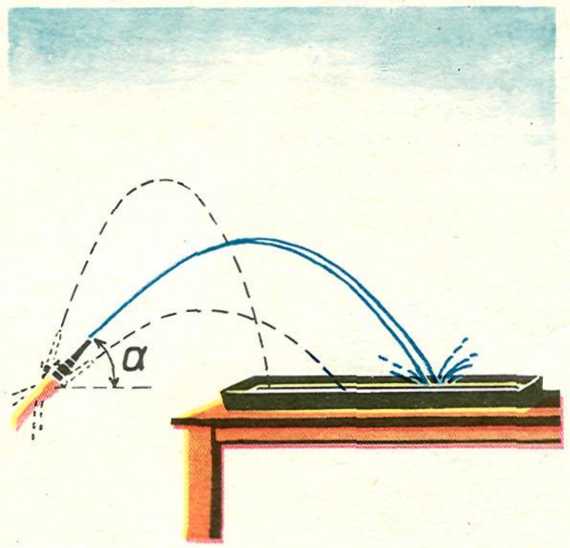
Главными в геометрии являются три основных вида отображений:

1) отображение числовых множеств в точечные множества;
2) отображение множеств геометрических фигур в числовые множества;
3) отображение точечных множеств в точечные множества.

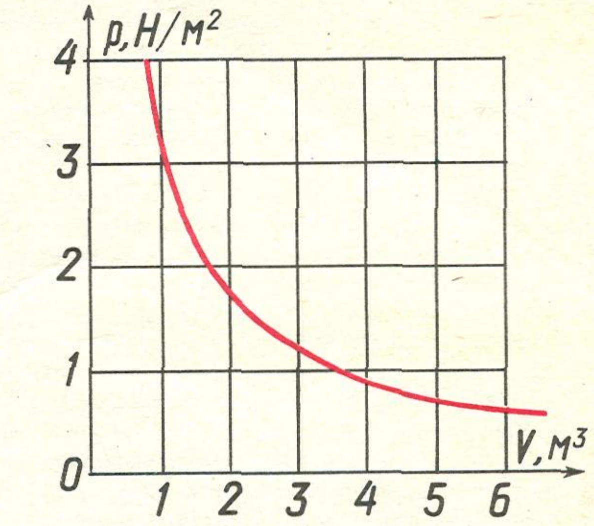
Третий вид отображений составляют преобразования плоскости и пространства, являющиеся идейной основой школьной геометрии. В них на геометрическом материале развивается идея функциональной зависимости. При этом центральное место занимает понятие „отображение плоскости на себя". Через него определяются преобразования плоскости — перемещения и преобразования подобия. Практически все темы школьной геометрии используют понятие „преобразование плоскости". Многие классические теоремы и задачи получили новые доказательства и решения, использующие преобразования.

30. Функции вокруг нас





Струя, как и траектория движения всякого тела, брошенного под углом α к горизонту, имеет форму параболы, тем более вытянутой, чем больше ее начальная скорость.



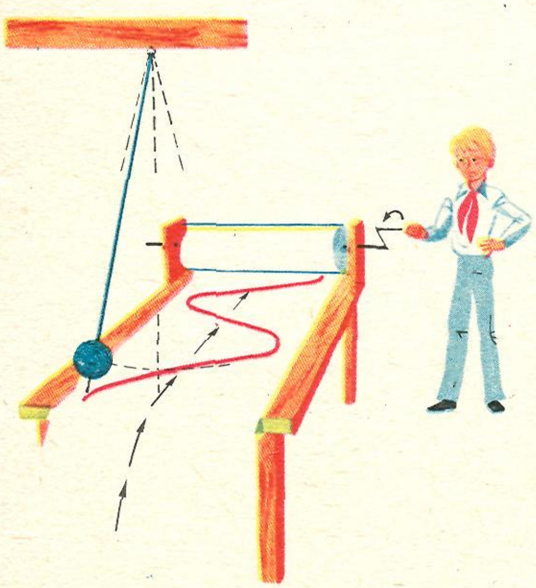
Закон Бойля—Мариотта $p_1V_1 = p_2V_2$ описывает количественную зависимость давления от объема газа. Графиком его является часть дуги одной из веток гиперболы.

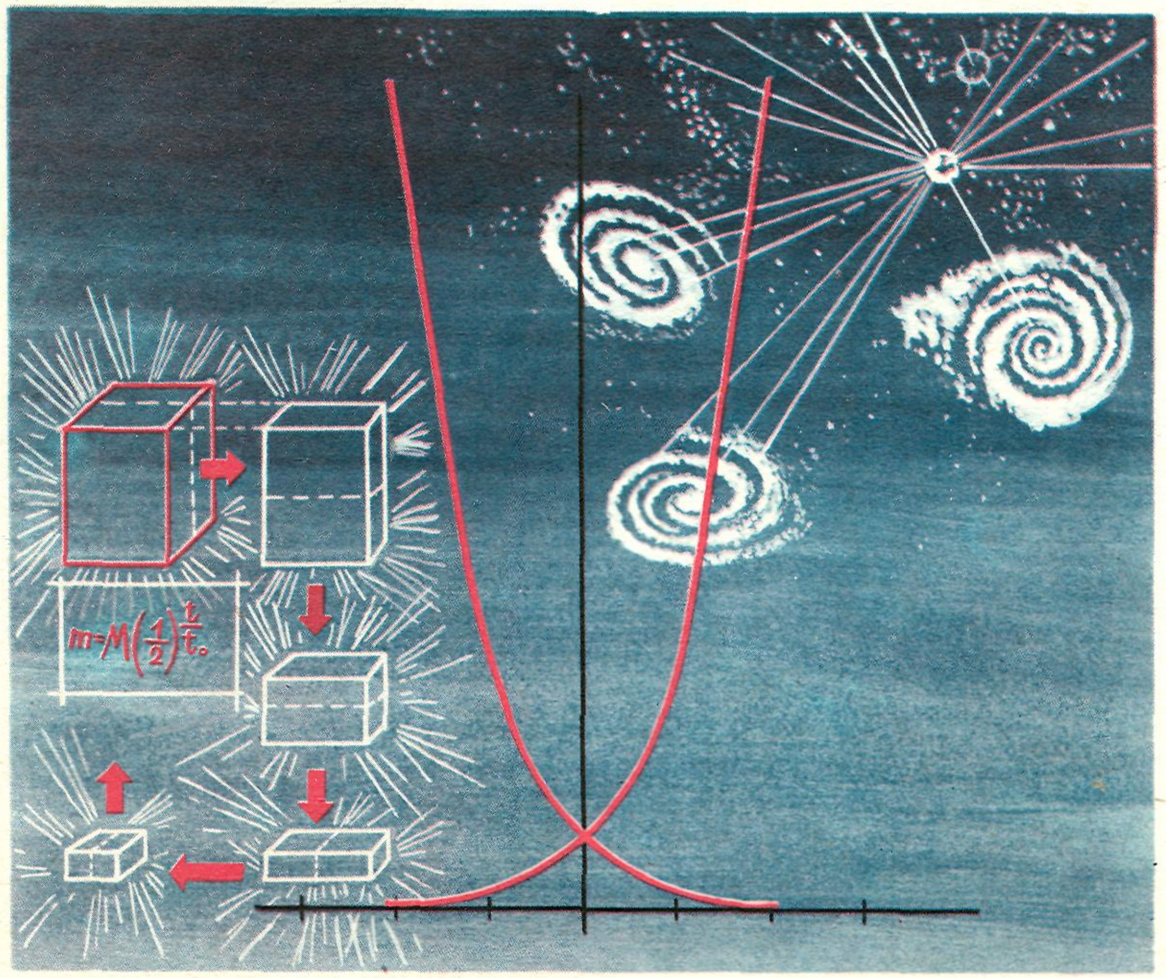
Закон Гей-Люссака описывает количественную зависимость объема газа от температуры. Графиком его является отрезок прямой:

$$V = V_0\left(1 + \frac{t}{273}\right).$$

Траектория парашютиста, выпрыгнувшего из горизонтально летящего самолета. Штрихами показана траектория, по которой летел бы парашютист в безвоздушном пространстве.

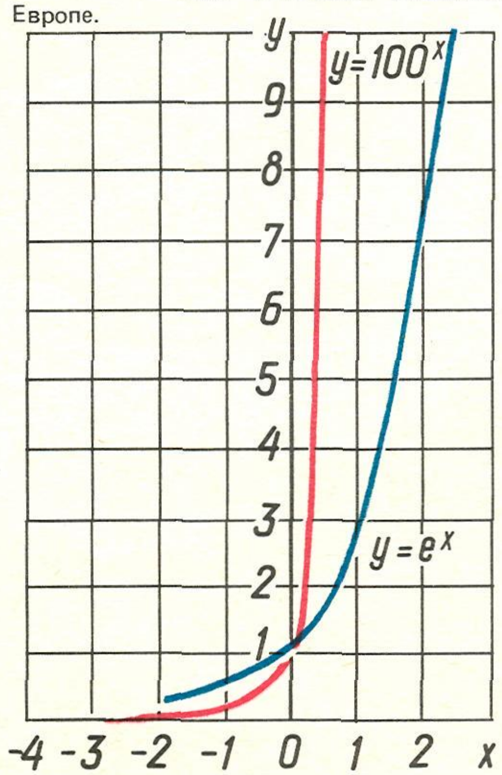
Зависимость отклонения маятника от времени.

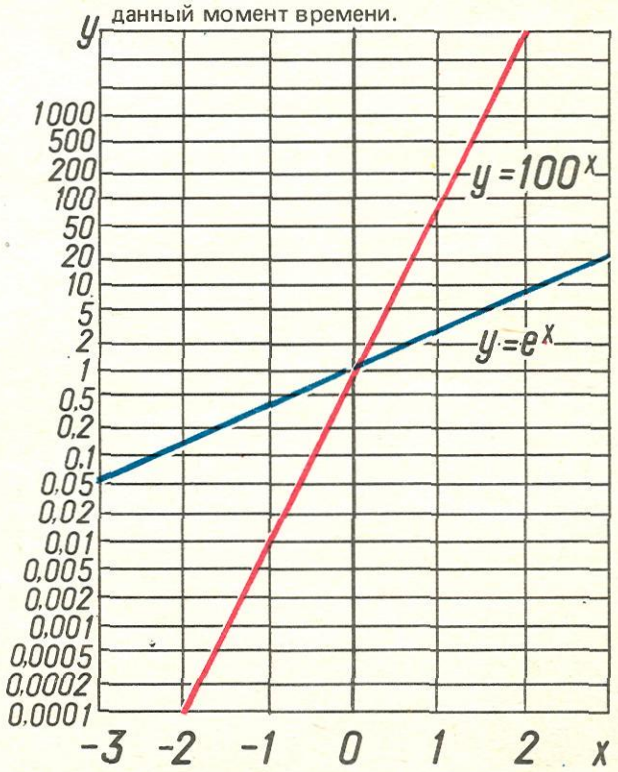




Необычайно много периодических явлений природы и механических процессов протекает согласно синусоидальному закону, например 1800-летний цикл изменения влажности в Европе.

Экспонента, или показательная функция $y = ca^x$, описывает количественные закономерности динамики процессов, изменение которых пропорционально значению величины в данный момент времени.





30, 31. Функции вокруг нас

Важно всегда перебрасывать мосты, соединяющие абстрактные математические конструкции с объектами реальной действительности, являющимися, в сущности, истоками этих конструкций. Современное определение функции как некоторого рода отображения позволяет глубже постичь это понятие.

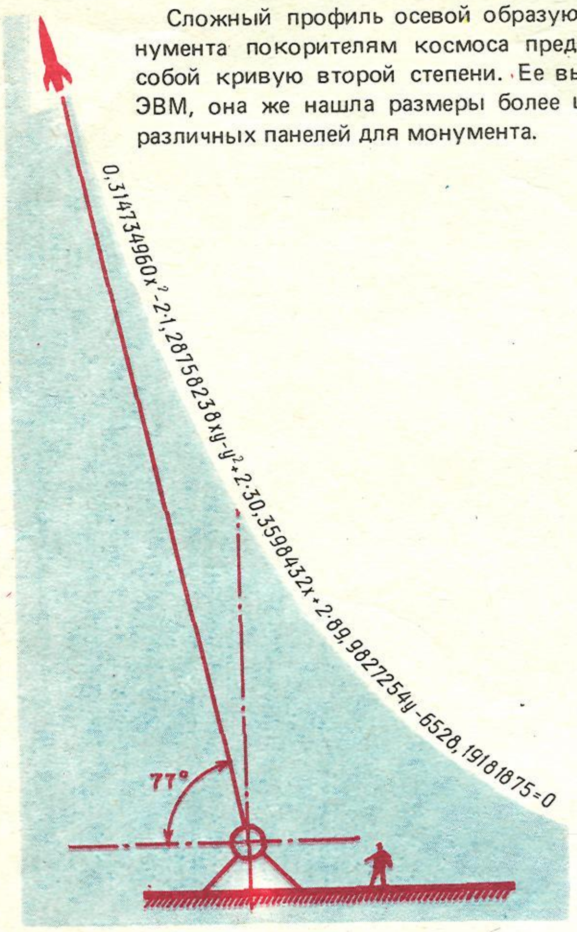
Отображение — это универсальный и необычайно эффективный инструмент познания окружающей действительности. Люди использовали его за много тысячелетий до того, как сформировали современное понятие функции.

Функции, изучаемые в средней школе, — это, в сущности, простейшие математические модели количественных характеристик явлений, которые изучает и использует человек. Эти функции — отдаленные абстракции сложнейших зависимостей, в окружении которых возникает и происходит каждое явление. Если же явление не обладает второстепенными, несущественными признаками, то в результате его изучения получаем искомые закономерности в чистом виде, они дают максимум информации.

Рассматривая функции, представленные на этих плакатах, следует подчеркнуть, что, с одной стороны, люди находили количественные закономерности в реальных явлениях, а с другой — конструировали абстрактные математические модели и лишь затем обнаруживали явления, характеризуемые созданными моделями. Изучив свойства этих моделей, люди начинали применять их в своей практической деятельности. Создание таких моделей было связано, очевидно, как с потребностями развития математики (теория конических сечений Аполлония Пергского), так и с потребностями практики (дельта-функция Дирака и др.).

31. Функции вокруг нас

Сложный профиль осевой образующей монумента покорителям космоса представляет собой кривую второй степени. Ее вычислила ЭВМ, она же нашла размеры более шестисот различных панелей для монумента.



Максвелловская функция распределения молекул газа по модулю скорости (плотность вероятности случайной величины v):

$$F(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi k T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}.$$

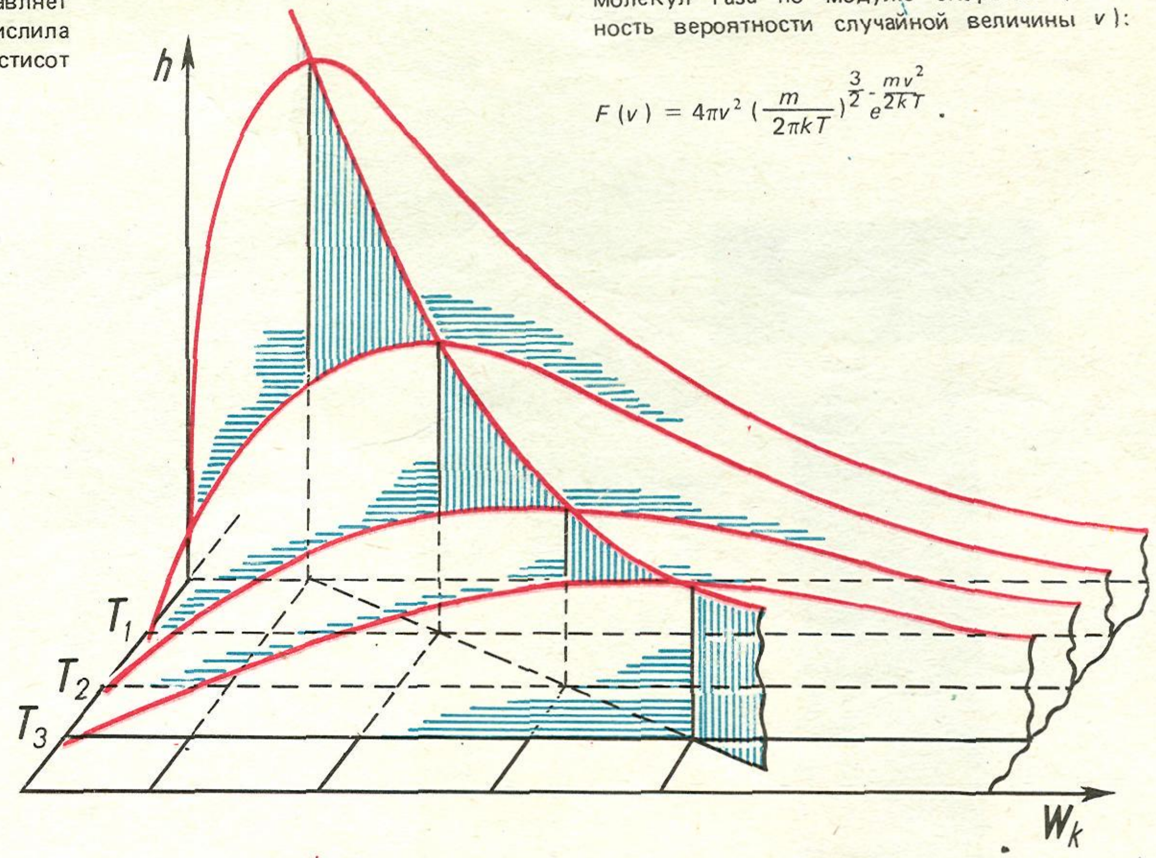


График функции роста дерева

$$x(t) = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \frac{1 - e^{-2\sqrt{ab}\,(t - t_0)}}{1 + e^{-2\sqrt{ab}\,(t - t_0)}}$$

за время t. Постоянные a и b зависят от породы дерева.

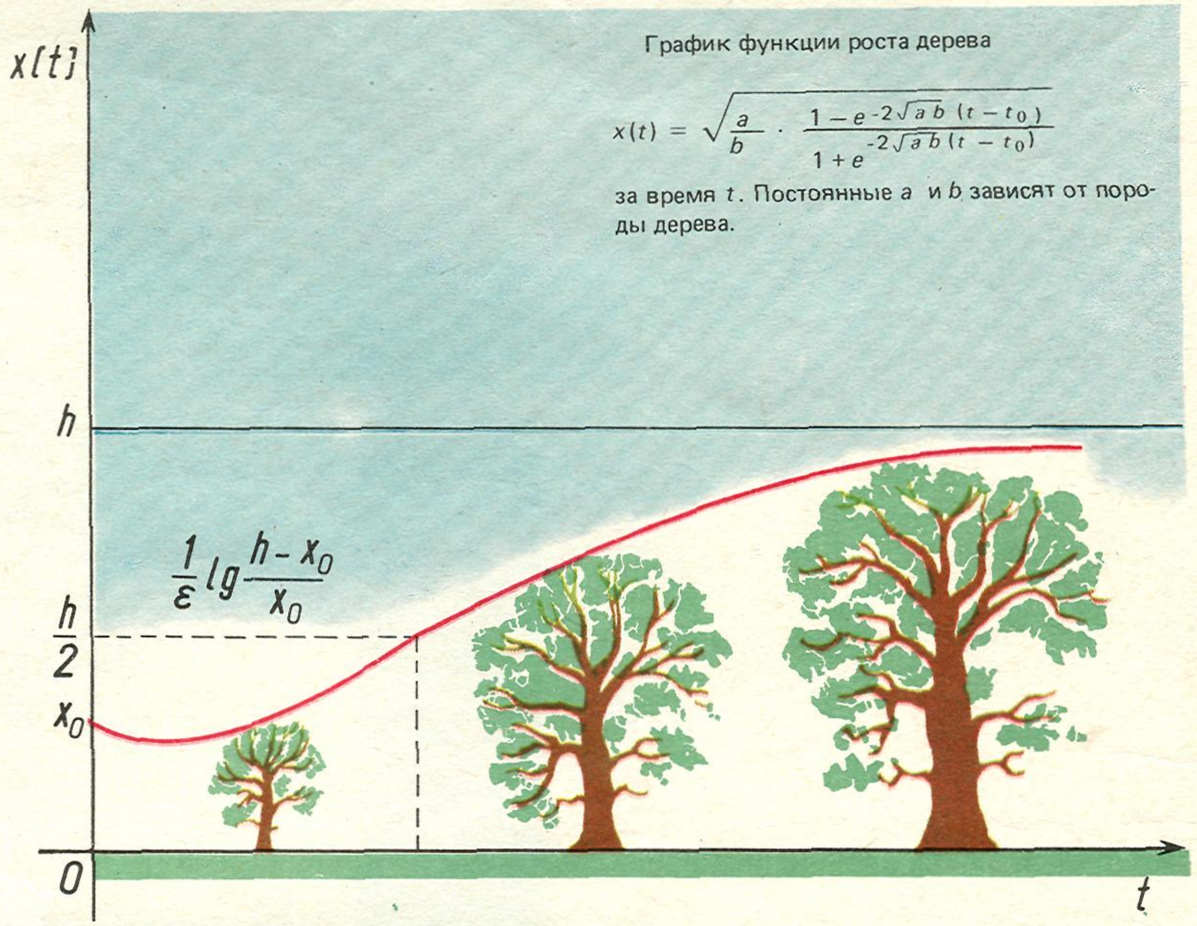
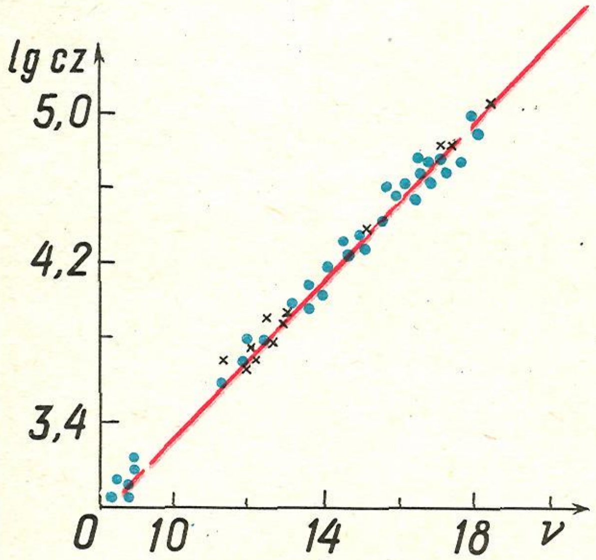
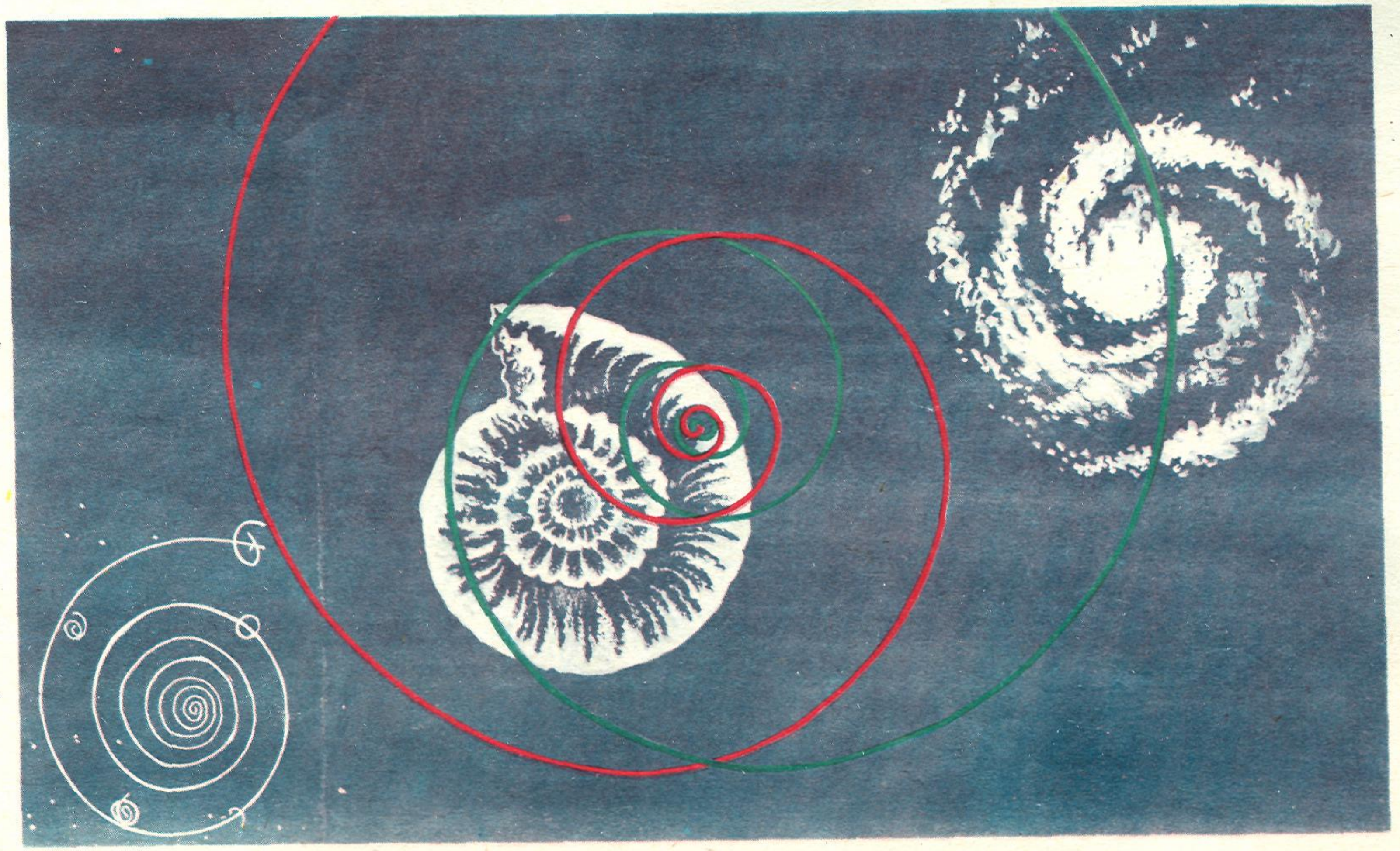


Диаграмма Хаббла — зависимость красного смещения cz от видимой величины ν для 42 наиболее ярких эллиптических галактик в скоплениях.

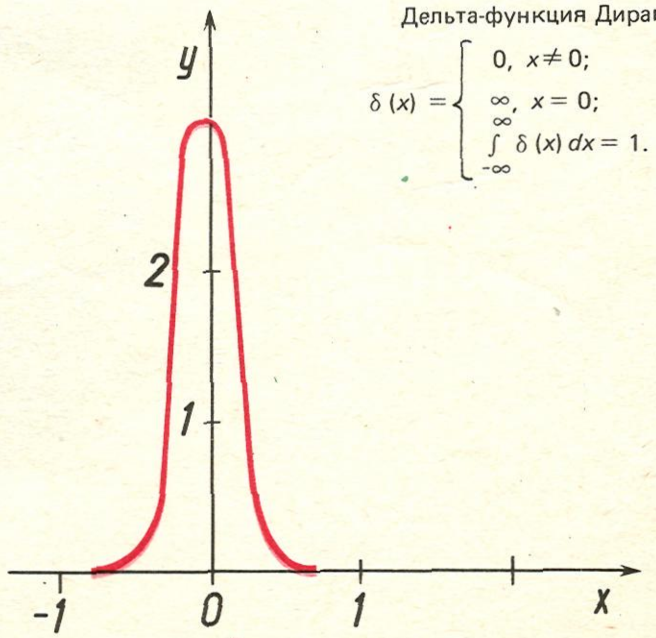




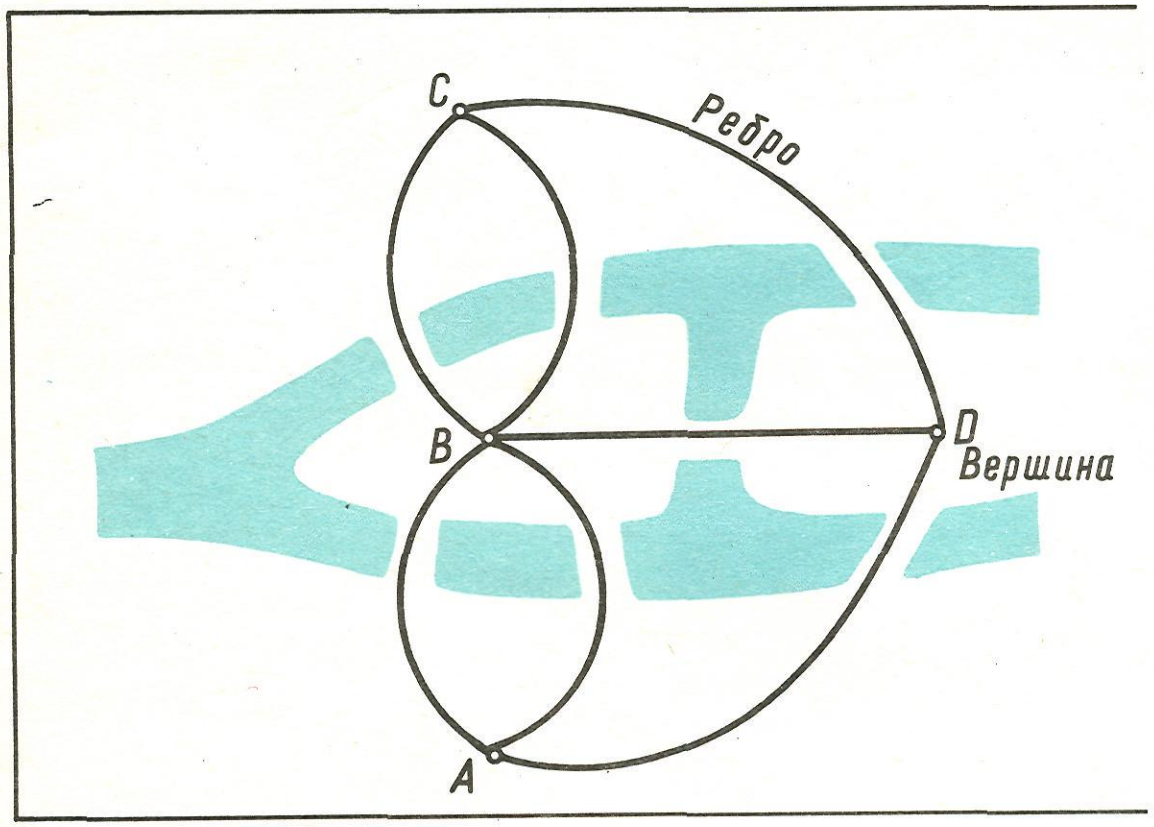
От траекторий движения элементарных частиц до галактик — таков диапазон различных структур живой и неживой материи, динамика различных процессов в которых подчиняется закону логарифмической спирали $\rho = a\varphi$.

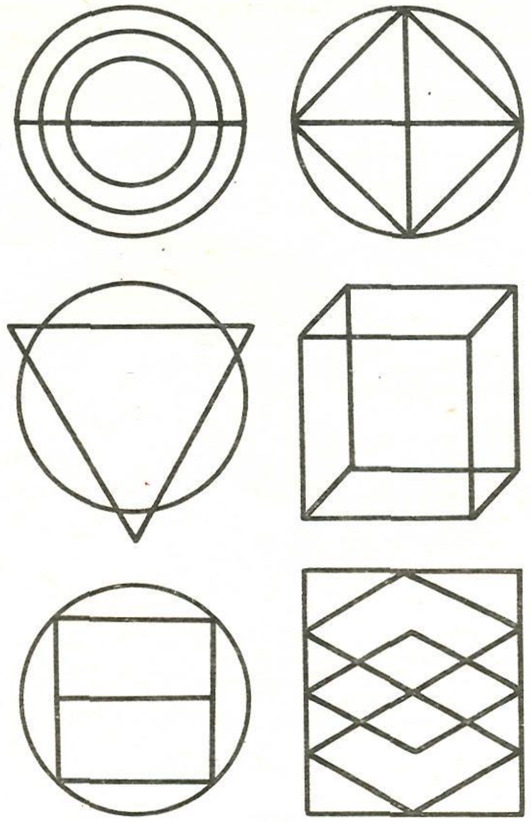
Дельта-функция Дирака

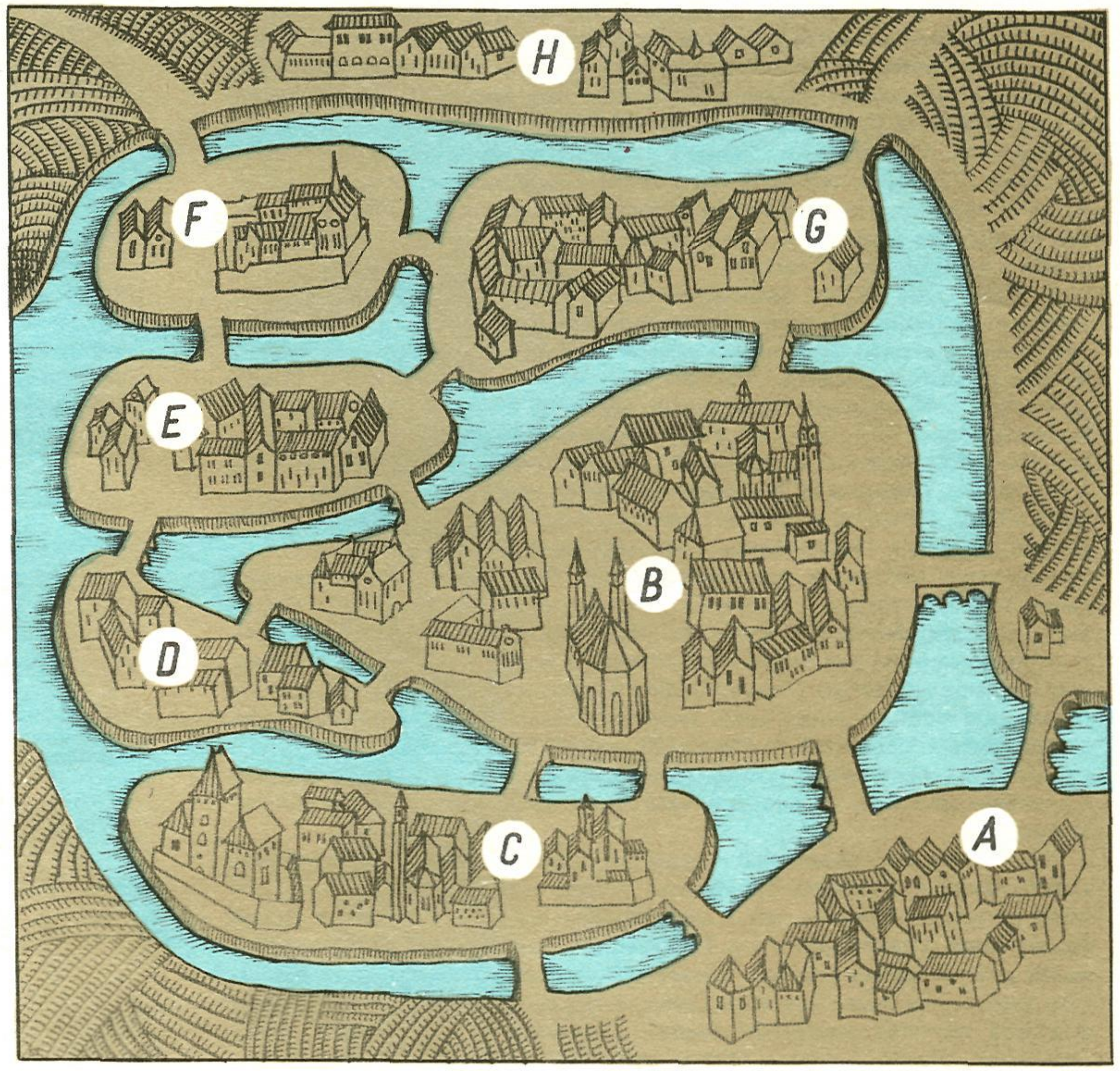
$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0; \\ \infty, & x = 0; \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1. \end{cases}$$

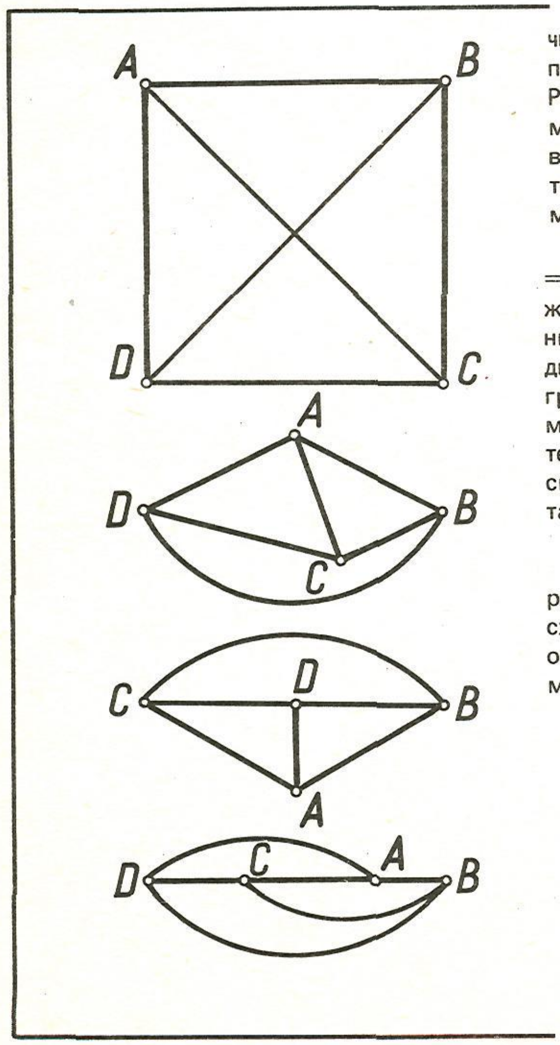


32. Графы и их применения









Теория графов исходит из знаменитой задачи Л. Эйлера о городе семи мостов: город расположен на двух берегах реки и островах. Районы города соединены между собой семью мостами. Можно ли совершить прогулку по всем районам города и вернуться в начальную точку, пройдя лишь однажды по каждому мосту?

Если элементы конечного множества $X = \{A, B, C, D, \ldots\}$ изобразить точками, а множество Y упорядоченных или неупорядоченных пар $(A, B), A \in X, B \in X$,— линиями, соединяющими точки A и B, то говорят, что задан граф. Теория, изучающая свойства этих математических объектов, необычайно содержательна и широко применяется в математическом естествознании, технических и гуманитарных науках.

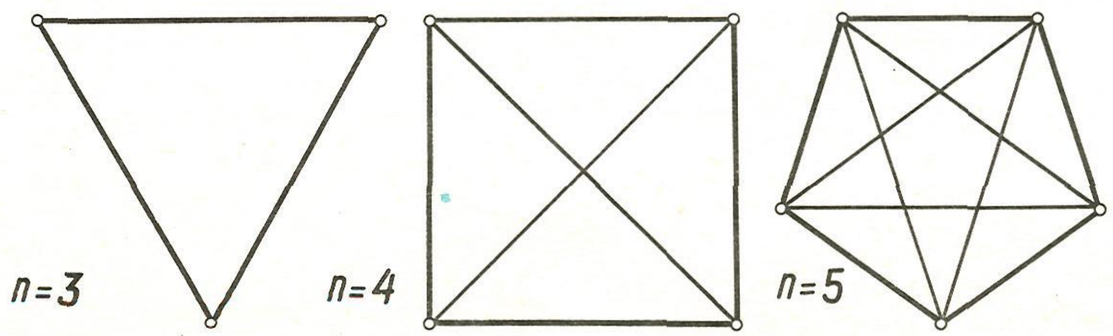
Тот же граф можно изобразить различными рисунками, ведь он представляет собой лишь схему, которая в наглядном виде изображает отношения между элементами некоторого множества.

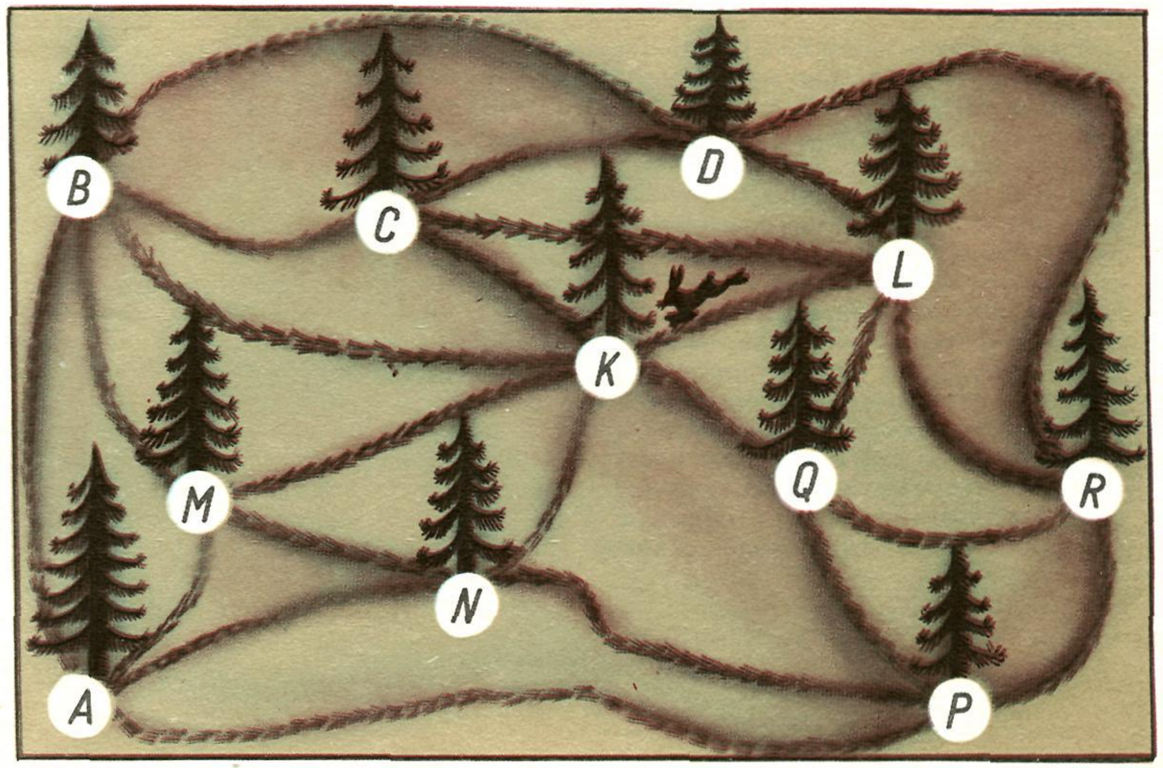
Граф называется полным, если каждые две его вершины соединены одним и только одним ребром. На рисунке — графы для $n = 3$, 4, 5. Сколько ребер содержит полный граф?

Вычерчивание уникурсальных кривых — это всегда построение графов некоторых отношений на множествах определенных элементов.

Начертить граф данного города и проверить, можно ли организовать прогулку по всем улицам города так, чтобы по каждому мосту пройти лишь раз, не проходя дважды по каждой улице.

В небольшом перелеске бегает заяц. Он выскочил из норы и, перебегая от дерева к дереву, оставил следы. В конце концов он спрятался под одним из деревьев. Где в данный момент пребывает заяц? Под каким деревом его нора? Сколько решений имеет задача?





32. Графы и их применения

Теория графов — область дискретной математики, характерной особенностью которой является широкое использование геометрического подхода. Первые проблемы теории графов были связаны с решением задач занимательной математики: задачи о Кенигсбергских мостах (Л. Эйлер), задачи о коне и ферзях на шахматной доске (Л. Эйлер, К. Ф. Гаусс), о перевозке волка, козы и капусты из сборника „Задачи для изощрения ума юношей" Алкуина (735—804), задачи о кругосветных путешествиях и др. Одной из первых теорем теории графов был критерий существования обхода всех ребер графов без повторений, доказанный в 1736 г. Л. Эйлером при решении задачи о Кенигсбергских мостах.

В 1852 г., так же как занимательная, была поставлена задача о четырех красках: можно ли четырьмя красками раскрасить любую карту так, чтобы две соседние страны были на ней разного цвета? Задача оказалась сложной. В 1960 г. удалось доказать, что четырех красок достаточно, чтобы раскрасить карту с 38 странами. Если учесть, что число различных карт с 38 странами превышает 10^{38}, то и самые быстродействующие ЭВМ не смогли бы перебрать такое количество вариантов за сколько-нибудь приемлемый отрезок времени. Только в 1976 г. задача о четырех красках была доказана с помощью ЭВМ. Попытки решить ее привели к новым исследованиям по теории графов, имеющих теоретическое и прикладное значение. В середине XIX в. при решении некоторых практических задач были использованы представления из теории графов и получены новые теоретические результаты. Например, немецкий физик Г. Р. Кирхгоф (1824—1887) при составлении полной системы уравнений для токов и напряжений в электрической схеме предложил представлять такую систему графом и находить в ней основные деревья, с помощью которых выделяются линейно независимые системы контуров.

Английский математик А. Кэли (1821—1895), решая задачу подсчета числа изомеров предельных углеводородов, пришел к задачам перечисления и описания деревьев, обладающих заданными свойствами, и решил некоторые из них.

В XX в. задачи, связанные с графами, начали возникать в физике, химии, электротехнике, биологии, экономике. Теория графов нашла также применение во многих областях самой математики — в топологии, алгебре, теории вероятностей, теории чисел и т. д. Графы широко используются для представления других математических объектов и формальной постановки различных дискретных задач. При этом наряду с термином „граф" употребляются и другие термины, например „карта", „комплекс", „диаграмма", „сеть", „лабиринт". После выхода в 1936 г. монографии А. Кенига „Теория конечных и бесконечных графов" термин „граф" стал более употребительным, чем другие.

В конце 40-х — начале 50-х годов исследования по теории графов значительно расширились, прежде всего в связи с развитием кибернетики и вычислительной математики. Использование ЭВМ позволило решать многие, возникающие на практике задачи, связанные с огромными вычислениями.

В настоящее время теория графов — отдельная богатая методами и проблематикой отрасль математики. Отдельное направление ее исследований, например о подсчете, перечислении и построении графов с заданными свойствами, имеет комбинаторный характер. Задачи на обход графов, укладки и классификации графов ближе к топологии. При анализе надежности связи, электронных схем, коммуникационных и других сетей возникают задачи о нахождении количества непересекающихся цепей, соединяющих различные вершины графа. Теоретический и практический интерес представляют исследования маршрутов, содержащих все вершины или все ребра.

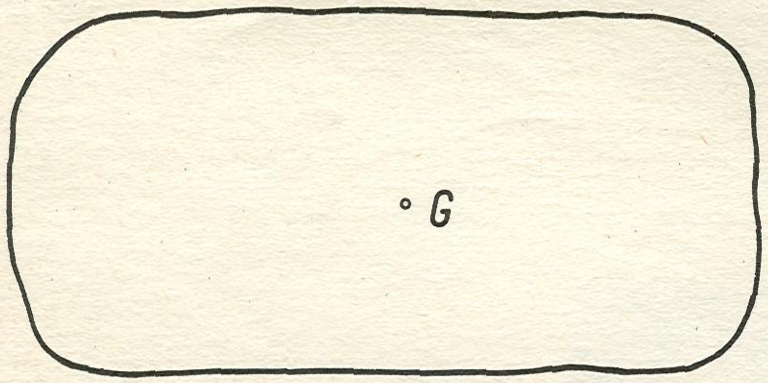
Отдельное направление теории графов связано с раскраской графов. В его рамках изучается разбиение множеств вершин (ребер), обладающих определенными свойствами. Например, требуется, чтобы смежные вершины (ребра) принадлежали различным множествам. Из других циклов задач теории графов назовем задачи на покрытия, упаковки, укладки графов.

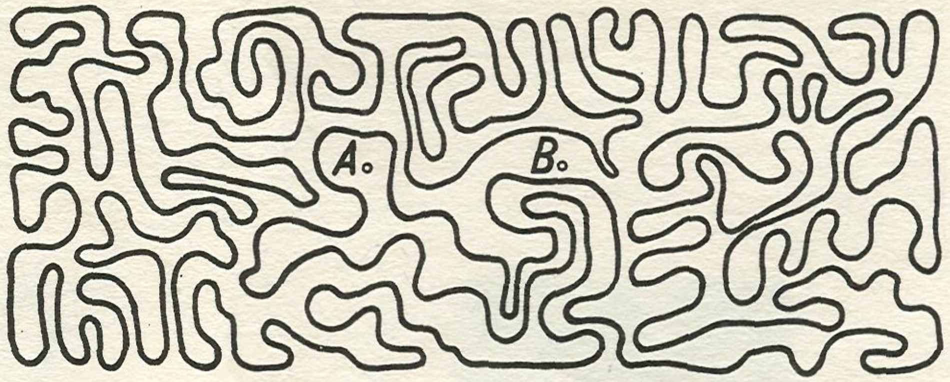
На развитие проблематики теории графов оказали влияние и практические задачи, и различные разделы математики. Под влиянием топологии возникли задачи вложения графов в различные поверхности, на стыке алгебры и теории графов — задачи о группах автоморфизмов графов, влияние теории вероятностей сказалось на постановке задачи о случайных графах.

Большое значение для теории графов имеют вопросы построения эффективных алгоритмов нахождения точных или приближенных решений.

Результаты и методы теории графов нашли широкое применение не только в самой математике, физике, химии и биологии, но и почти во всех областях математического естествознания, гуманитарных и военных науках, например при нахождении оптимальных решений задач планирования и управления разработки проектов, оптимальных маршрутов доставки грузов, перевозки пассажиров, переброски войск, при моделировании сложных технологических процессов, построении различных дискретных устройств, в программировании и т. д.

33. Что такое линия



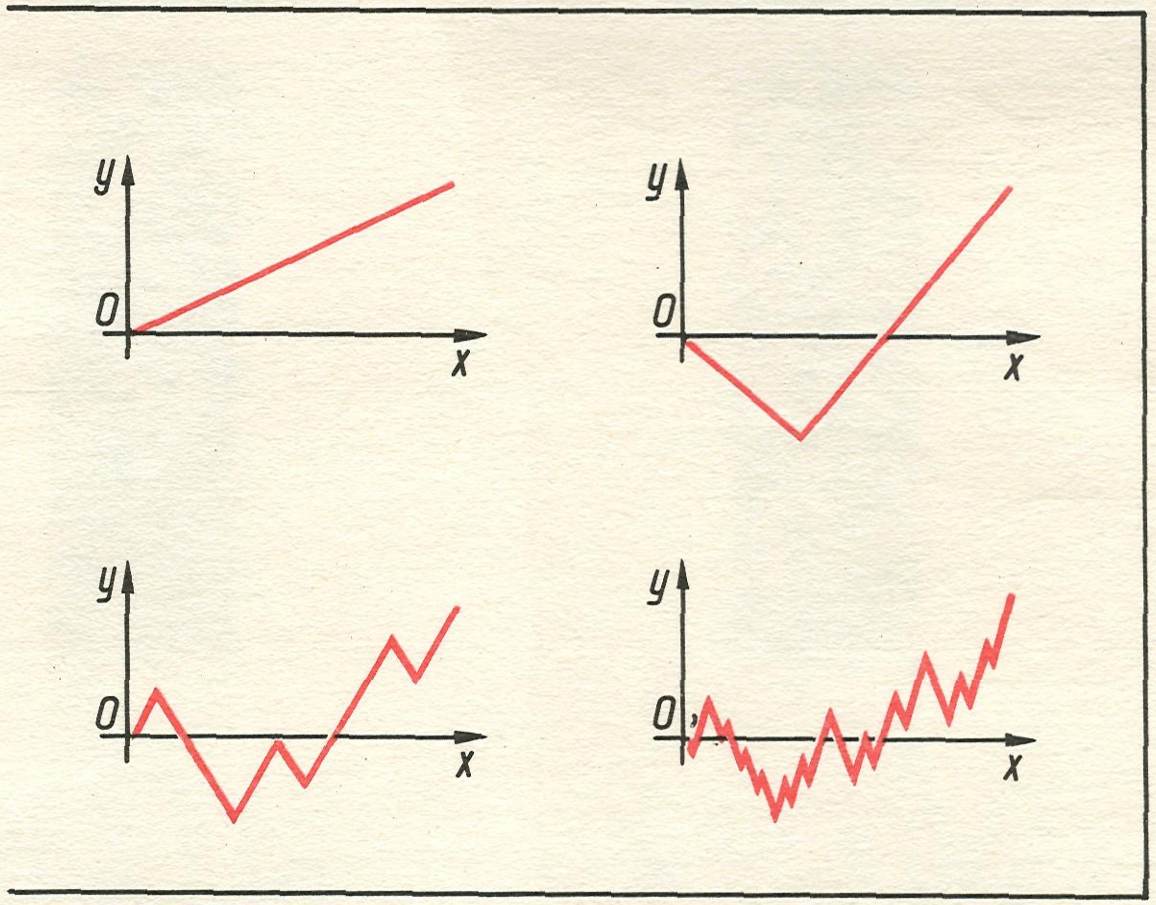


Попытки точного определения понятия линии показали, что это понятие, непрерывно развиваясь, не является досужим вымыслом теоретиков — оно возникло в результате поиска все более гибких средств раскрытия глубинных закономерностей реальной действительности.

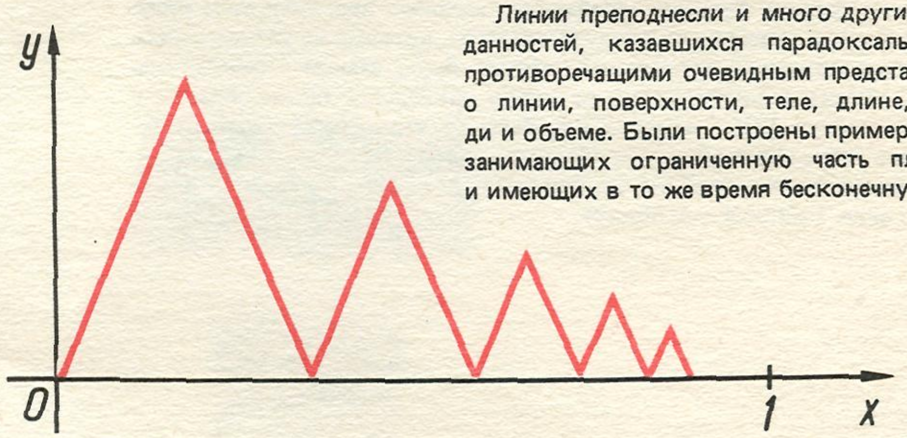
Только в простейших случаях можно ответить на вопрос, принадлежит ли данная точка *внутренней* или *внешней* области относительно данной замкнутой кривой. О точках A и B подобное утверждение уже не очевидно.

В 1872 г. немецкий математик Карл Вейерштрасс (1815—1897) доложил в Берлинской Академии наук о своем знаменитом примере функции, не имеющей конечной производной ни в одной точке. Это означало, что графиком этой функции является линия, не имеющая *ни одного гладкого участка*. На ней невозможно найти точку, в которой можно было бы провести касательную.

Однако еще раньше, в 1830 г., выдающийся чешский математик и философ Бернард Больцано (1781—1848) дал пример функции (функция Больцано), графиком которой также будет непрерывная линия, не имеющая производной ни в одной точке.



Первые шаги построения графика функции Больцано.

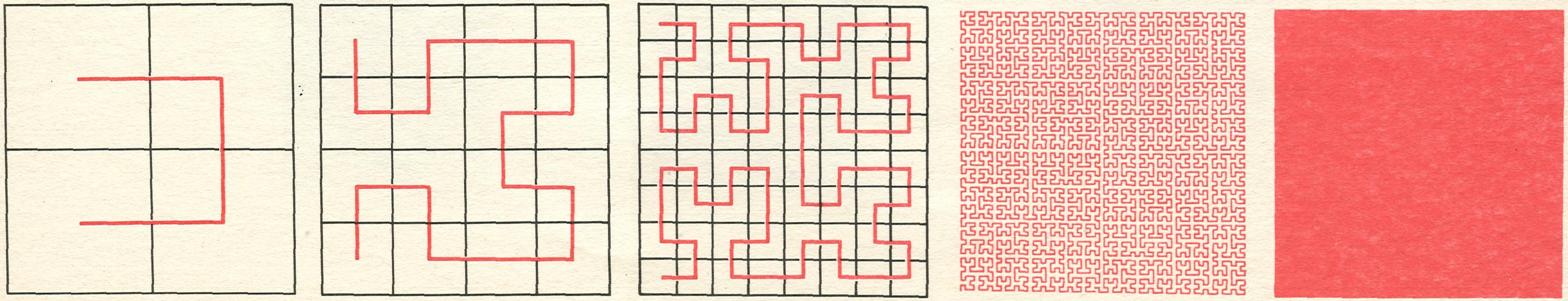


Эта ограниченная кривая имеет бесконечную длину.

Линии преподнесли и много других неожиданностей, казавшихся парадоксальными и противоречащими очевидным представлениям о линии, поверхности, теле, длине, площади и объеме. Были построены примеры линий, занимающих ограниченную часть плоскости и имеющих в то же время бесконечную длину.

В 1890 г. итальянский математик Джузеппе Пеано (1858—1932) ошеломил математиков новой неожиданностью. Он опубликовал пример линии (кривая Пеано), которая проходит через все точки квадрата. Казалось, что самые основные, первичные математические понятия теряют смысл, так как исчезает различие между линией и поверхностью, поверхностью и телом. Выдающийся французский математик Анри Пуанкаре, ознакомившись с примером Пеано, с горечью воскликнул: „Как могла интуиция до такой степени обманывать нас!"

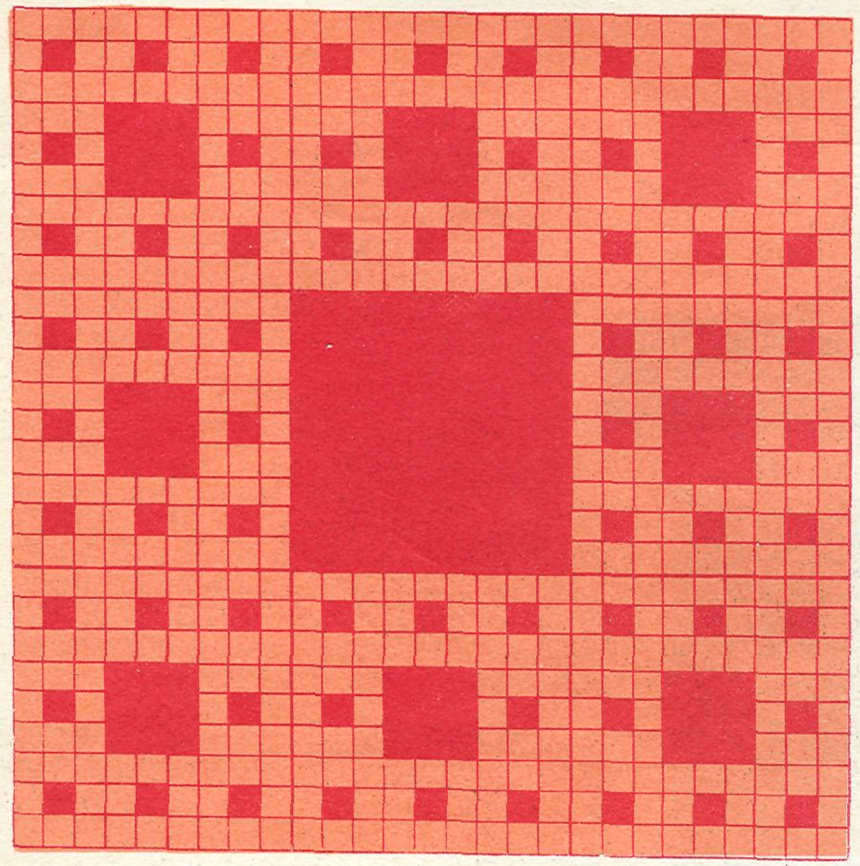
Не всегда легко ответить на вопрос, линией или телом будет геометрическая фигура, если процесс построения ее продолжить до бесконечности. Интересно в связи с этим продолжить до бесконечности очевидный процесс построения такой удивительной геометрической фигуры.

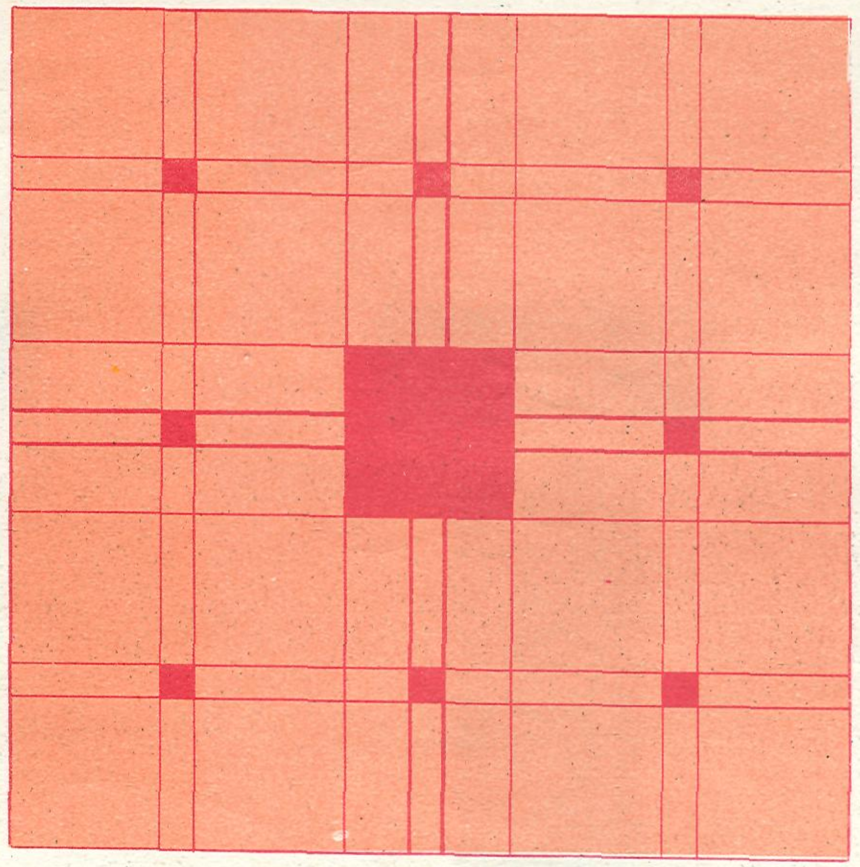


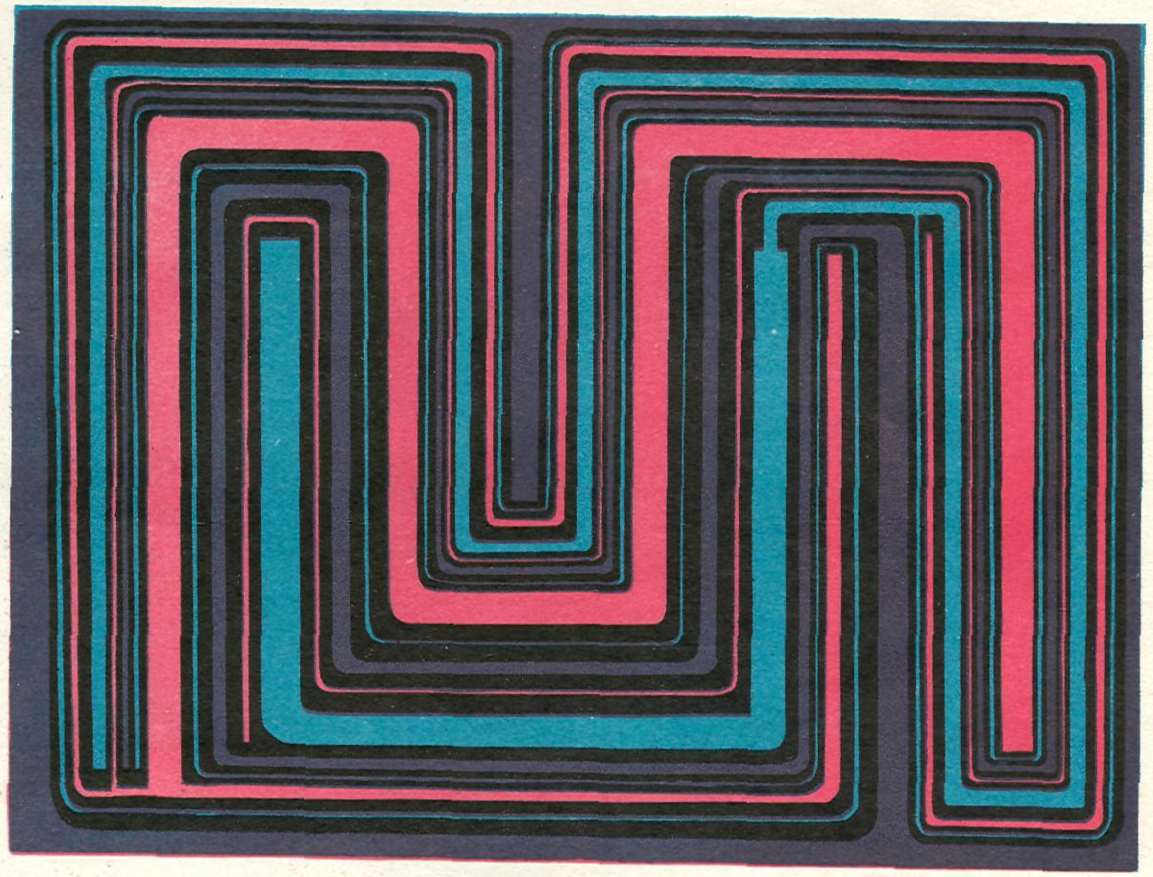
33, 34. Что такое линия

Уточнение понятия линии — яркий пример своеобразного поединка научной мысли с абстракцией бесконечности. Часто ученым казалось, что математика достигла абсолютной строгости в определении понятия линии. И всегда бесконечность раскрывала какие-то новые его грани. В результате граничных переходов при геометрических построениях или в формулах, дающих аналитическое задание функции (графиком последних являются чаще всего какие-то линии), в математику входили объекты, которые не укладывались в рамки существующих определений. Может быть, самым неожиданным свойством многих геометрических объектов, вошедших таким образом в математику в конце XIX — начале XX в., было то, что их размерность не укладывалась в привычные двух- или трехмерные пространства. Эти геометрические монстры имели дробные размерности, поэтому их называли фракталями (от англ. fractional — дробный).

34. Что такое линия







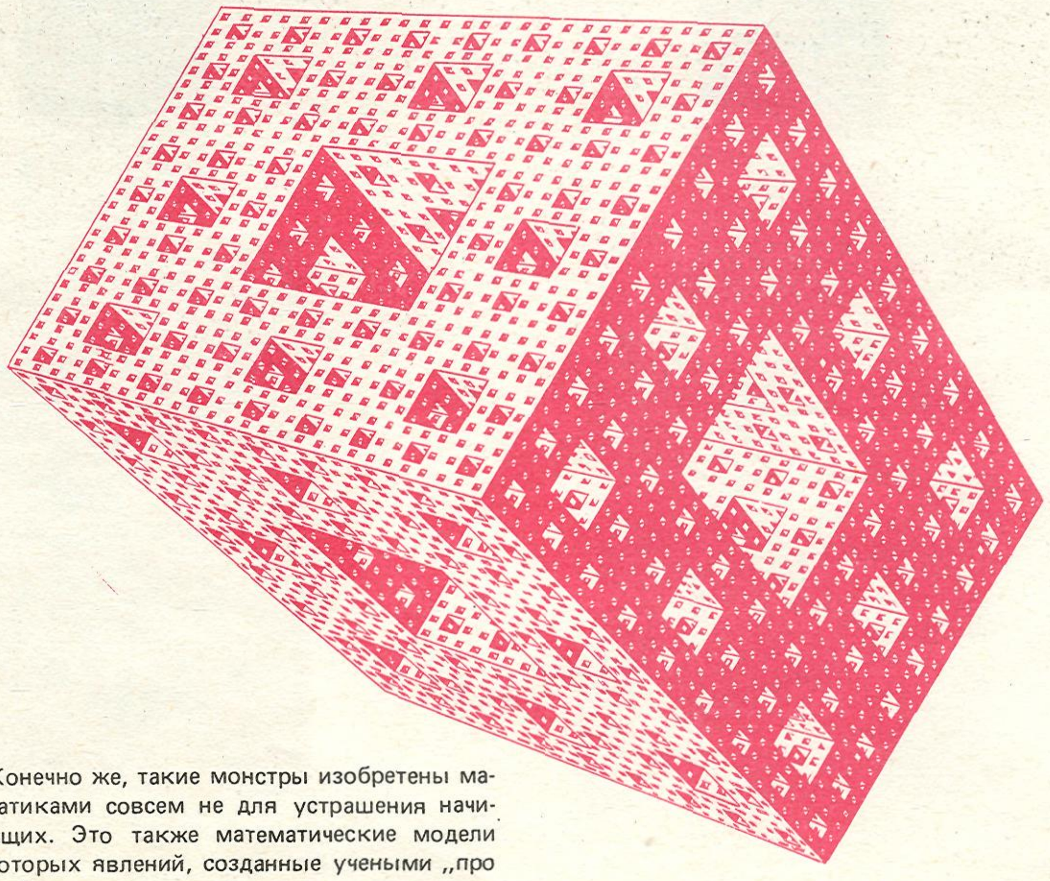
Два варианта континуума (или, как его чаще называют, ковра) Серпиньского на одном из этапов построения. В результате предельного перехода (продолженного до бесконечности построения) получаем ограниченные, но неквадрируемые фигуры, поскольку границами их являются кривые, имеющие ненулевую площадь.

По тому же принципу, что и ковры Серпиньского, строится некубируемая фигура — губка Серпиньского.

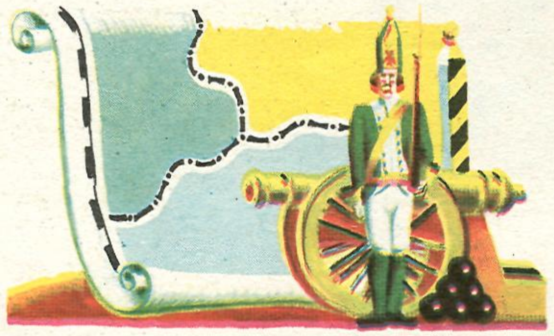
Составляя по-разному последовательности квадратов, внутренности которых выбрасываются из единичного квадрата, можно получить различные примеры фрактальных ковров таких, что площади их будут удовлетворять соотношению $0 \leqslant F < 1$.

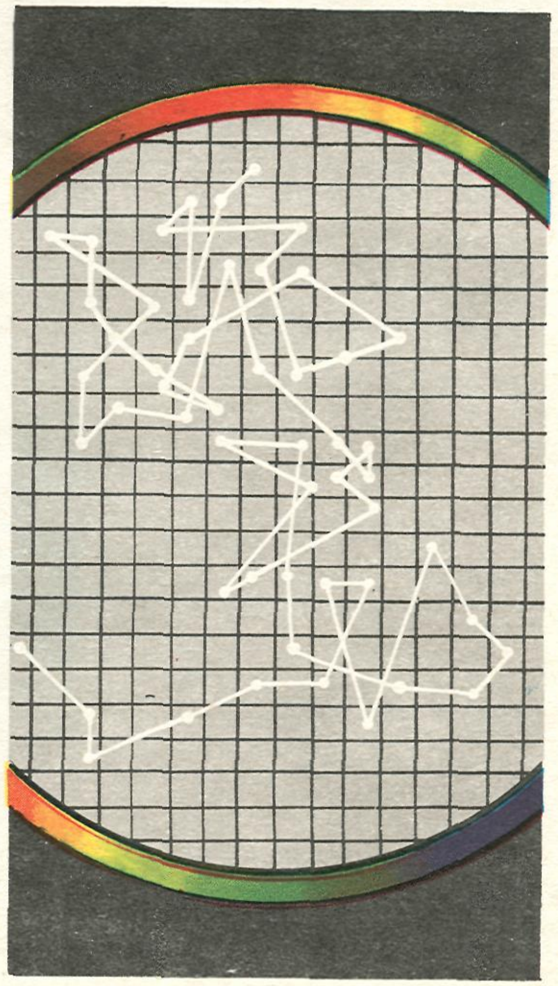
Континуум Вада — второй вид неквадрируемых фигур. Он демонстрирует еще одну неожиданность, преподносимую бесконечностью. Если данный прямоугольник и построенные в нем системы двух каналов интерпретировать как некоторые государства, то оказывается, что могут существовать точки, в которых сходятся границы трех государств.

Кажется, что таких точек не может быть много и что все они изолированы друг от друга. Континуум Вада опровергает такое очевидное предположение. Бесконечные множества упомянутых точек могут составлять линию бесконечной длины, хотя вся она является собственным (не совпадающим со всем множеством) подмножеством множества точек данного квадрата.



Конечно же, такие монстры изобретены математиками совсем не для устрашения начинающих. Это также математические модели некоторых явлений, созданные учеными „про запас", причем в данное время они уже нашли важные применения при исследованиях многих сложных процессов окружающей нас действительности. Оказалось, что для таких процессов традиционные, послушные и лишенные странностей геометрические фигуры уже не могут быть орудием исследования. Дальнейшее постижение тайн природы возможно лишь с помощью фракталей.



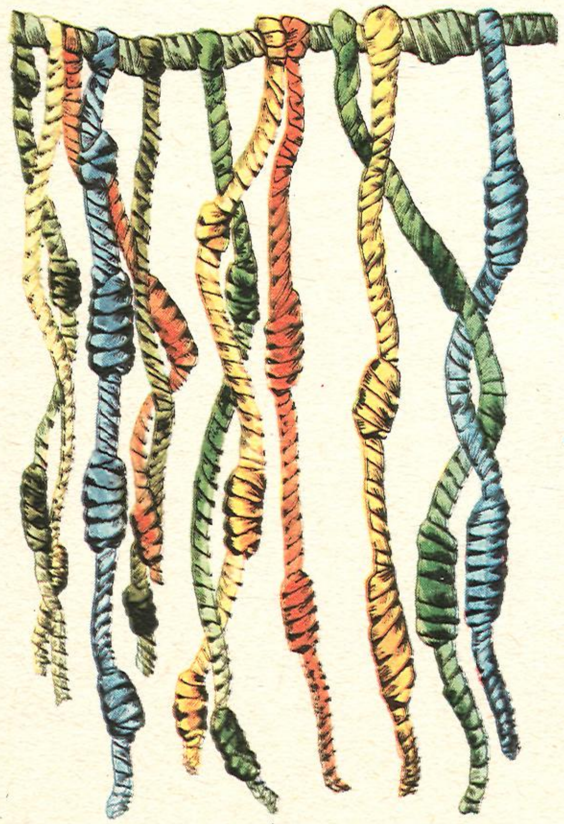


Броуновское движение, далеко не самый сложный вид физической формы движения материи, яркий пример фрактальности. Если рассматривать все более подробно путь, пролетаемый со скоростью артиллерийского снаряда молекулой, то длина пути возрастает бесконечно. Окончательно начертить его невозможно. На сходство между молекулярными траекториями и „чудовищными" кривыми указал лауреат Нобелевской премии Жан Перрен (1870—1942): „Удивительное явление, — поражался ученый, — исследуя траектории, приходишь к выводу, что имеешь дело с функцией, абсолютно лишенной производных. Это то, чему в математике нет названия...".

35. От счета на пальцах до ЭВМ

Пальцы человека были не только первым счетным прибором, но и первой вычислительной машиной. Сохранились многочисленные свидетельства о счете и вычислениях с помощью пальцев рук.

Аборигены Южной Америки считали и вычисляли при помощи системы узлов, завязанных на веревках или ремнях. Такие приспособления для веревочно-узлового счета назывались квипу.



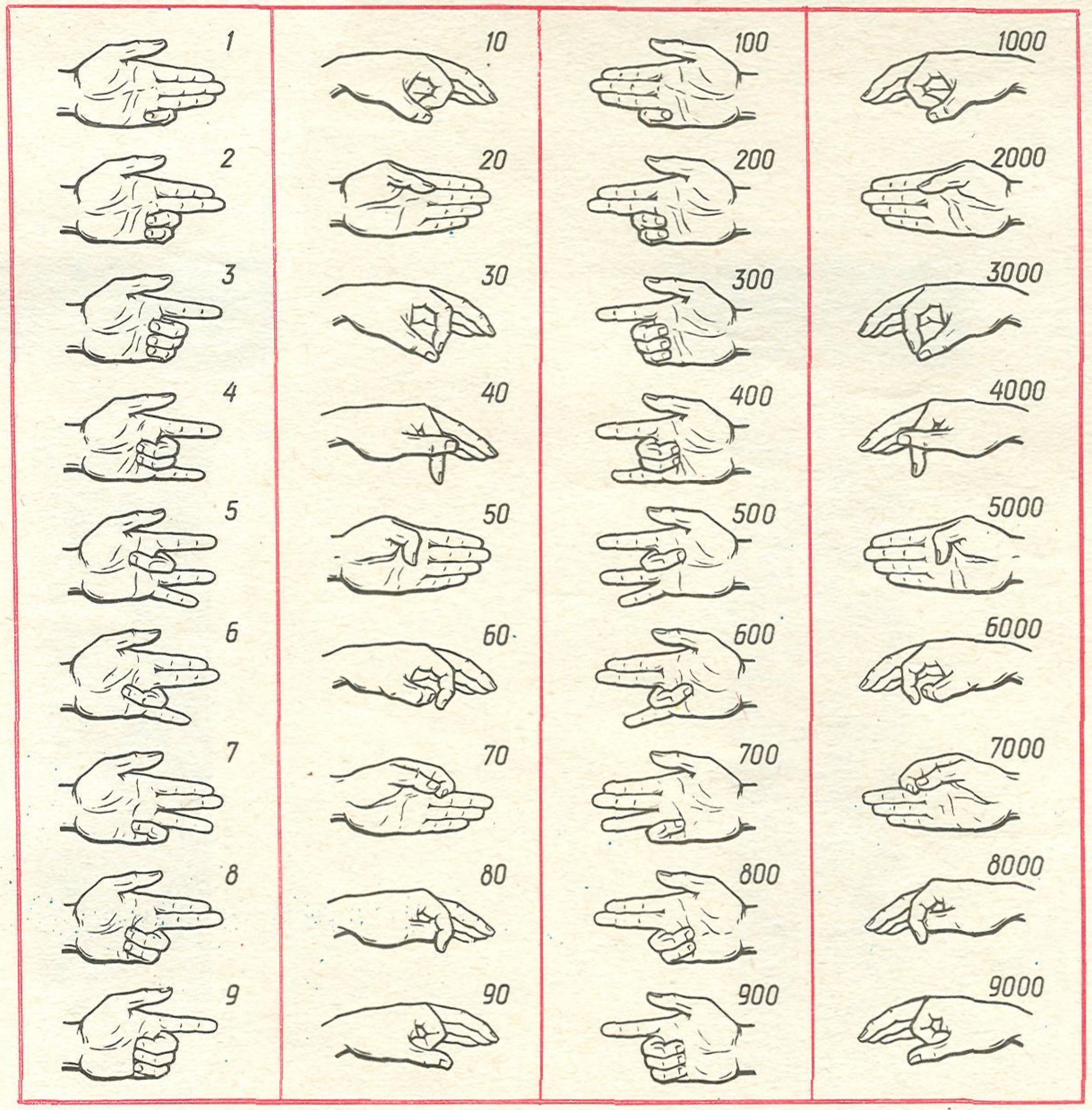
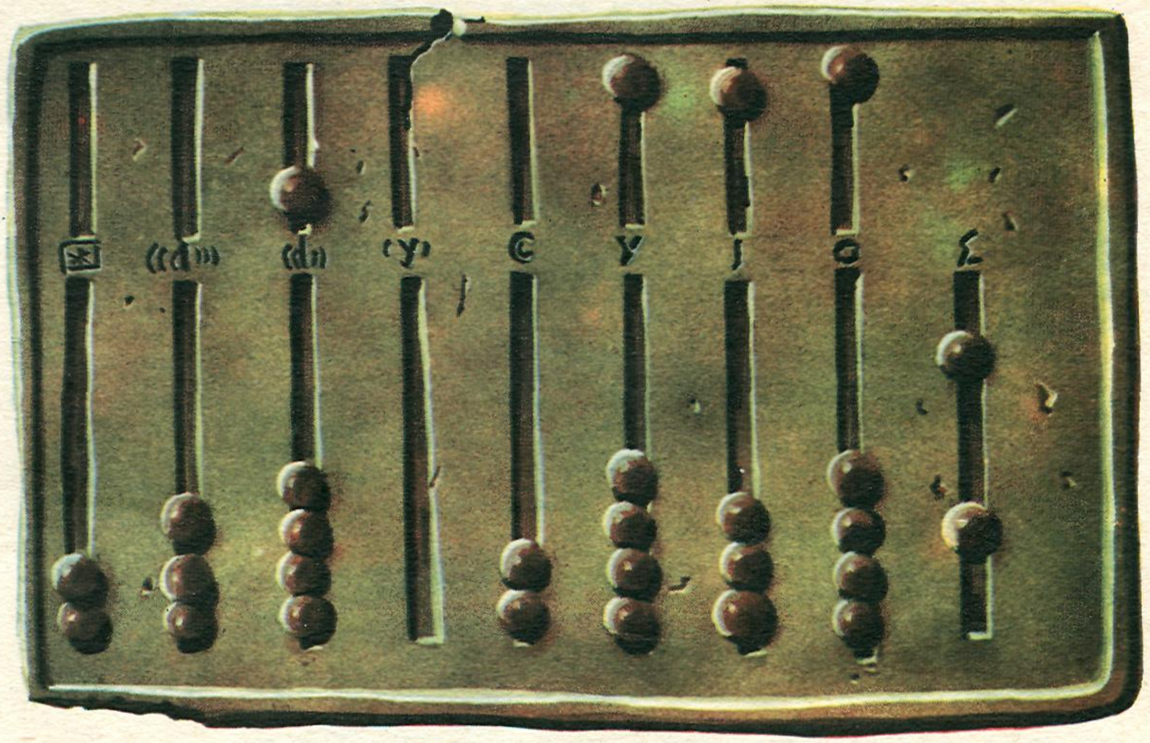


Таблица пальцевого счета из книги Луки Пачоли.

Для хранения числовой информации делали зарубки на деревьях и палках. Последние в России назывались бирками. В истории, народном творчестве и литературных произведениях много раз упоминается о счете при помощи зарубок и, в частности, при помощи бирок.

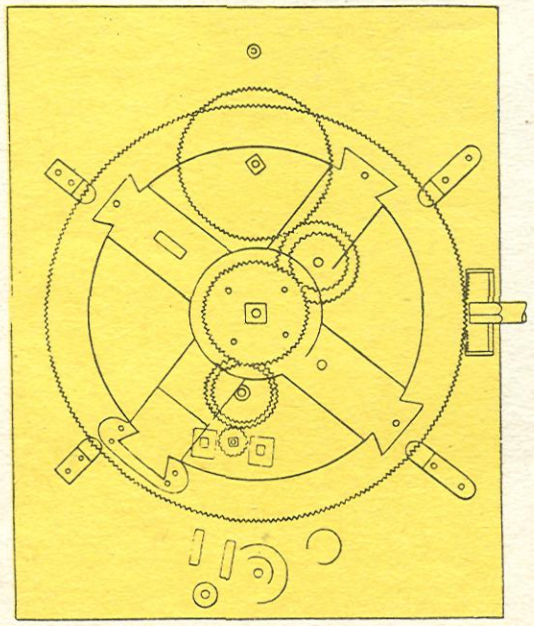


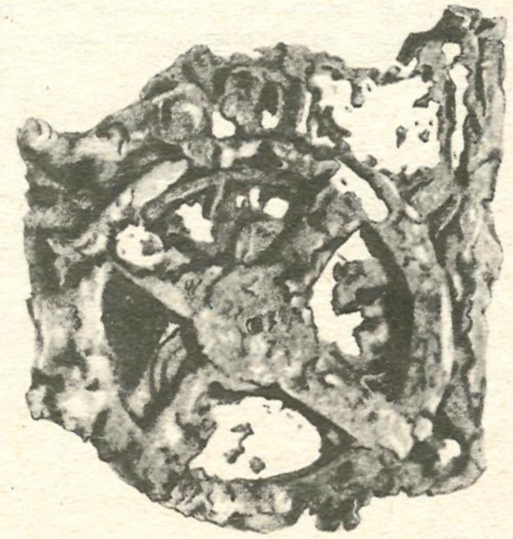
Абак — вычислительная машина античного мира. На нем представлено число

$$2\,390\,298 + \frac{10}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48}.$$

Деталь вазы Дария. Оценщик подсчитывает на счетной доске поступление налогов. Цифры аттичной нумерации на доске записано: 10 000, 1000, 10, 5.

Можно лишь вообразить, какой была вычислительная машина древних греков, деталь которой найдена на дне Средиземного моря. Полагают, что она представляла собой чудо вычислительной техники.





35—37. От счета на пальцах до ЭВМ

История математики — это, в сущности, история открытий и совершенствования алгоритмов решения различных задач. Среди них вычислительные алгоритмы имеют древнюю и необычайно богатую историю. Количество пальцев на руках человека не только стало основой позиционной системы счисления, ставшей в конце концов общепризнанной. Пальцы были для человека и первой вычислительной машиной. Значение их как средства счета прекрасно описал русский исследователь Новой Гвинеи Н. Н. Миклухо-Маклай.

Абак — вычислительная машина античного мира — представляет собой доску с прорезями или линиями, вдоль которых передвигали камешки или шарики. На абаке можно было выполнять действия и с дробными числами. Для этого предназначались два крайних паза. Абаком можно называть любой счетный прибор, на котором имеются специальные места для отдельных разрядов чисел в зависимости от системы счисления.

В 1901 г. на дне Средиземного моря был найден загадочный инструмент. В результате кропотливого изучения выяснилось, что он представляет собой сложную измерительную и вычислительную машину для определения времени протекания некоторых астрономических явлений. Факт существования такого технического чуда в I в. до н. э. вызывает удивление даже в эпоху электронных и транзисторных гигантов.

Своеобразное средство счета и вычислений изобрели аборигены Южной Америки. Имеются в виду счетные веревки или ремешки — „квипу”.

Значительным шагом вперед в развитии вычислительной техники была вычислительная машина профессора Тюбингенского университета Вильгельма Шиккарда.

Изобретение логарифмов обусловило появление многочисленных таблиц логарифмов, а с XVIII в. начала широко применяться в вычислительной технике счетная логарифмическая линейка.

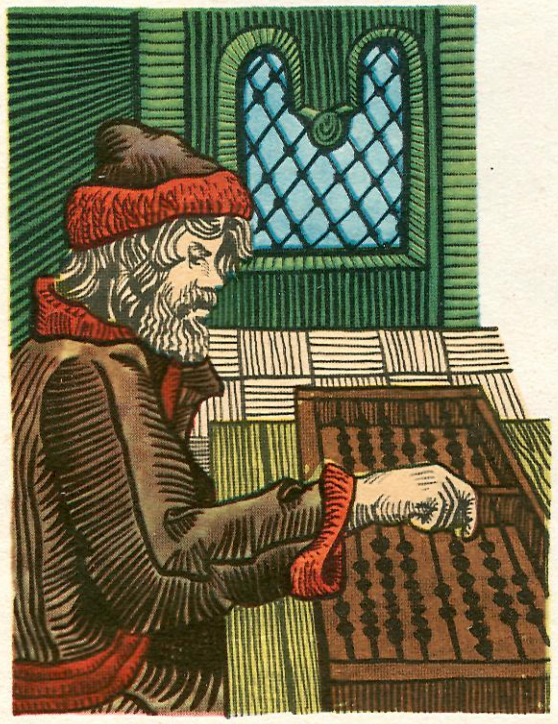
Наиболее ярко идея современных автоматических вычислительных машин была реализована в проекте английского математика и изобретателя Чарльза Беббеджа (1792—1871). Необычайно смелые идеи опередили эпоху и не могли быть реализованы при жизни ученого.

Качественно новым этапом в развитии вычислительной техники явилось создание ЭВМ. Предком ее считается аналитическая машина Беббеджа. До нее существовали лишь очень отдаленные предшественники ЭВМ. Первая ЭВМ, в которой использовались лишь электромагнитные реле и вакуумные лампы, вступила в действие в 1946 г., а 25 декабря 1951 г. была введена в действие первая советская ЭВМ — Малая электронно-счетная машина (МЭСМ), разработанная под руководством академика С. А. Лебедева.

Дальнейшая история развития ЭВМ больше всего напоминает взрыв, продолжающийся до наших дней. Что же касается диапазона применения ЭВМ, то сейчас трудно назвать отрасль науки и практической деятельности человека, где бы они не применялись.

Выдающимися успехами в развитии мощной современной вычислительной техники отмечен научный поиск советских ученых. Особенно ощутимы достижения ученых института кибернетики АН УССР. Научный коллектив под руководством и при непосредственном участии академика В. М. Глушкова создал серию первоклассных электронных помощников для инженеров, физиков, математиков, работников народного хозяйства.

36. От счета на пальцах до ЭВМ

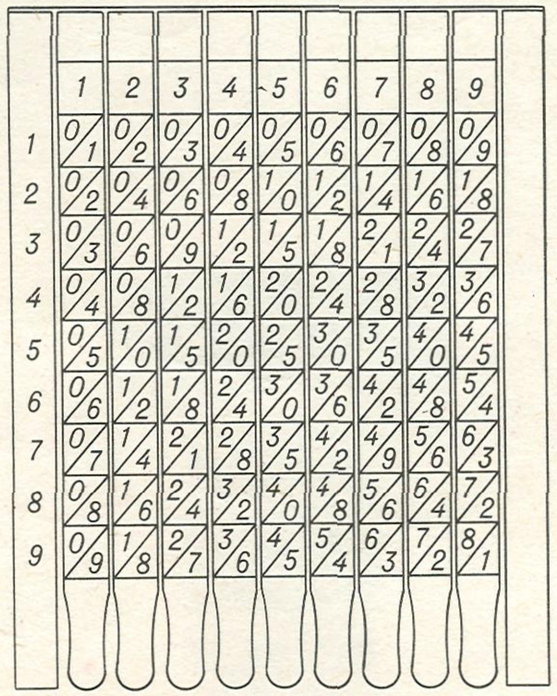


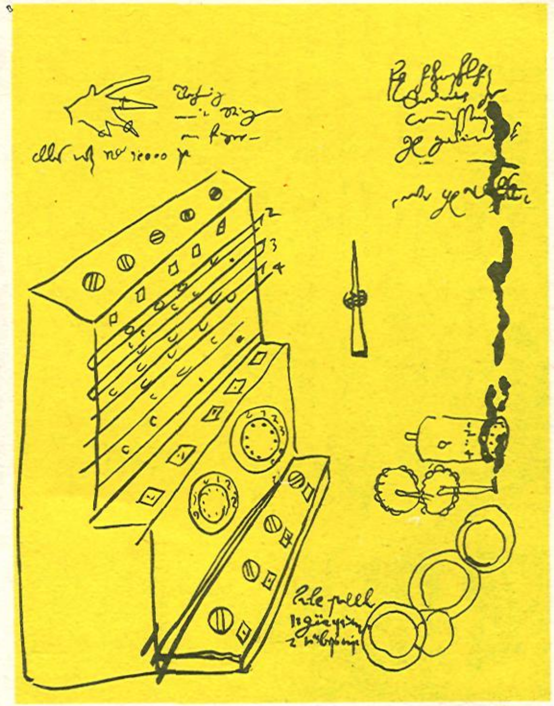
На Руси во времена Ивана III были изобретены счеты. Первичная их форма — дощаный счет — представляла собой доску или рамку с шариками, нанизанными на шнурки. На ней выполнялись четыре арифметических действия с натуральными и дробными числами.

Позиционная десятичная система счисления обусловила появление новых вычислительных алгоритмов. Соревнование абациста с алгоритмиком. Рисунок из книги Г. Рейша „Философская жемчужина" (1503) иллюстрирует борьбу между сторонниками старого метода вычислений на линиях (их олицетворяет Пифагор) и пропагандистами нового метода — алгоритмиками, которых представляет Боэций (480—524).

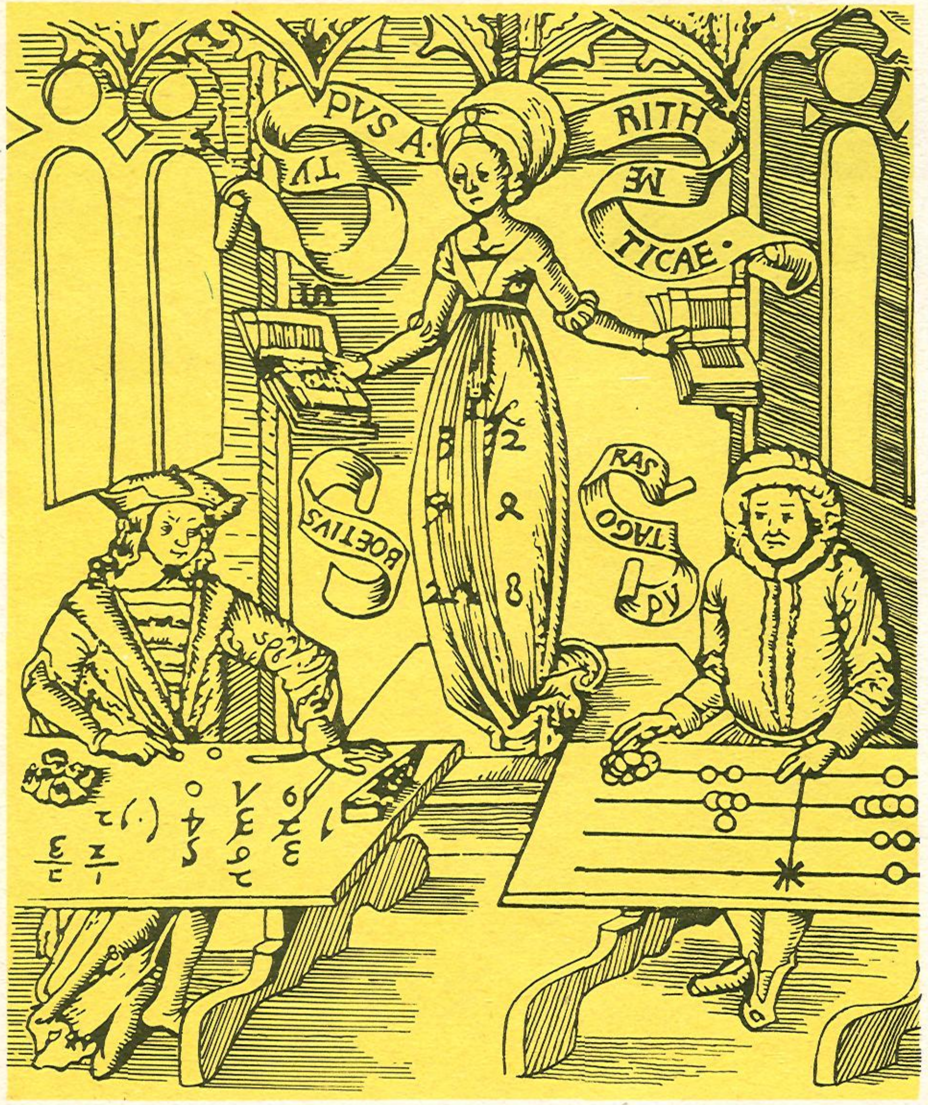
Счетные палочки Джона Непера.

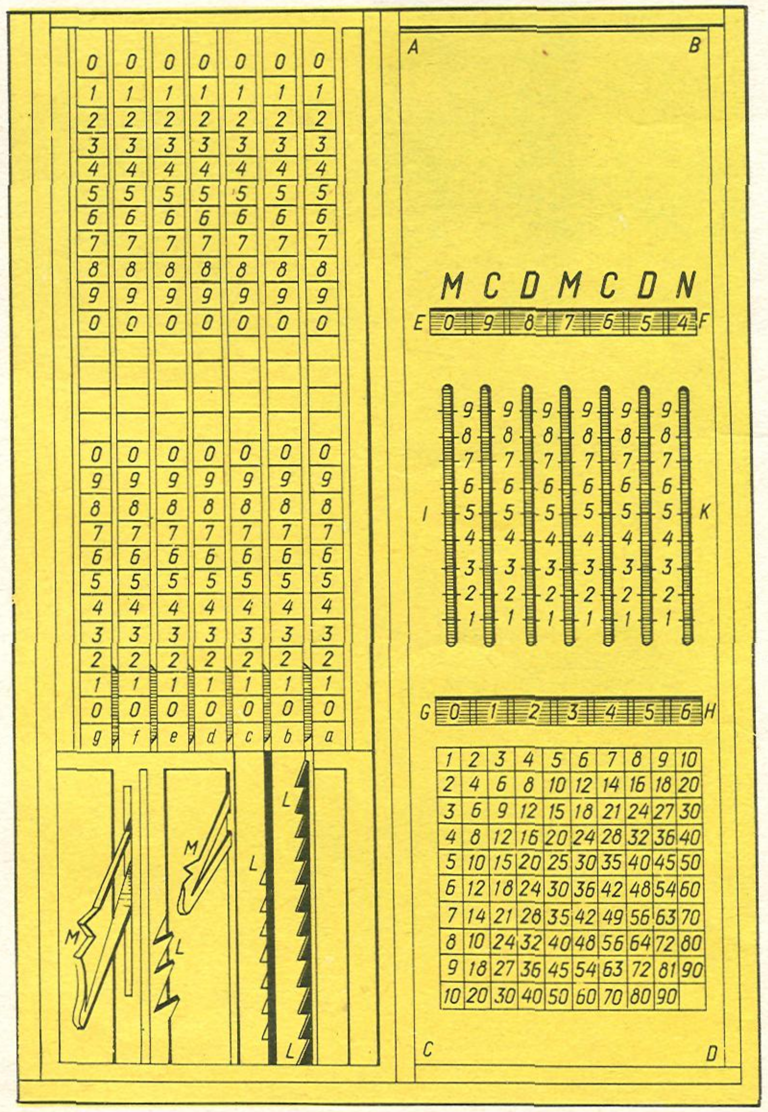
Суммирующая машина французского ученого и изобретателя Клода Перро (1613—1688) — рабдологический абак. Идеи Перро нашли применение в ряде простых и надежных вычислительных приборов.

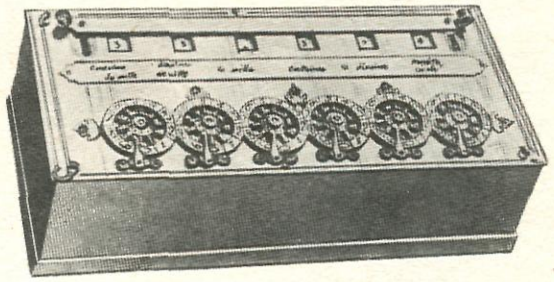




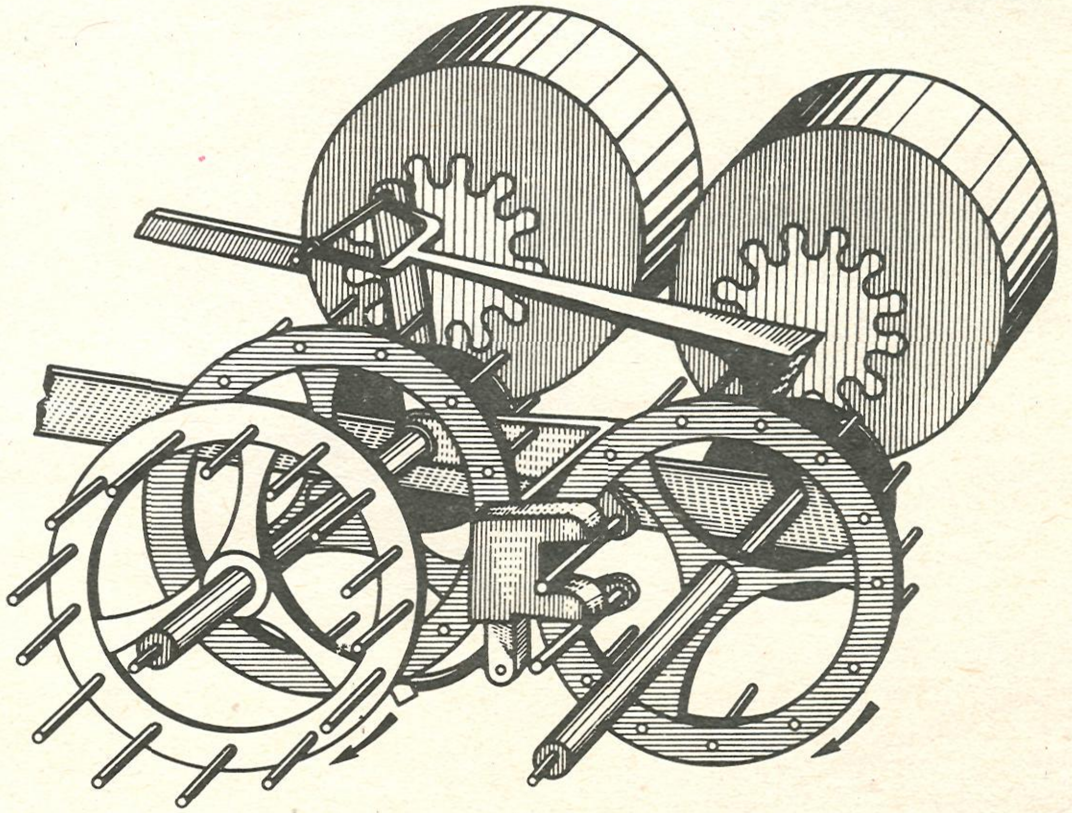
По приговору инквизиции счетную машину профессора Тюбингенского университета Вильгельма Шиккарда (1592—1635) сожгли, и до нас дошли лишь чертежи этого замечательного приспособления.



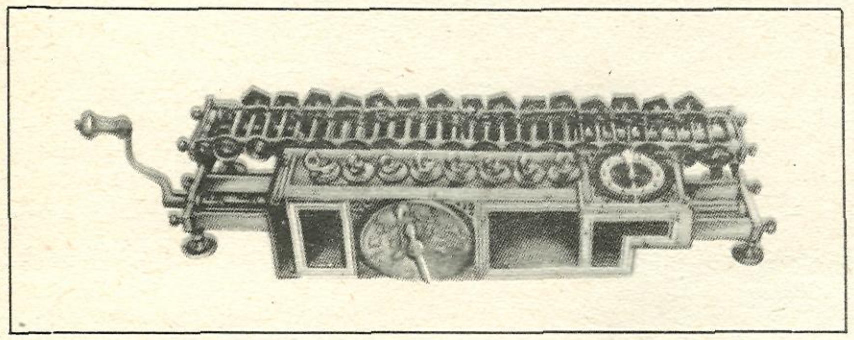


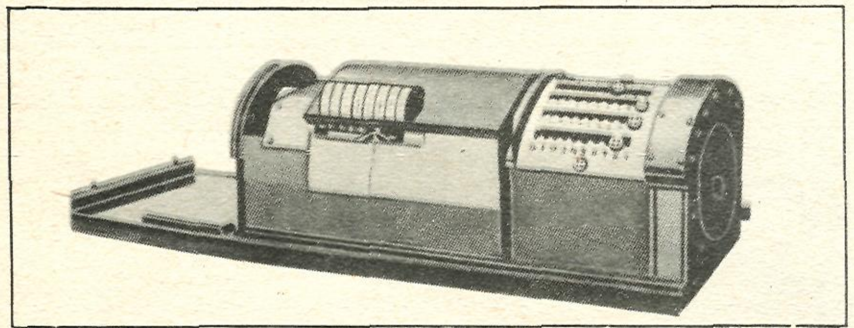


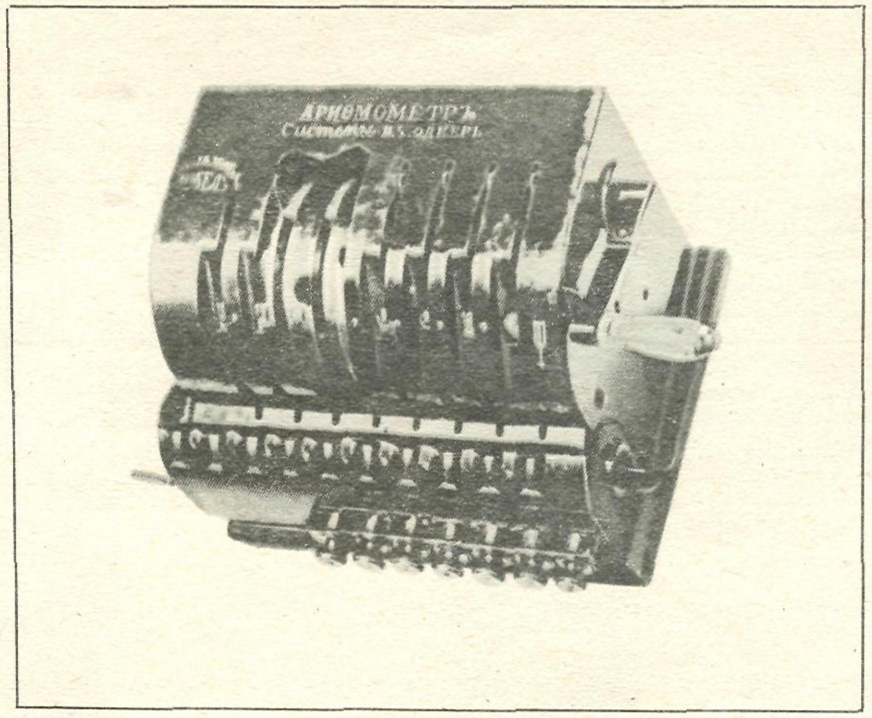
Через четыре года после смерти Шиккарда великий французский ученый Блез Паскаль (1623—1662) создал счетную машину новой конструкции.

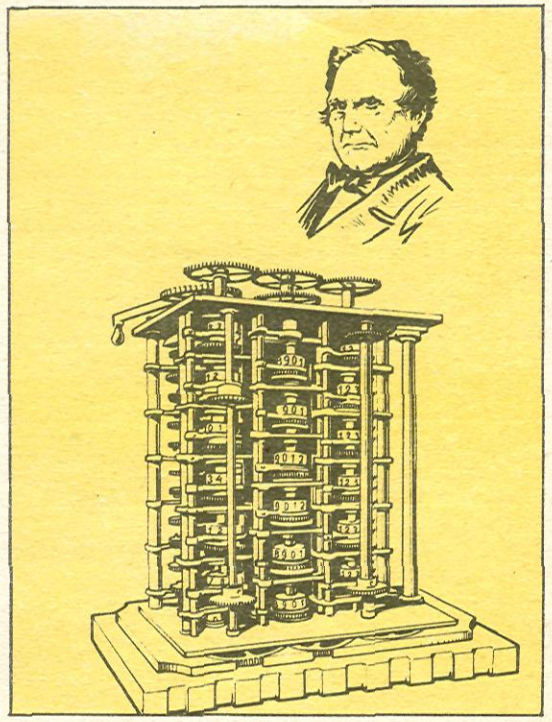


37. От счета на пальцах до ЭВМ









В 1670 г. выдающийся немецкий математик Г. В. Лейбниц (1646—1716) изобрел счетную машину для выполнения четырех действий арифметики с многоразрядными числами. Арифмометр Г. В. Лейбница стал заметной вехой на пути совершенствования конструкций счетных машин.

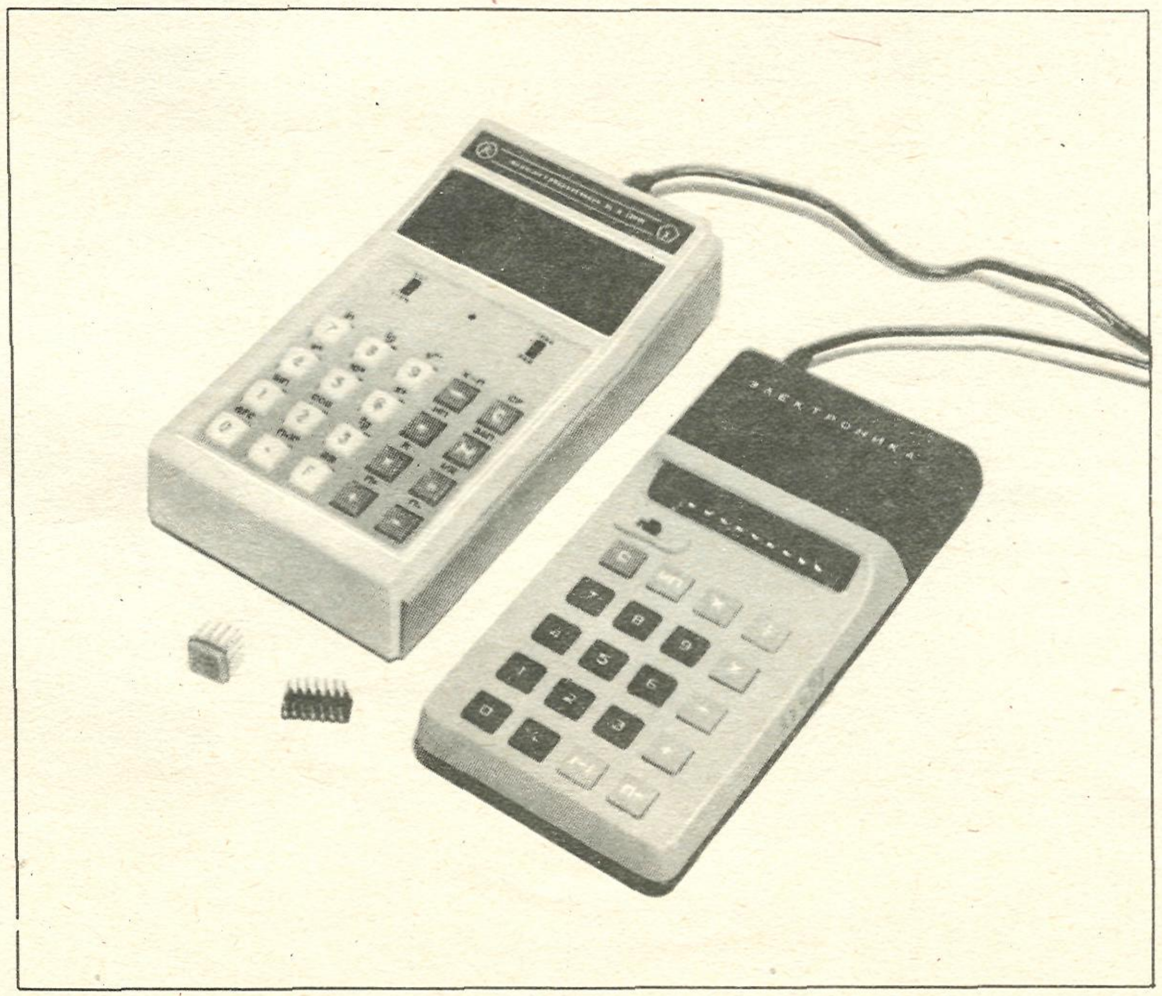
Оригинальную конструкцию арифмометра в 1876 г. предложил гениальный русский математик и изобретатель П. Л. Чебышев (1821—1894).

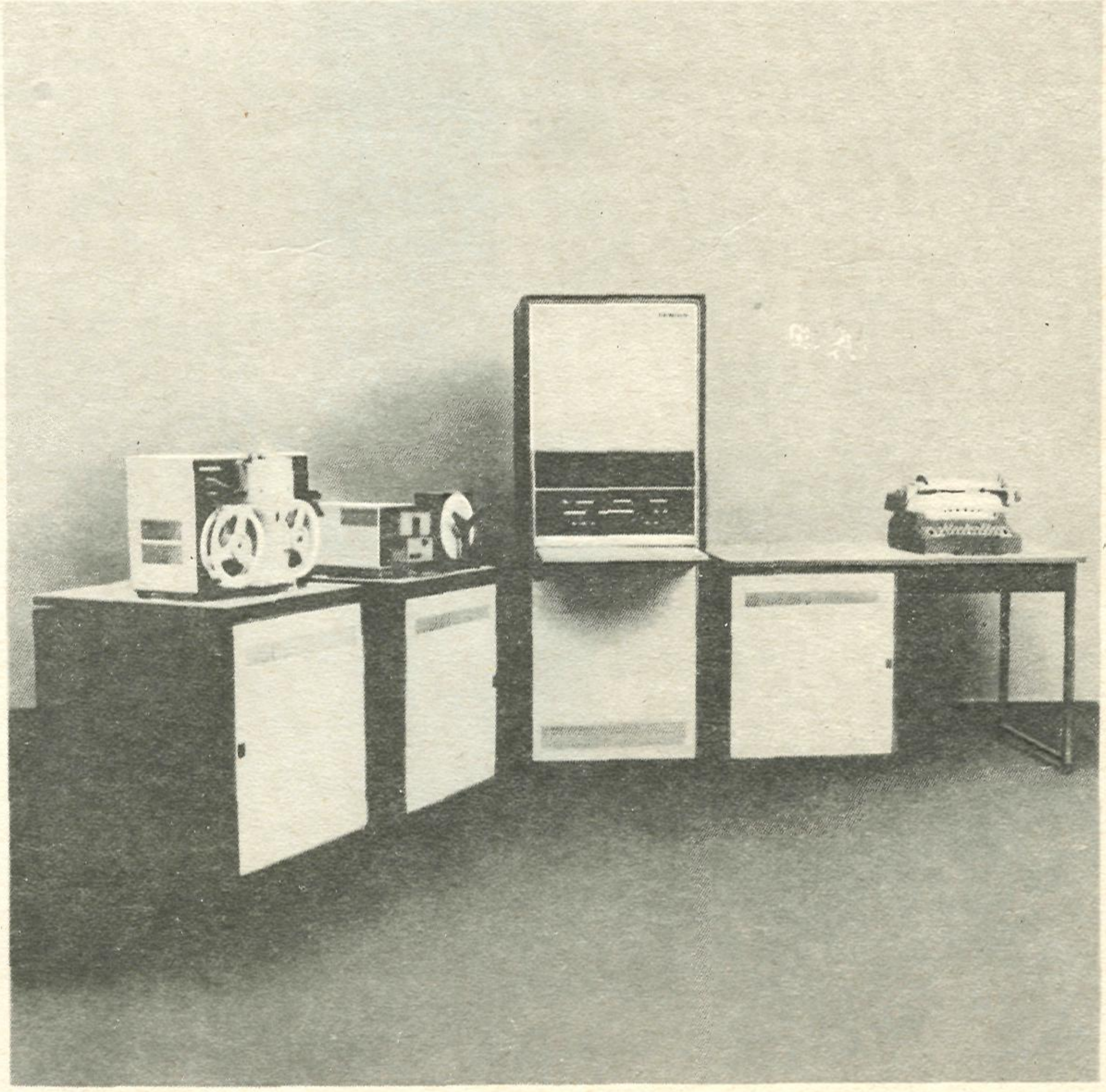
В 1874 г. появился арифмометр главного механика Петербургского монетного двора В. Т. Однера (1845—1905).

Одним из первых стремился математизировать вычисления английский математик и инженер Чарльз Беббедж (1792—1871). В 1820 г. он предложил специализированную вычислительную машину для табулирования функций. Изобретателю удалось частично реализовать проект разностной машины, в процессе вычисления на которой не требовалось вмешательство человека. Это был прогрессивный шаг в развитии вычислительной техники. В 1834 г. Беббедж предложил универсальную вычислительную машину с программным управлением, названную им аналитической. Ее структура совпадала, в сущности, со структурой современных ЭВМ двух первых поколений. От аналитической машины Беббеджа и начинается история вычислительных машин с программным управлением.

В 1951 г. в Киеве была создана первая советская (она же была первой и на европейском континенте) МЭСМ, а в 1952 г. в Москве вступила в действие БЭСМ. Обе машины были сконструированы и построены под руководством академика АН СССР и АН УССР дважды лауреата Государственной премии (1950 г., 1969 г.), Героя Социалистического Труда Сергея Алексеевича Лебедева (1902—1974).

СЕРГЕЙ АЛЕКСЕЕВИЧ ЛЕБЕДЕВ





38. Двоичная нумерация — язык автоматики

Человек, научившись считать, создал различные нумерации. Наидревнейшей среди них является двоичная. Позднее из счета на пальцах возникла десятичная нумерация, изучаемая сегодня во всех школах мира. О двоичной нумерации на долгое время забыли, хотя отдельные ученые, среди них и Г. В. Лейбниц, ценили ее за простоту, удобство и красоту. В двоичной нумерации с помощью лишь двух цифр — 0 и 1 — можно записать любое число. Особенно просто выполнять в ней арифметические действия. Записи чисел являются несколько громоздкими, однако эта громоздкость компенсируется тем, что, в сущности, не приходится выполнять вычислений.

Разработаны различные технические способы моделирования чисел, записанных в двоичной нумерации. С помощью электрического тока символы двоичной нумерации — 0 и 1 — можно кодировать, изменяя продолжительность прохождения тока в цепи: краткий интервал прохождения тока — 0, более длинный — 1; изменяя направление прохождения тока: плюс на минус; изменяя амплитуду: наличие сигнала — 1, отсутствие сигнала — 0. Последний способ наиболее часто применяется в ЭВМ. Он надежен, поскольку наличие или отсутствие сигнала легко обнаруживается устройствами ЭВМ. Кроме того, созданы приспособления, которые могут несколько миллионов раз в секунду включить и разомкнуть электрическую цепь.

Сложение

В десятичной

$$\begin{array}{r} 22 \\ +\ 7 \\ \hline 29 \end{array}$$

В двоичной

$$\begin{array}{r} 10110_2 \\ +\ 111_2 \\ \hline 11101_2 \end{array}$$

Вычитание

В десятичной

$$\begin{array}{r} 22 \\ -\ 11 \\ \hline 11 \end{array}$$

В двоичной

$$\begin{array}{r} 10110_2 \\ -\ 1011_2 \\ \hline 1011_2 \end{array}$$

Умножение

В десятичной

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times\ 13 \\ \hline 81 \\ +\ 27\ \ \\ \hline 351 \end{array}$$

В двоичной

$$\begin{array}{r} 11011_2 \\ \times\ 1101_2 \\ \hline 11011 \\ +\ 11011\ \ \ \ \\ 11011\ \ \ \ \ \\ \hline 1010111\ 11_2 \end{array}$$

Деление

В десятичной

$$\begin{array}{r|l} 66 & 3 \\ \cline{2-2} -\ 6\ \ & 22 \\ \hline 6 & \\ -\ 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

В двоичной

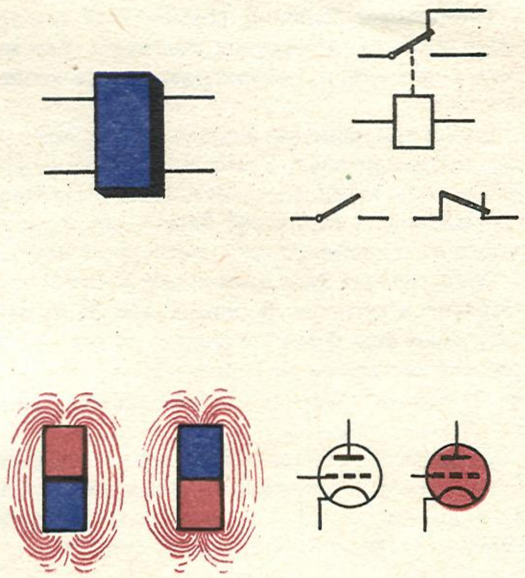
$$\begin{array}{r|l} 1000010_2 & 11_2 \\ \cline{2-2} -\ 11\ \ \ \ \ \ & 10110_2 \\ \hline 100\ \ \ \ & \\ -\ 11\ \ \ \ & \\ \hline 11\ \ & \\ -\ 11\ \ & \\ \hline 0 & \end{array}$$

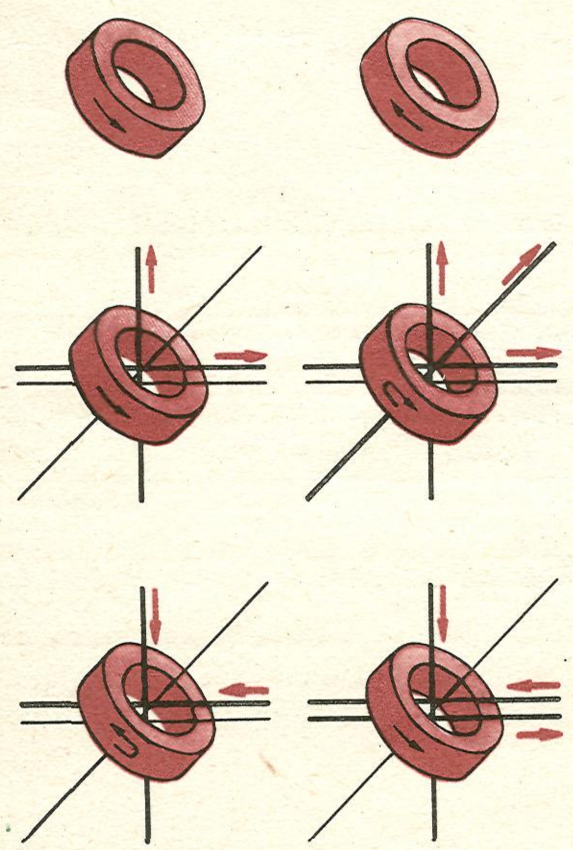
Таблица сложения

$0 + 0 = 0$
$0 + 1 = 1$
$1 + 0 = 1$
$1 + 1 = 10$

Таблица умножения

$0 \times 0 = 0$
$0 \times 1 = 0$
$1 \times 0 = 0$
$1 \times 1 = 1$





Единицы
1
11
111
1111
11111
111111
1111111
11111111
111111111
1111111111
11111111111
111111111111
1111111111111
11111111111111
111111111 111111

1

Единичная система

Восьмерки	Четверки	Двойки	Единицы
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

2

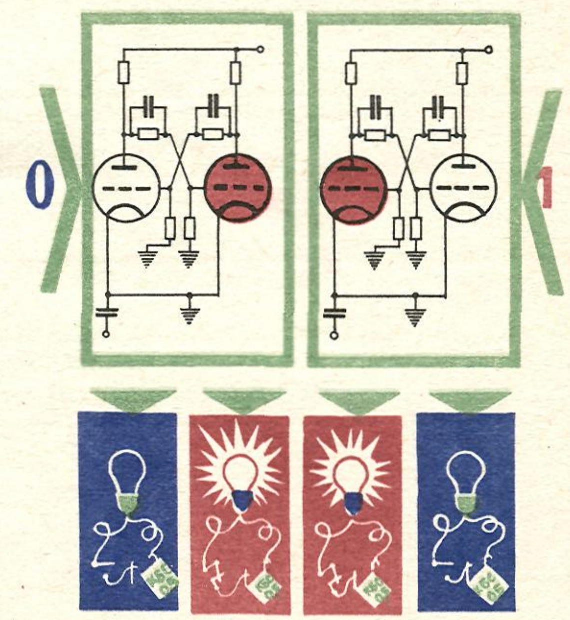
Двоичная система

Десятки	Единицы
0	0
0	1
0	2
0	3
0	4
0	5
0	6
0	7
0	8
0	9
1	0
1	1
1	2
1	3
1	4
1	5

10

Десятичная система

Разработаны разнообразные конструкции искусственной памяти, с помощью которых в ЭВМ сохраняется огромное количество числовой информации. На смену механическим и электронно-ламповым устройствам пришли устройства, построенные на магнитах, полупроводниках и др.



38. Двоичная нумерация — язык автоматики

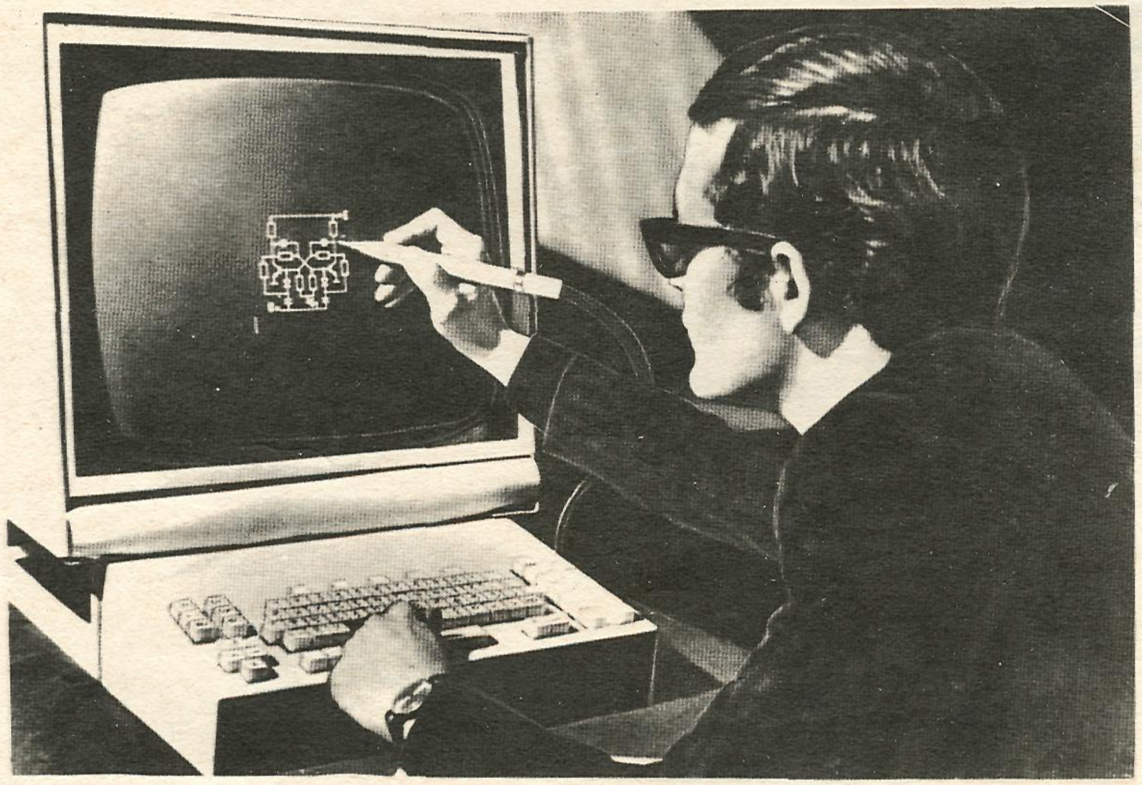
Гениальный Лейбниц (1646–1716) отмечал удивительную простоту операций в двоичной системе счисления. Его восторгало, что с помощью лишь двух цифр – 0 и 1–охватывается все необозримое разнообразие натуральных чисел.

В наш век двоичная система записи чисел рождается заново. Работу огромных промышленных комплексов, мощных телескопов, автоматических линий, полеты межпланетных космических кораблей, автоматических станций, искусственных спутников Земли, движение луноходов, кораблей, самолетов строго контролируют кибернетические помощники человека – ЭВМ.

Современные ЭВМ выполняют несколько сот миллионов арифметических операций в секунду. В ближайшем будущем вычислительная техника будет вооружена еще более мощными гигантами. Языком для этих чудо-математиков служит двоичная система счисления. Арифметика этой системы необычайно проста, именно поэтому целесообразно „обучать" ЭВМ выполнению двоичных операций.

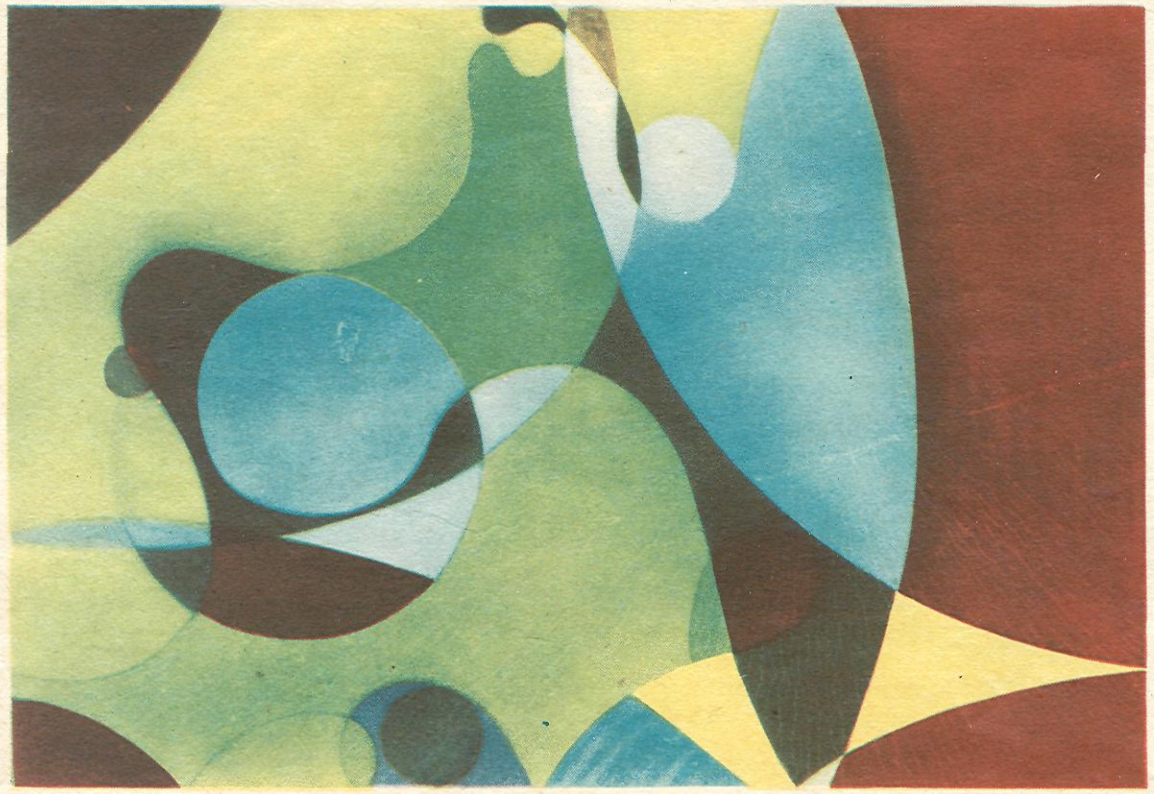
Существуют вычислительные машины, работающие в троичной, восьмеричной и даже в десятичной системах счисления. Но система, основанная на использовании лишь 0 и 1, остается наиболее распространенной как язык для ЭВМ и различных автоматических систем.

39. ЭВМ — композитор, художник, поэт

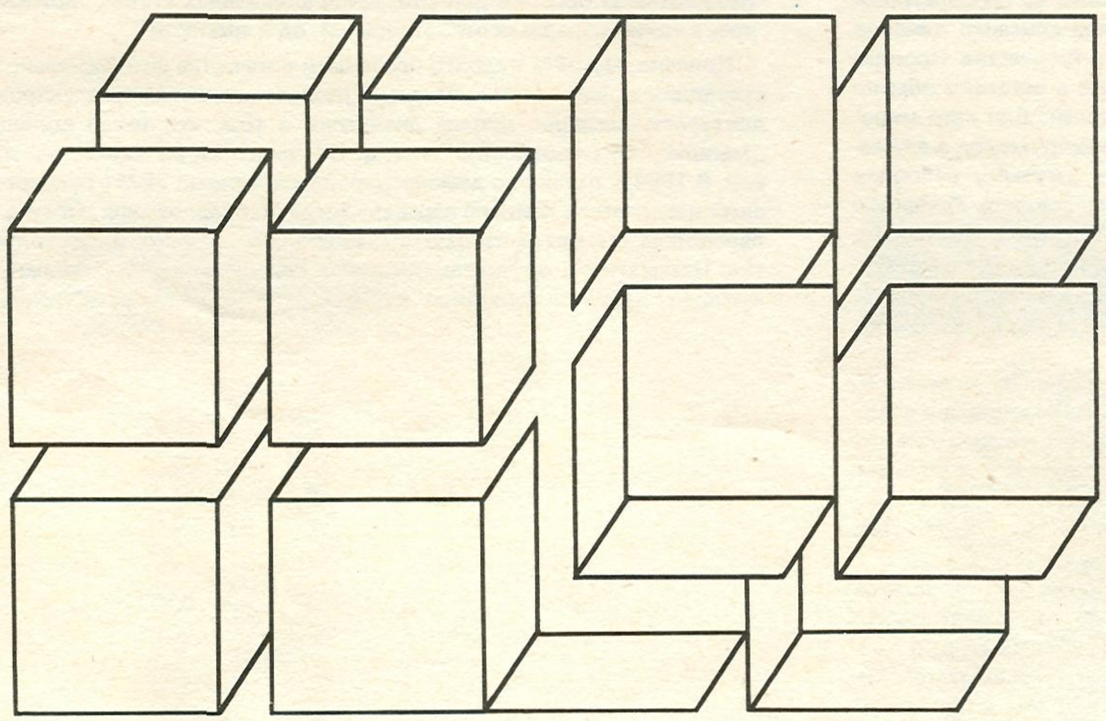


Искусство кибернетизированного мира не ограничилось широким использованием ЭВМ для изучения произведений искусства и создания кибернетических моделей творчества. ЭВМ были быстро вовлечены в большой многоплановый эксперимент по проверке возможностей уже творческой деятельности этих феноменальных вычислителей XX в. Они делают только первые, но обнадеживающие шаги на пути художественного творчества: пишут стихи, рассказы, пьесы, сценарии, песни, сюиты, воплощают в геометрических образах математические абстракции, закономерности процессов живой и неживой природы.

Многие крупнейшие специалисты подтверждают тезис о принципиальной возможности машинного моделирования любых психических процессов, включая и процессы создания произведений искусства.

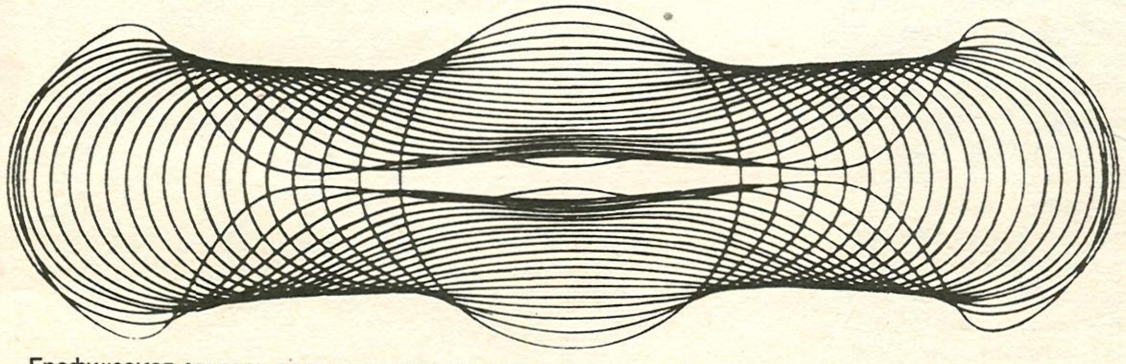


Стохастический рисунок, выполненный по программе ЭВМ, которая выбирала цвета и формы фигур, руководствуясь таблицей случайных чисел.

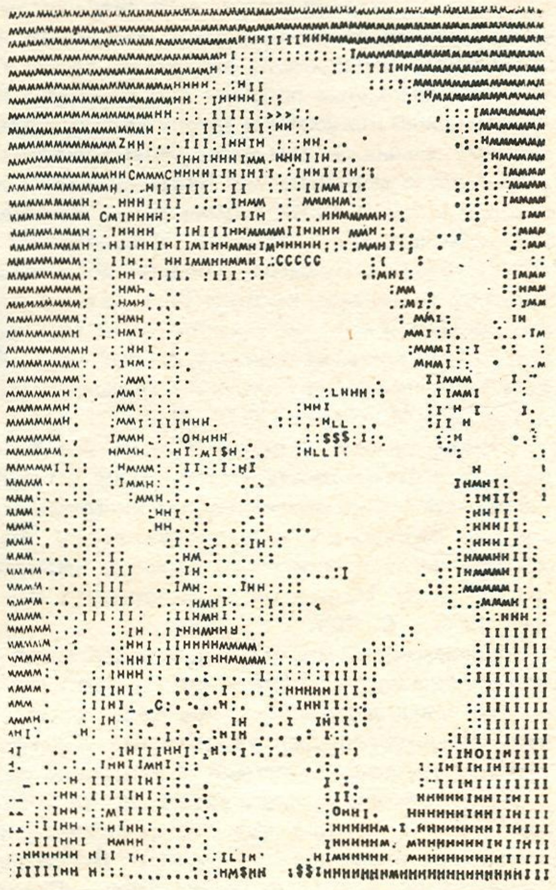


Один из самых широко известных рисунков, созданных ЭВМ. На первый взгляд кажется, что в нем нет ничего неправдоподобного. Но при внимательном рассмотрении обнаруживается „логическая противоречивость" между отдельными частями.

Машинная графика нашла уже широкое применение в различных областях науки и техники. Ее применение привело к громадному росту потенциальных возможностей ЭВМ. Машинная графика оказалась новым гибким инструментом, это поистине микроскоп в новый, неведомый мир, с помощью которого программист может наблюдать любые объекты, подчиняющиеся известным законам природы, или вымышленные, описанные его программой.

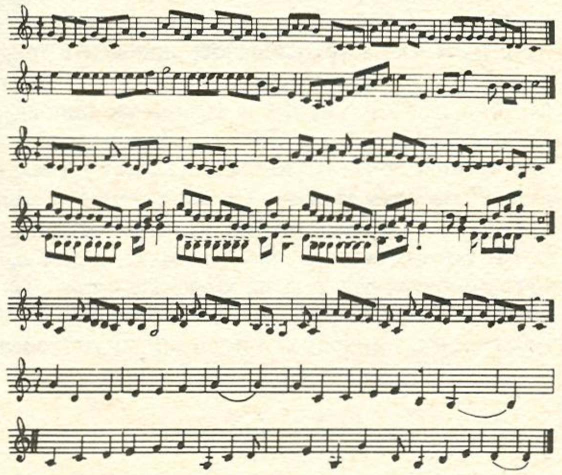


Графическая модель ядра, которое делится. Под действием сил электростатического отталкивания капля жидкости сплющивается, вытягивается, в ней появляются тонкие участки, где и происходит разрыв.



Конечно же, творчество ЭВМ не является основным занятием дорогостоящих вычислительных комплексов. Различные задания художественного творчества служат для них проверкой действия отдельных узлов, отработки программ и т. п., хотя отдельные задания могут быть приурочены к памятным датам. Например, этот женский портрет к Международному дню 8 Марта выполнила ЭВМ „Минск-22".

Электронным композиторам так же далеко до Моцарта и Листа, как их собратьям-поэтам до Пушкина и Блока. Но что посеешь, то и пожнешь. И по программе советского ученого и музыканта Р. Х. Зарипова ЭВМ создала свой цикл „Уральских напевов". Вот один из них.



39. ЭВМ — композитор, художник, поэт

Мысль о создании машин, выполняющих не только механическую (пусть даже и вычислительную) работу, но и свойственные только человеку формы творческой деятельности, зародилась давно. Утверждению ее способствовали многочисленные попытки дать математически точное описание канонов произведений искусства и алгоритмов художественного творчества. Проникновение точных (в том числе математических) методов в эстетику обычно связывают с деятельностью Пифагора и его последователей. Для него мировой строй был подобен космическому музыкальному инструменту, а движение небесных тел порождало гармонические звуки — „музыку небесных сфер", которую Пифагор „сподобился" слышать. Последователь Пифагора философ Филолай из Кротона (V в. до н. э.) утверждал: „...Можно заметить, что природа и сила числа действуют не только в демонических и божественных вещах, но также повсюду, во всех человеческих делах и отношениях, во всех технических искусствах и в музыке" (М и х а й л о в Б. Л. Витрувий и Эллада. — М.: Наука, 1967. — С. 7).

От мыслителей античной Греции все более обоснованным становится отождествление красоты с определенными числовыми отношениями и признание математики теоретическим инструментом создания произведений искусства. Живший в VI в. Кассиодор писал: „Музыка — это наука, рассматривающая числа относительно явлений, наблюдаемых в звуке..." (П е к е л и с В. Д. Маленькая энциклопедия о большой кибернетике. — М.: Дет. лит., 1970. — С. 189).

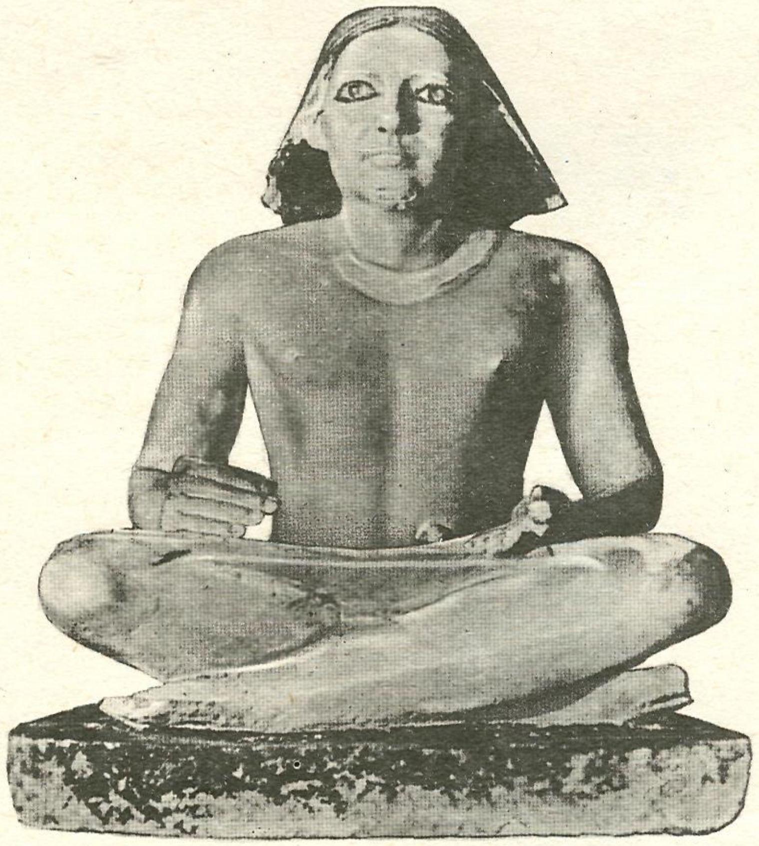
Высказывания многих выдающихся писателей, композиторов, художников о механизмах собственного творчества также давали повод считать, что определенные эмоции воспринимающего произведение искусства можно вызвать конструктивными творческими приемами, поддающимися математическому расчету. Известный французский писатель Ги де Мопассан писал: „...Я думаю, что нужно избегать неопределенного вдохновения. Искусство математично, великие эффекты достижимы простыми и хорошо скомбинированными средствами" (Ж у к о в Д. Переводчик, историк, поэт? (Слово тебе, машина!). — М.: Сов. Россия, 1965. — С. 188).

Гениальный А. С. Пушкин дал прекрасное определение вдохновения: „Вдохновение есть расположение души к живейшему принятию впечатлений и соображению понятий, следственно, и объяснению оных. Вдохновение нужно в геометрии, как и в поэзии" (П у ш к и н А. С. Собр. соч.: В 10 т. — Л.: Наука, 1978. — Т. 7. — С. 41). Ему же принадлежит и классический образ художника-рационалиста XVIII в. — Сальери, который говорит:

...Звуки умертвив,
музыку я разъял, как труп. Поверил
Я алгеброй гармонию. Тогда
Уже дерзнул, в науке искушенный,
Предаться неге творческой мечты,
Я стал творить...

В XVIII в. уже делались конкретные попытки (серьезные и сатирические) механизировать музыкальное творчество. Так, в 1751 г. английский музыкант Уильям Гейс написал сатирическое руководство „Искусство сочинять музыку исключительно новым способом, пригодным для самых захудалых талантов". Автор предлагал обмакнуть жесткую щетку в чернила, потом провести по ней пальцем, чтобы чернила разбрызгались по нотной бумаге. К полученным кляксам оставалось прибавить тактовые черты, штрихи и прочие знаки, и сочинение готово. Но в 1757 г. в Германии Кирнбергер издал уже серьезное „Руководство к сочинению полонезов и минуэтов с помощью игральных костей", а в 1793 г. „Руководство, как при помощи двух игральных костей сочинять вальсы, не имея ни малейшего представления композиции" написал Моцарт. Он же сочинил и вальс с помощью предложенного метода — игральных костей. Конечно же, предлагались рецепты, как, не умея почти ничего, можно писать стихи, картины, создавать скульптуры и т. д. Сатирическим ответом на книгу Шенгели „Как писать стихи..." был эпизод из бурной деятельности Остапа Бендера. Как помнят читатели, „великий комбинатор" „изобрел такую штуку, которая избавляет от необходимости ждать, покуда вас окатит потный вал вдохновенья" и продал незадачливому сотруднику некоего профоргана Ухадшанскому „Торжественный комплект. Незаменимое пособие для сочинения юбилейных статей, табельных фельетонов, а также парадных стихотворений, од и тропарей".

Конечно же, ЭВМ недолго пребывали в качестве феноменально быстродействующих вычислителей. Попытки реализовать создание электронных интеллектуалов вызвали острые дискуссии о том, что такое вообще „жизнь", „мышление", „творчество" и т. д. Но практики не ждали точных определений. В 1954 г. публично демонстрировался перевод ЭВМ с русского на английский язык, всего машина перевела тогда 60 предложений. Опыт с машинным переводом продемонстрировал всю сложность задачи и дал толчок к развитию математической лингвистики — новой науки, одним из важных разделов которой является создание формальных моделей естественных языков.



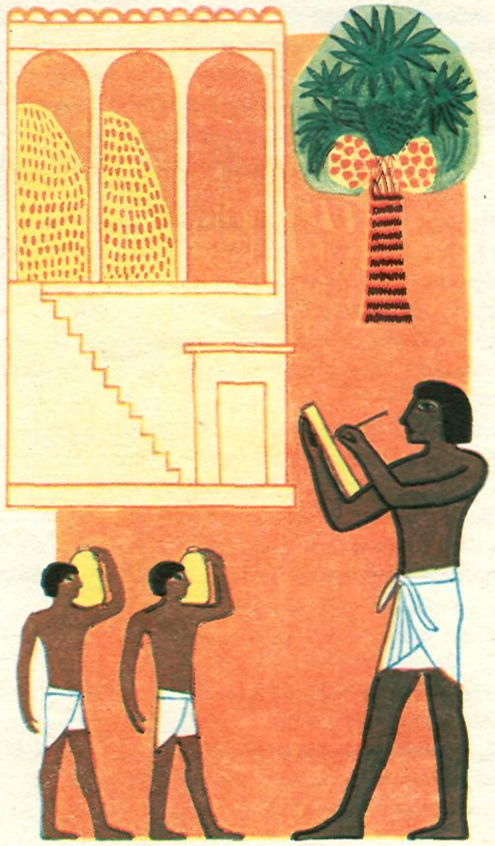
Статуя царского писца Каи (середина III тыс. до н. э.). Математические знания необходимы были прежде всего писцам и чиновникам для проведения расчетов, связанных со строительными работами, торговлей, снабжением армии, планированием хозяйственной деятельности в стране.

Древнеегипетская запись уравнения

$x+\frac{1}{7}x+\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x=37.$

Сверху приведена иероглифическая запись этого уравнения, слева — запись демотическим письмом.

Иероглифы, которые означают „аха" (куча) — символ неизвестной величины.



Решение задачи:

Аха, ее седьмая часть, ее целое, это составляет 19:

$(\frac{1}{7}x+x)=19.$

7 — число частей аха,
1 — седьмая часть аха.

Каждая часть должна равняться $\frac{19}{8}$, т. е.

$\frac{16+2+1}{8}=2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}.$

Делай как делается.
Семь частей прибавляются так:

$2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ (1 часть);

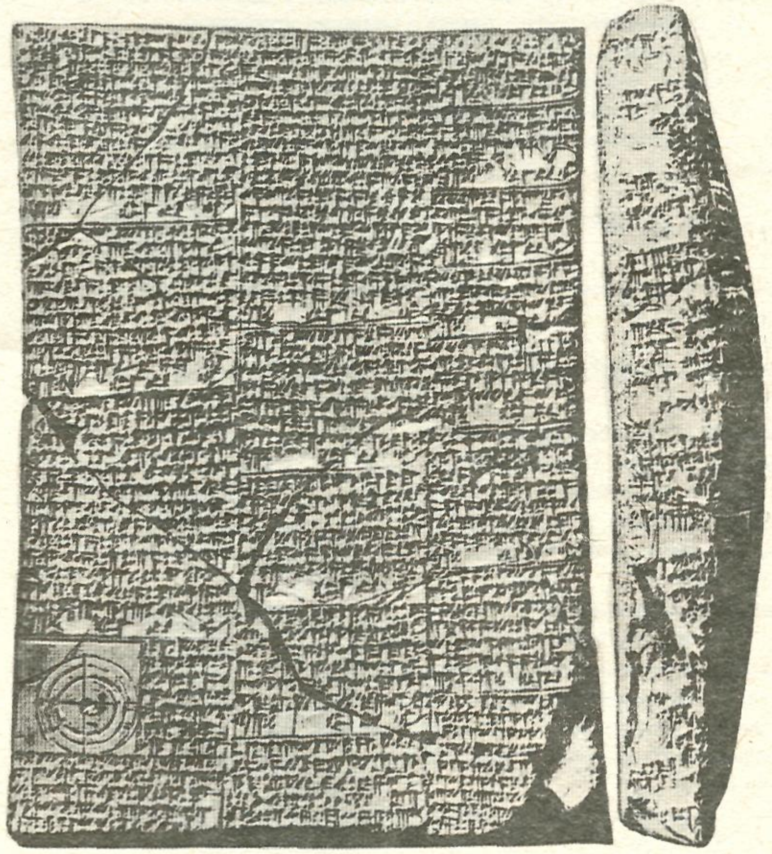
$4+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ (2 части);

$9+\frac{1}{2}$ (4 части).

Все составит искомое аха $16\frac{5}{8}$.

Некоторые задачи сводились к уравнениям $ax^2=b$.

И это были зародыши алгебры как науки об уравнениях.



Из 500 тыс. найденных клинописных табличек 150 известны с текстами математических задач и 200 — с математическими таблицами. *Каждая табличка содержит от 18 до 100, а в* одной представлены условия 148 задач.

Большая часть текстов шумеро-вавилонской математики (XVIII—XVI вв. до н. э.) — это пособия для учащихся или упражнения для придворных чиновников-писцов.

Высокого уровня достигла алгебра линейных и квадратных уравнений и систем уравнений, сводящихся к ним. Рассматривались также уравнения более высоких степеней.

В геометрии шумеро-вавилонские математики умели вычислять площади фигур, ограниченных прямыми линиями, широко применяли теорему Пифагора.

Длину окружности, площадь круга и его частей вычисляли так, что отношение длины окружности к диаметру (число π) полагали равным 3 или 3,125.

Вавилоняне решали уравнения, сводившиеся к полным квадратным уравнениям, рассматривали также задачу, сводившуюся к уравнению вида

$(x^4)^2+a^2x^4=b^2.$

Они умели решать системы трех уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} xyz+xy=a, \\ y=bx, \\ z=cx, \end{cases}$$

где a, b, c — конкретные положительные рациональные числа.

40—43. Уравнения в шеренге веков

В древнеегипетском папирусе Райнда (ок. XVIII в. до н. э.) помещена группа задач на „аха" (куча). В этих задачах „аха" означает искомое количество. С современной точки зрения — это задачи на линейные уравнения относительно одной переменной вида $x + ax + bx + cx + \ldots = p$.

Здесь впервые сталкиваемся с абстрактными задачами, решаемыми одним методом. Отсюда и начинается алгебра — наука о решении уравнений.

Более значительных успехов в решении уравнений достигли древние вавилоняне. Они решали задачи, сводившиеся к неполным и полным квадратным уравнениям и их системам, а также к кубическим уравнениям. Обнаружено даже уравнение восьмой степени, являющееся квадратным относительно x^4 и приводимое к виду

$$(x^4)^2 + 20{,}0^2x^4 \doteq 14, 48, 53, 20^2.$$

Коэффициент при x^4 и свободный член здесь записаны в шестидесятеричной системе счисления, т. е.

$$14, 48, 53, 20 = 14\cdot 60^3 + 48\cdot 60^2 + 53\cdot 60 + 20\cdot 60^0.$$

Учение об уравнениях способствовало формированию новых понятий, созданию алгоритмов различных тождественных преобразований, в частности выполнению операций с неизвестными величинами как с известными и, таким образом, возникновению алгебраического исчисления. Вместе с тем удалось выделить канонические классы задач, решаемых с помощью соответствующих алгоритмов.

Новую эпоху в истории уравнений открыл выдающийся узбекский ученый аль-Хорезми. Его трактат „Краткая книга об исчислении алгебры и альмукабалы" служила пособием многим европейским математикам.

Операция альджабр (восстановление) — это перенос вычитаемых членов уравнения в другую его часть, в которой они выступают уже как слагаемые; альмукабала (противопоставление) — взаимное уничтожение равных членов в обеих частях уравнения.

В книге приводятся решения шести классов уравнений первой и второй степени, которые записаны без использования какой-либо символики:

$$ax^2 = bx, \quad ax^2 = c, \quad bx = c,$$

$$ax^2 + bx = c, \quad ax^2 + c = bx, \quad bx + c = ax^2.$$

Важное значение имели работы итальянских математиков XVI в. Н. Тартальи, Дж. Кардано, Л. Феррари. Тарталья вел длительную и неравную борьбу с Кардано, отстаивая свой приоритет в открытии формулы решения кубических уравнений. Лишь через многие годы история воздала должное Тартальи — скромному труженику науки.

Окрыленные успехами итальянских ученых, математики начали настоящий штурм задачи о решении в радикалах алгебраических уравнений произвольных степеней.

Уравнение

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

разрешимо в радикалах, если его корни можно выразить с помощью четырех арифметических действий и операции извлечения корня. Однако все известные способы не давали желаемых результатов при решении уравнений, степень которых выше четырех.

Исследования в области теории алгебраических уравнений способствовали возникновению и разработке теории определителей, теории делимости многочленов, линейной алгебры и других разделов математики.

В 1799 г. вышла книга итальянского математика Паоло Руффини (1765—1822) „Общая теория уравнений, в которой доказывается невозможность алгебраического решения общих уравнений выше четвертой степени". И хотя упомянутое доказательство не было строгим, открытие Руффини стало выдающимся событием в истории науки. Он впервые ввел понятие группы операций и фактически связал некоторые групповые свойства с проблемой разрешимости уравнений в радикалах.

Выдающийся норвежский математик Нильс Хенрик Абель в 1824 г. независимо от Руффини также доказал неразрешимость в радикалах алгебраических уравнений выше четвертой степени. Вместе с тем существовали уравнения произвольных степеней (например, двучленные: $x^n + a = 0$), решаемые в радикалах.

Доказательство Абеля не позволяло выделить классы всех уравнений, решаемых в радикалах, а также сформулировать критерии разрешимости в радикалах каждого конкретного уравнения. Эту задачу решил гениальный французский математик и пламенный революционер Эварист Галуа.

Гениальность Галуа проявилась прежде всего в том, что, решая „непокорную" задачу, он впервые со всей полнотой использовал общее понятие группы (ему принадлежит и термин „группа"). Группой в математике называется множество некоторых объектов (чисел, геометрических преобразований, подстановок и т. д.), для которых задана определенная операция, удовлетворяющая ряду условий — аксиомам группы. Галуа сопоставил с каждым уравнением некоторую конечную группу подстановок его корней (названную позднее группой Галуа) и проверил выполнимость в ней некоторого свойства — разрешимости. Если группа разрешима, то разрешимо в радикалах и данное уравнение.

Необычайно плодотворным оказалось введенное Галуа понятие группы. Теория групп вышла за пределы математики, найдя широкое применение в кристаллографии, физике и других отраслях знаний.

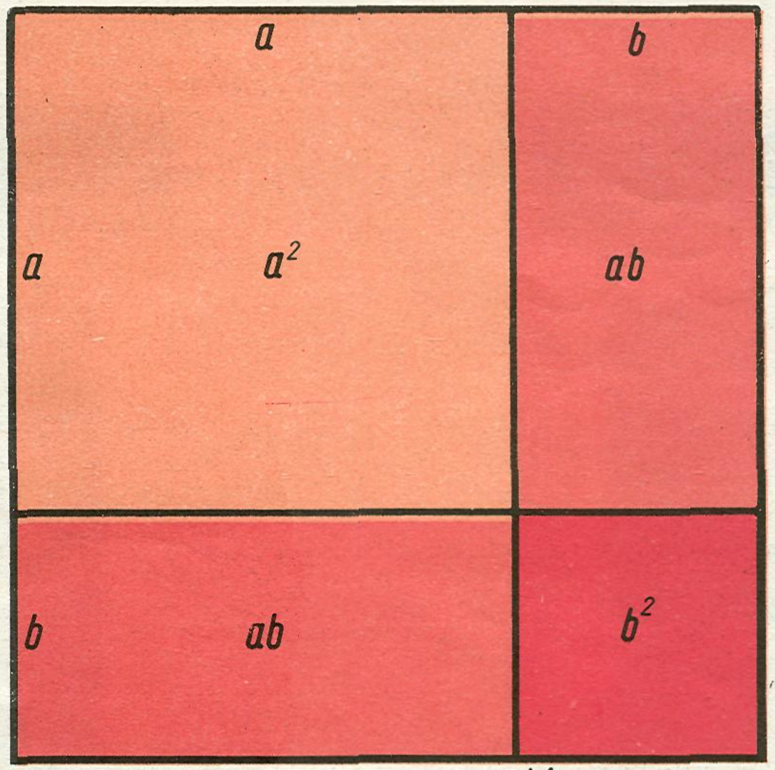
Теория Галуа пролила свет также и на некоторые известные математические проблемы, в частности на три знаменитые задачи древности.

Для решения практических задач были разработаны разные методы приближенных численных решений алгебраических уравнений и их систем. Среди них наиболее известны следующие методы решения алгебраических уравнений: итерации, хорд, усовершенствованный метод хорд И. Ньютона, комбинированный метод хорд И. Ньютона и Н. И. Лобачевского.

Очень полезен благодаря наглядности и доступности графический метод решения уравнений. Однако он имеет и некоторые недостатки. С помощью этого метода удается находить корни лишь приближенно, причем погрешность, как правило, довольно велика.

После открытия несоизмеримостей древнегреческие ученые свели операции арифметики и алгебры к операциям над геометрическими величинами. Средствами созданной ими геометрической алгебры доказывались алгебраические формулы, например:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.



Были созданы алгоритмы графического решения уравнений первой степени и квадратных. Методами геометрической алгебры удавалось вычислить приближенные значения положительных корней лишь некоторых, специально подобранных типов квадратных уравнений.

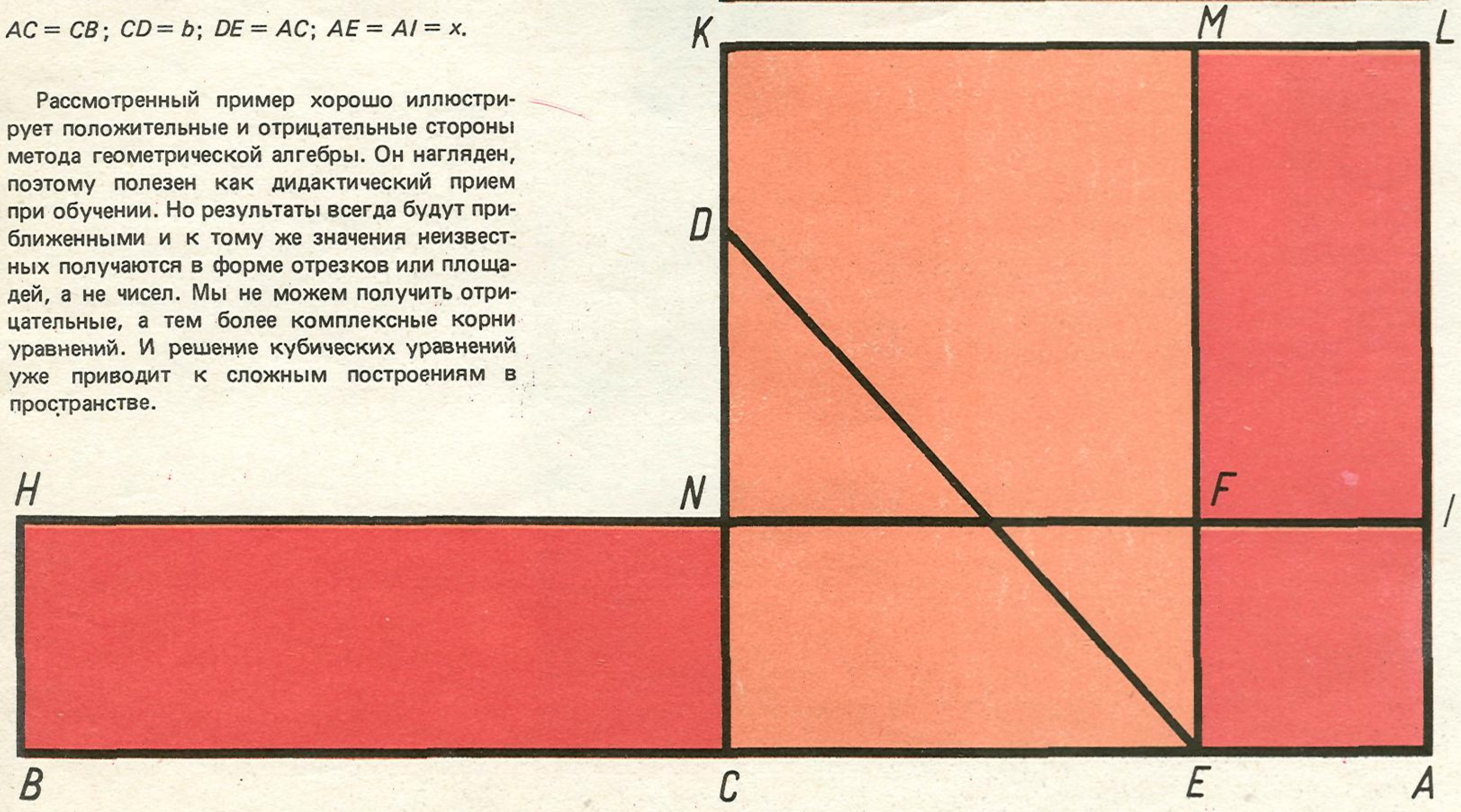
Решение квадратных уравнений (метод эллиптического приложения). На отрезке $AB = a$ построить прямоугольник $ABHI$ так, чтобы площадь его ax была равна площади данного квадрата b^2 ($b < \frac{a}{2}$) и часть площади, которой не хватает до прямоугольника $ABHI$, была квадратом $AEFI = x^2$. Это приводит к графическому решению уравнения

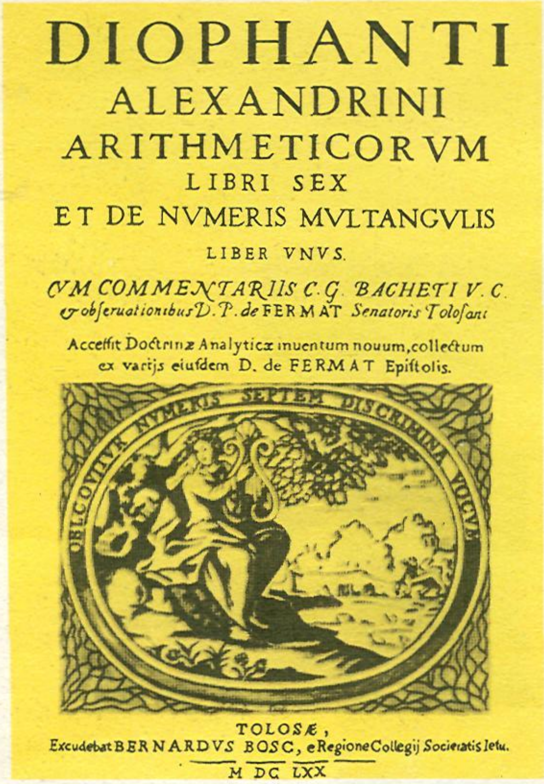
$ax - x^2 = b^2$.

Построение:

$AC = CB$; $CD = b$; $DE = AC$; $AE = AI = x$.

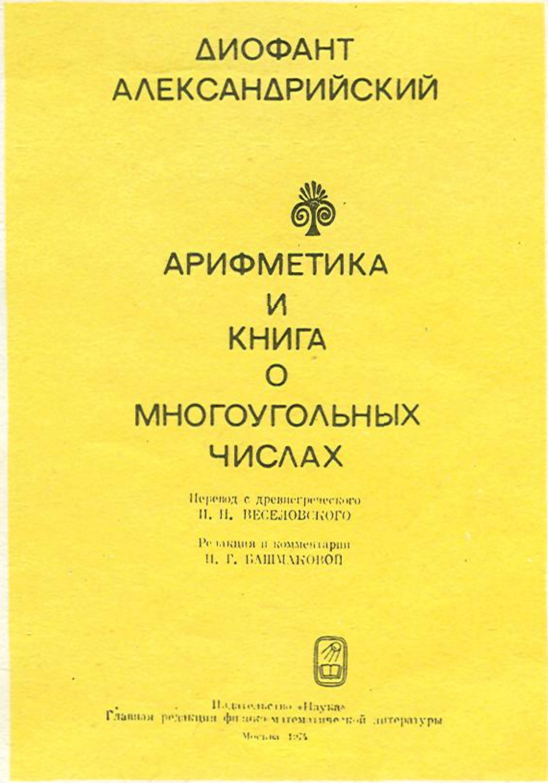
Рассмотренный пример хорошо иллюстрирует положительные и отрицательные стороны метода геометрической алгебры. Он нагляден, поэтому полезен как дидактический прием при обучении. Но результаты всегда будут приближенными и к тому же значения неизвестных получаются в форме отрезков или площадей, а не чисел. Мы не можем получить отрицательные, а тем более комплексные корни уравнений. И решение кубических уравнений уже приводит к сложным построениям в пространстве.




DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum
ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

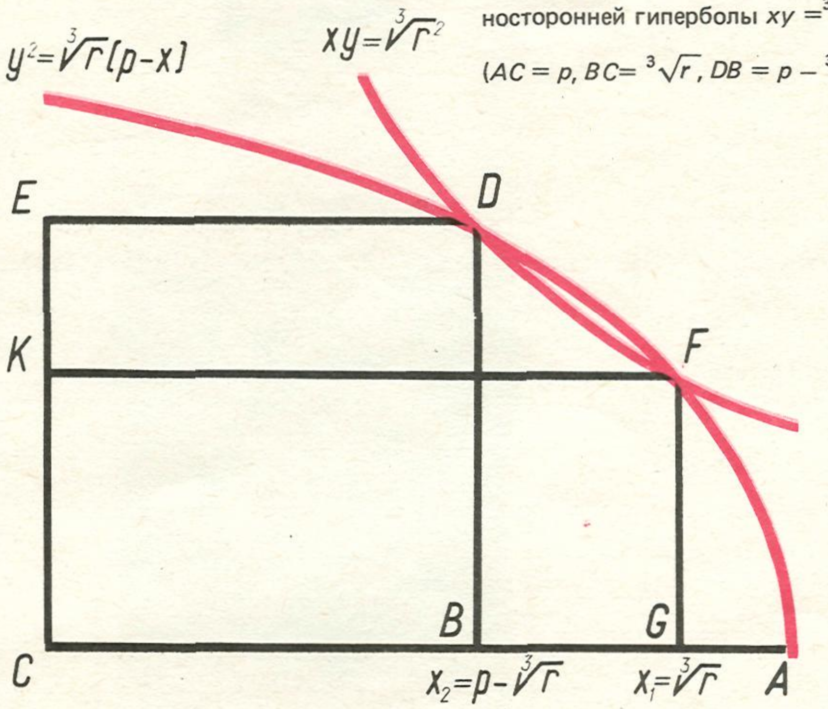
TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, e Regione Collegij Societatis Iesu.
M DC LXX

Титульная страница латинского издания „Арифметики" Диофанта с комментариями Баше де Мезирака и примечаниями П. Ферма.


ДИОФАНТ
АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ
АРИФМЕТИКА
И
КНИГА
О
МНОГОУГОЛЬНЫХ
ЧИСЛАХ
Перевод с древнегреческого
И. Н. ВЕСЕЛОВСКОГО
Редакция и комментарии
И. Г. БАШМАКОВОЙ
Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва

С помощью двух конических сечений — окружности, параболы или равносторонней гиперболы — Омар Хайям графически решил все типы кубических уравнений. Например, решение кубического уравнения $x^3 + r = px^2$ с помощью сечения параболы $y^2 = \sqrt[3]{r}(p-x)$ и равносторонней гиперболы $xy = \sqrt[3]{r^2}$ следующее:

$(AC = p, BC = \sqrt[3]{r}, DB = p - \sqrt[3]{r})$.



СИМВОЛИКА УЧЕНЫХ РАЗНЫХ ЭПОХ	ЗАПИСИ УРАВНЕНИЙ В СОВРЕМЕННЫХ СИМВОЛАХ
1494 Лука Пачоли *„Trouame . 1.n°: che giõto al suo qdrat° facia. 12."*	$x+x^2=12$
1514 Ван дер Хеке *4 Se – 51 Pri. – 30 N. dit is ghelijc 45* $\frac{3}{5}$	$4x^2-51x-30=45\frac{3}{5}$
1521 Галигаи *1 □ e 32 c° – 320 numeri*	$x^2+32x=320$
1545 Джироламо Кардано *cub⁹ p: 6 reb⁹ aeq̃lis 20*	$x^3+6x=20$
1556 Никколо Тарталья *„Trouame uno numero che azontoli la sua radice cuba uenghi ste, cioe. 6."*	$x+\sqrt[3]{x}=6$
1559 Витело *1 ◊ P6 ℘ P9 ⊏ 1 ◊ P3 ℘ P24*	$x^2+6x+9=x^2+3x+24$
1577 Госселен *12 L M 1 Q P 48 aequalia 144 M 24 L P 2 Q*	$12x-x^2+48=144-24x+2x^2$
1585 Симон Стевин *3② + 4 egales a 2① + 4*	$3x^2+4=2x+4$
1586 Пьер Рамус *1q + 8l aequatus sit 65*	$x^2+8x=65$
1591 Франсуа Виет *A cubus + B planum in* A_3 *aequatur D solido*	$A^3+3BA=D$, или $x^3+3Bx=D$
1629 Альберт Жирар *1(4) + 35(2) + 24 = 10(3) + 50(1) or with the several exponents inclosed in circles*	$x^4+35x^2+24=10x^3+50x$
1631 Вильям Оутред $\frac{1}{2}Z \pm \sqrt{q} : \frac{1}{4} Z_q - AE = A$	$\frac{1}{2}Z \pm \sqrt{\frac{1}{4}Z^2-AE}=A$
1631 Томас Гарриот *aaa – 3 · bba ═══ + 2 · ccc*	$x^3-3b^2x=2c^3$
1637 Рене Декарт $yy \propto cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$	$y^2=cy-\frac{cx}{b}y+ay-ac$
1693 Джон Валлис $x^4+bx^3+cxx+dx+e=0$	$x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$

Никколо Тарталья (ок. 1499—1557) — итальянский математик и механик. Самостоятельно овладел грамотой, изучил латинский и греческий языки, математику, механику. Прославился на всю Италию блестящей победой на публичном диспуте, где продемонстрировал умение решать уравнение третьей степени. Перевел с древнегреческого языка произведения Архимеда и Евклида. Труды ученого посвящены разработке актуальных для своего времени вопросов математики, механики, баллистики, фортификации. Уступив коварным просьбам Кардано, который дал ему клятву молчания, раскрыл ему секрет самого выдающегося своего математического открытия — алгоритм решения в радикалах некоторых типов кубических уравнений.

Джероламо Кардано (1501—1576) — известный итальянский математик, философ, врач. Развил результаты Тартальи и, нарушив данное ему слово, в 1545 г. в книге „Великое искусство, или о правилах алгебры" опубликовал общий метод решений в радикалах кубических уравнений. В этой же книге был опубликован открытый его учеником Лудовико Феррари (1522—1565) метод решения в радикалах уравнений четвертой степени.

Открытия Тартальи, Кардано и Феррари оказали огромное влияние на современников. Впервые были получены результаты, существенно превосходящие достижения античных ученых.

Франсуа Виет (1540—1603) — выдающийся французский математик, юрист по образованию. Творец алгебраической символики, он впервые ввел символические обозначения для неизвестных и данных величин. Благодаря этому открыл общий метод решения уравнений 2, 3 и 4-й степеней, тригонометрический метод решения кубических уравнений, глубокие теоремы о зависимости между коэффициентами и корнями уравнений (формула Виета). Виет открыл важные разложения $\cos nx$ и $\sin nx$ по степеням $\cos x$ и $\sin x$, а также теоремы плоской и сферической тригонометрии. Творчество ученого — выдающееся явление в истории математической мысли, важный этап на пути поисков алгоритмов решения сложных задач и символизации алгебраического исчисления.

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$$

С точки зрения вычислительной математики формулы Кардано (более справедливо было бы назвать их формулами Тартальи — Кардано) не давали каких-либо преимуществ перед приближенными методами. Но открытие их имело исключительное значение для дальнейшего развития математики. Перед наукой открывались новые глубокие задачи, прежде всего касающиеся разрешимости в радикалах уравнений высших степеней. Эти задачи привели сначала к возникновению теоретико-группового метода исследований в математике, а позднее и к созданию одного из наиболее глубоких и продуктивных разделов современной математики — теории групп.

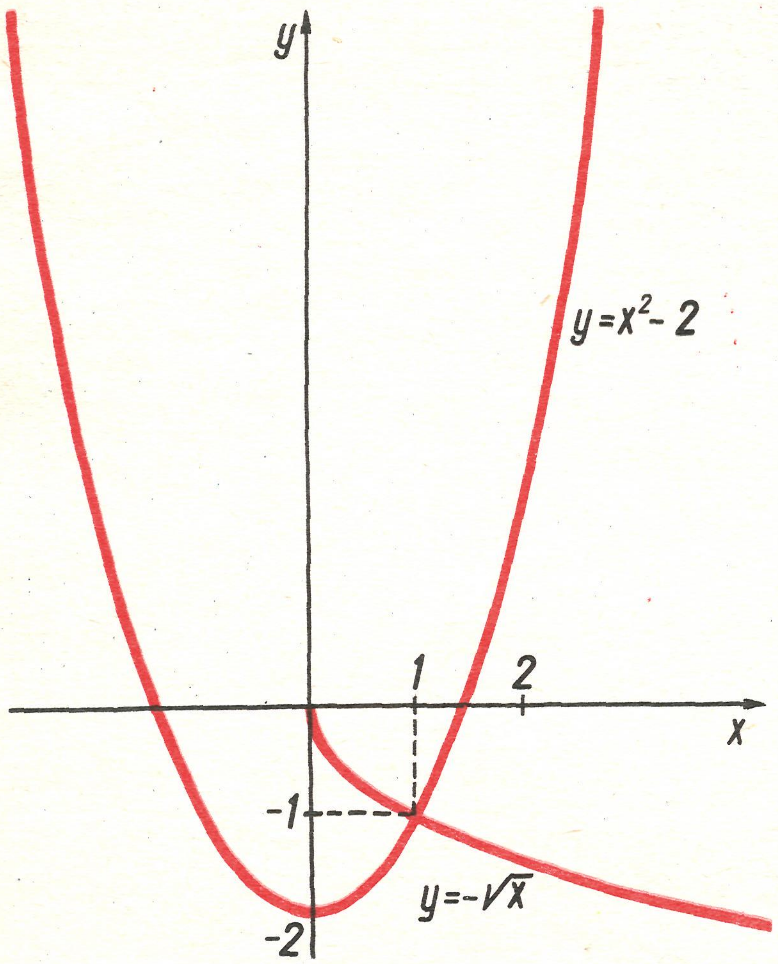
Решение в радикалах кубических уравнений поставило перед математикой проблему изучения природы софистических (абсурдных, или несуществующих) чисел. Таким образом, в математику входили новые понятия — числа, после Декарта названные мнимыми. Полезность их понимал уже Кардано. Правила действий с мнимыми числами четко изложил итальянский математик и инженер Раффаэле Бомбелли (ок. 1530—1572).

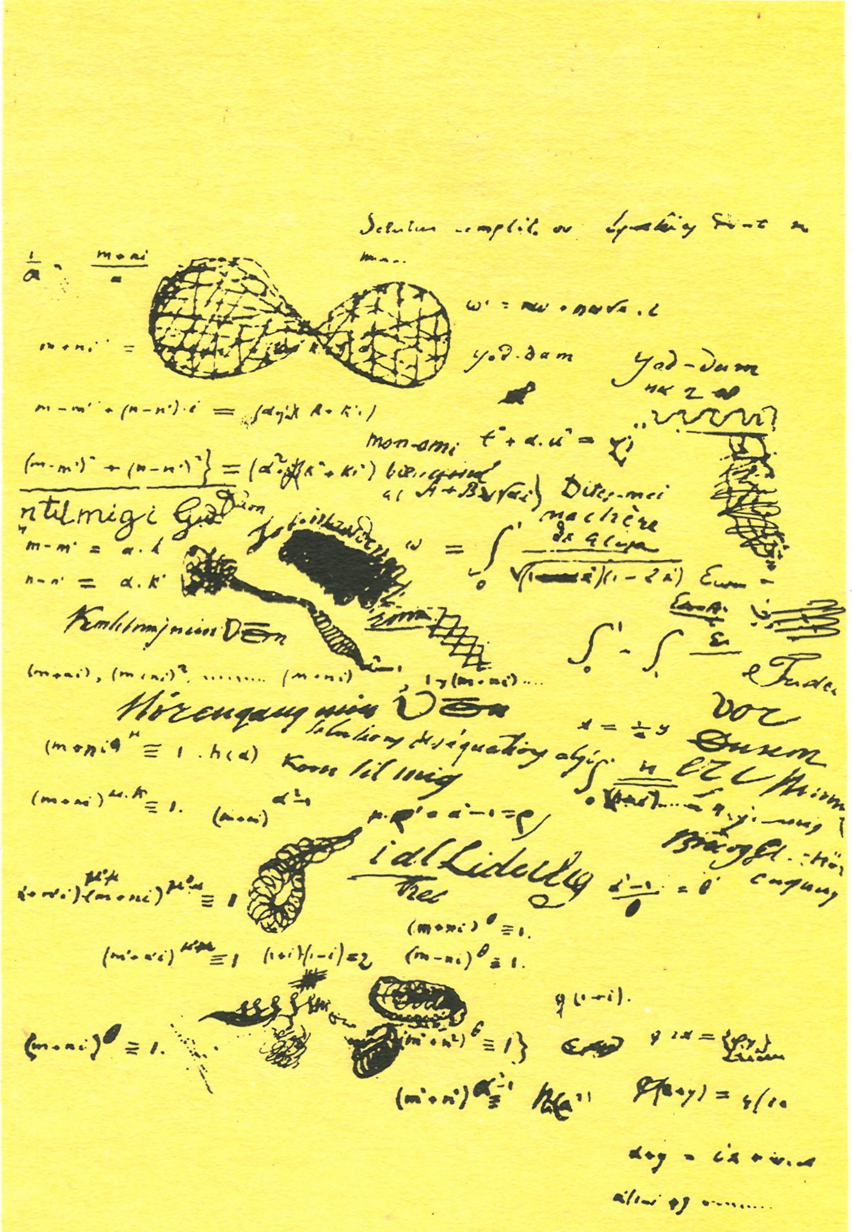
43. Уравнения в шеренге веков

Так обозначали неизвестную переменную в разное время различные ученые.

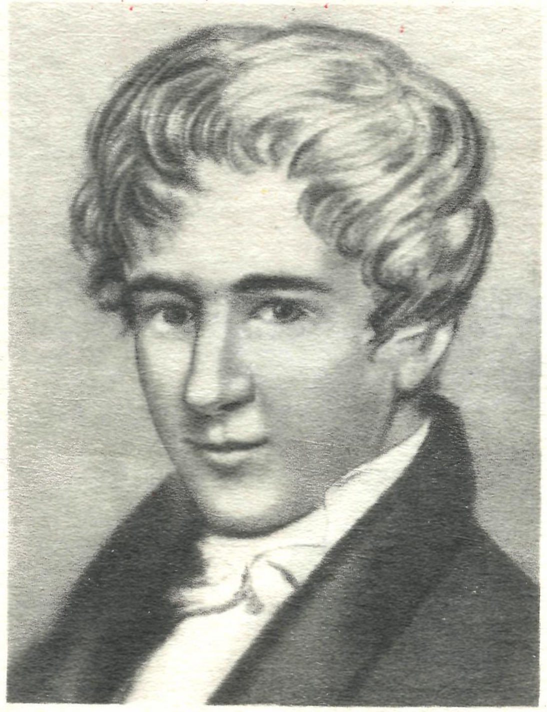
Графическое решение уравнения

$$x^2+\sqrt{x}-2=0$$

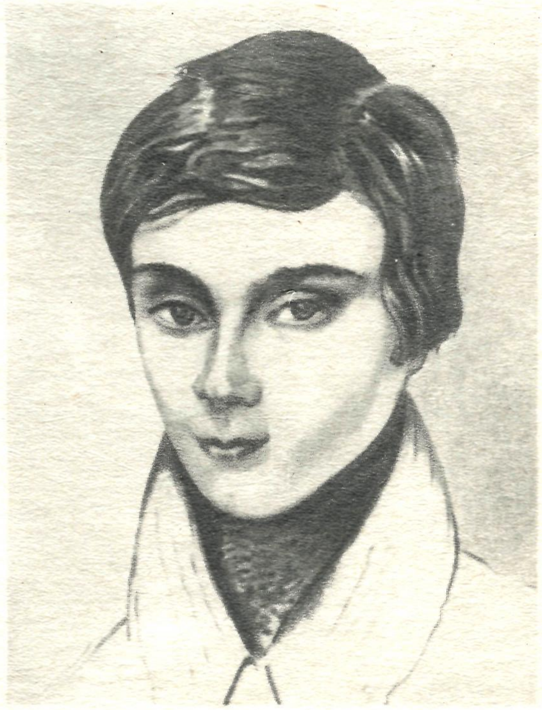




Автограф математических рукописей Абеля.

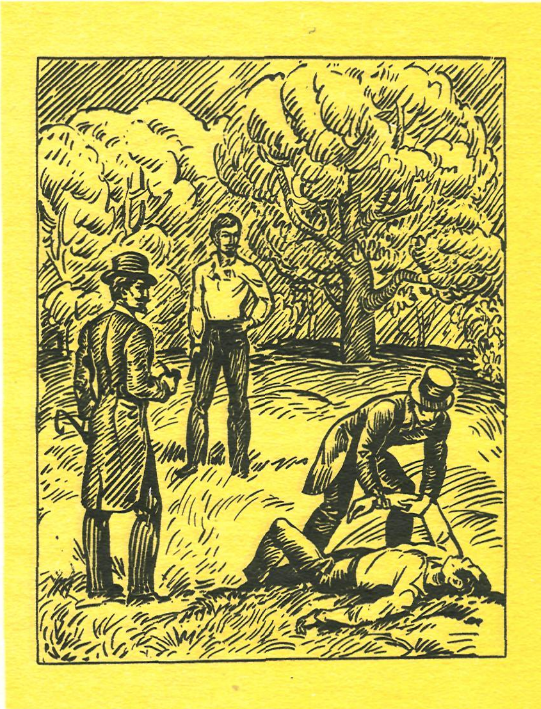


Нильс Хенрик Абель (1802—1829) — знаменитый норвежский математик. За непродолжительную жизнь достиг выдающихся результатов в различных отраслях математики. Окончательно решил многовековую проблему о возможности решения алгебраических уравнений в радикалах. Он доказал, что существуют уравнения пятой степени, не решающиеся в радикалах.



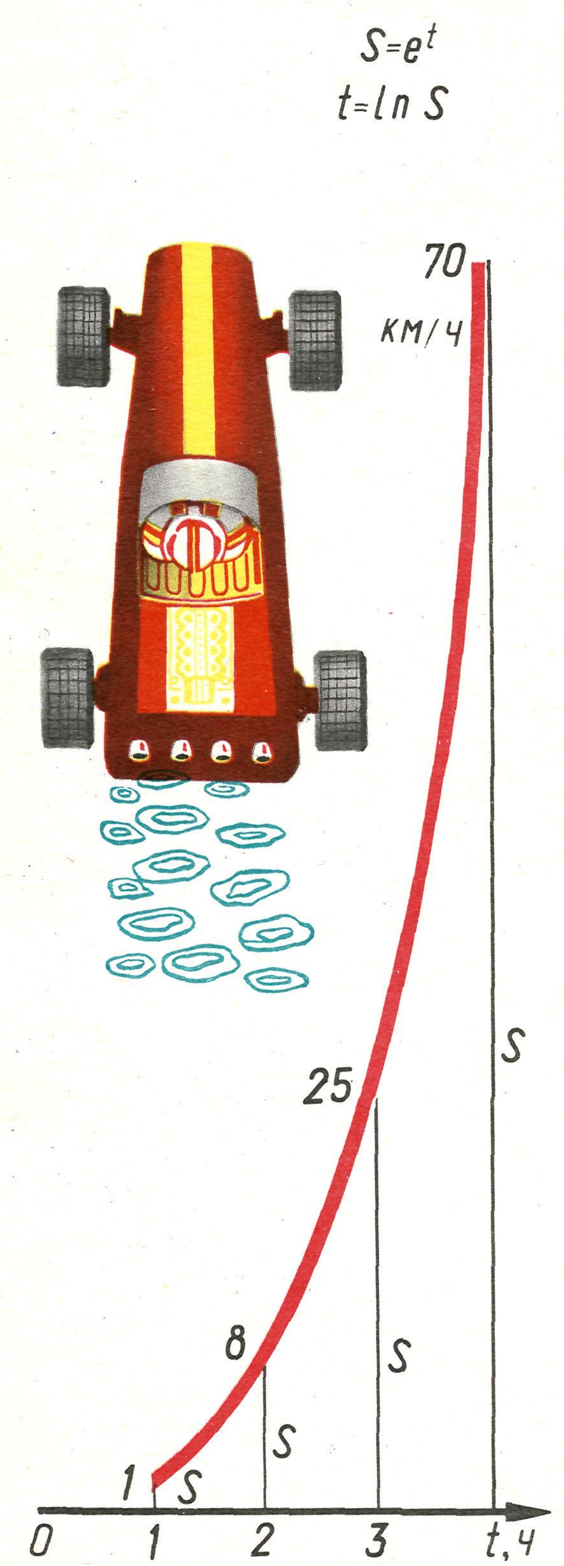
Эварист Галуа (1811—1832) — гениальный французский математик и пламенный борец против монархии. Основоположник современной алгебры. Доказал невозможность решения в радикалах произвольных уравнений степени, выше четвертой. Нашел необходимое и достаточное условие, которому удовлетворяют алгебраические уравнения данной степени, решаемые в радикалах.

Памятник Абелю в Осло.



Гибель Эвариста Галуа.

44. Логарифмы упрощают вычисления

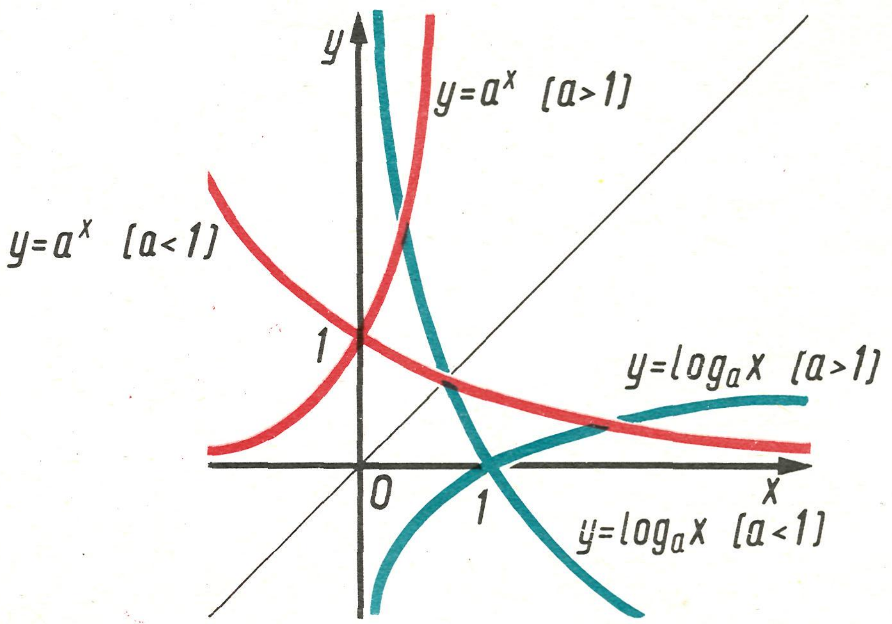


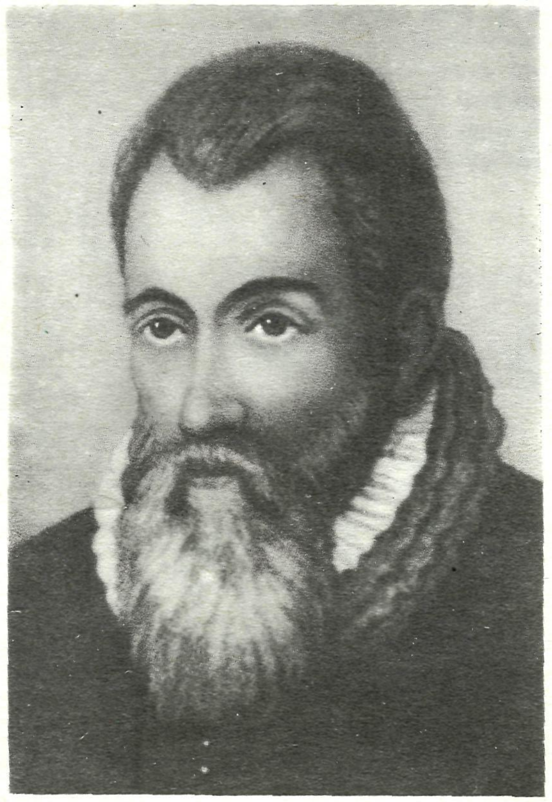
Неперово движение. Расстояние и время находятся в логарифмической зависимости.

Отношениям чисел в геометрической прогрессии отвечают отношения некоторых других чисел в арифметической прогрессии.

Геометрическая прогрессия	Арифметическая прогрессия
Умножение	Сложение
Деление	Вычитание
Возведение в степень	Умножение
Извлечение корня	Деление

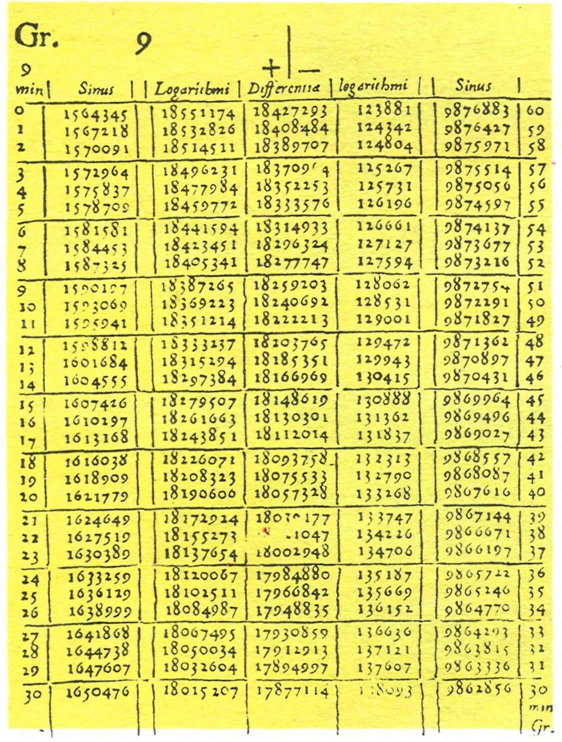
График логарифмической функции $y = \log_a x$ и обратной к ней функции $y = a^x$.



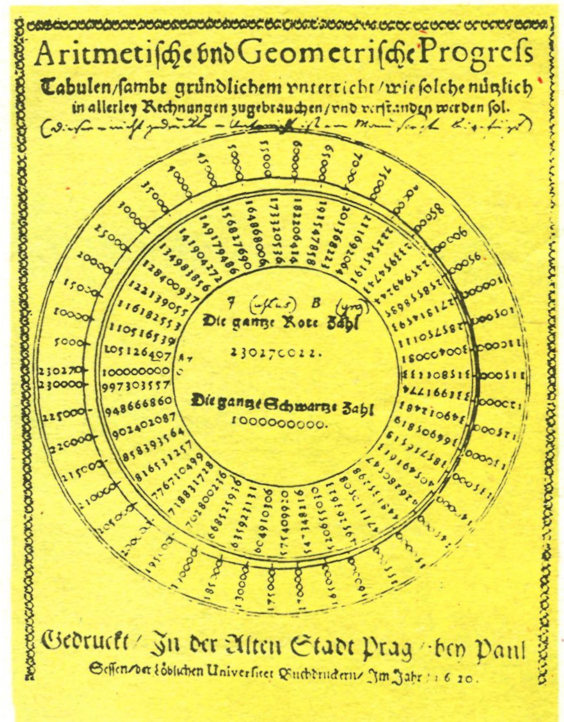


Джон Непер (1550—1617)— шотландский математик и изобретатель. Математические исследования ученого были направлены на упрощение вычислений и привели к выдающемуся его открытию — открытию логарифмов.

Иост Бюрги (1552—1632) — швейцарский механик, часовщик, астроном, математик. Независимо от Непера открыл логарифмы.



Страница знаменитой книги Непера „Описание удивительной таблицы логарифмов“ (1614).



Титульная страница книги Бюрги „Арифметические и геометрические таблицы прогрессий“ (1620), которые были первыми таблицами антилогарифмов с основой, близкой к числу *e*.

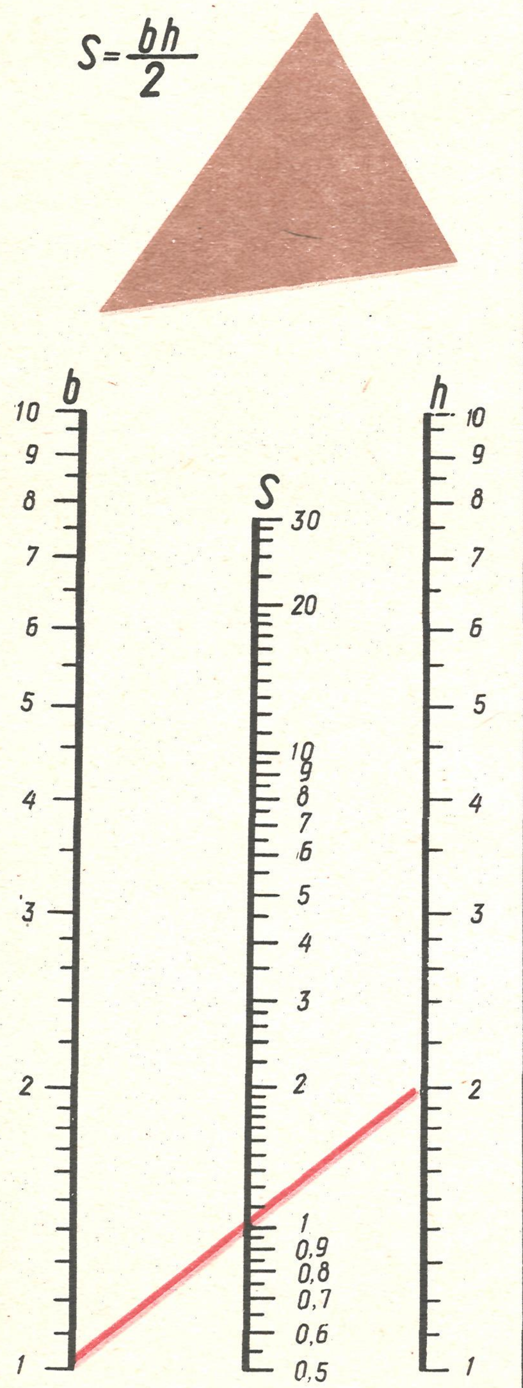
44. Логарифмы упрощают вычисления

Важным шагом в развитии средств вычислений явилось открытие логарифмов, а позднее — создание специальных таблиц логарифмов.

В XVII в. были обнаружены интересные свойства логарифмов, благодаря чему циркуль совместно с логарифмической шкалой стал удобным инструментом вычислений. Позднее циркуль был заменен шкалой, тождественной первой. С XVIII в. счетная логарифмическая линейка широко применяется в вычислительной практике.

45. Номограммы

Номограммы — специальные чертежи, предназначенные для решения определенного типа вычислительных задач. Творцом общей теории номограмм считается французский математик Морис Окань (1862—1938), опубликовавший ряд работ по теории „считающих чертежей". Он и назвал их „номограммами" (от греч. νόμος — закон и γραμμή — запись).

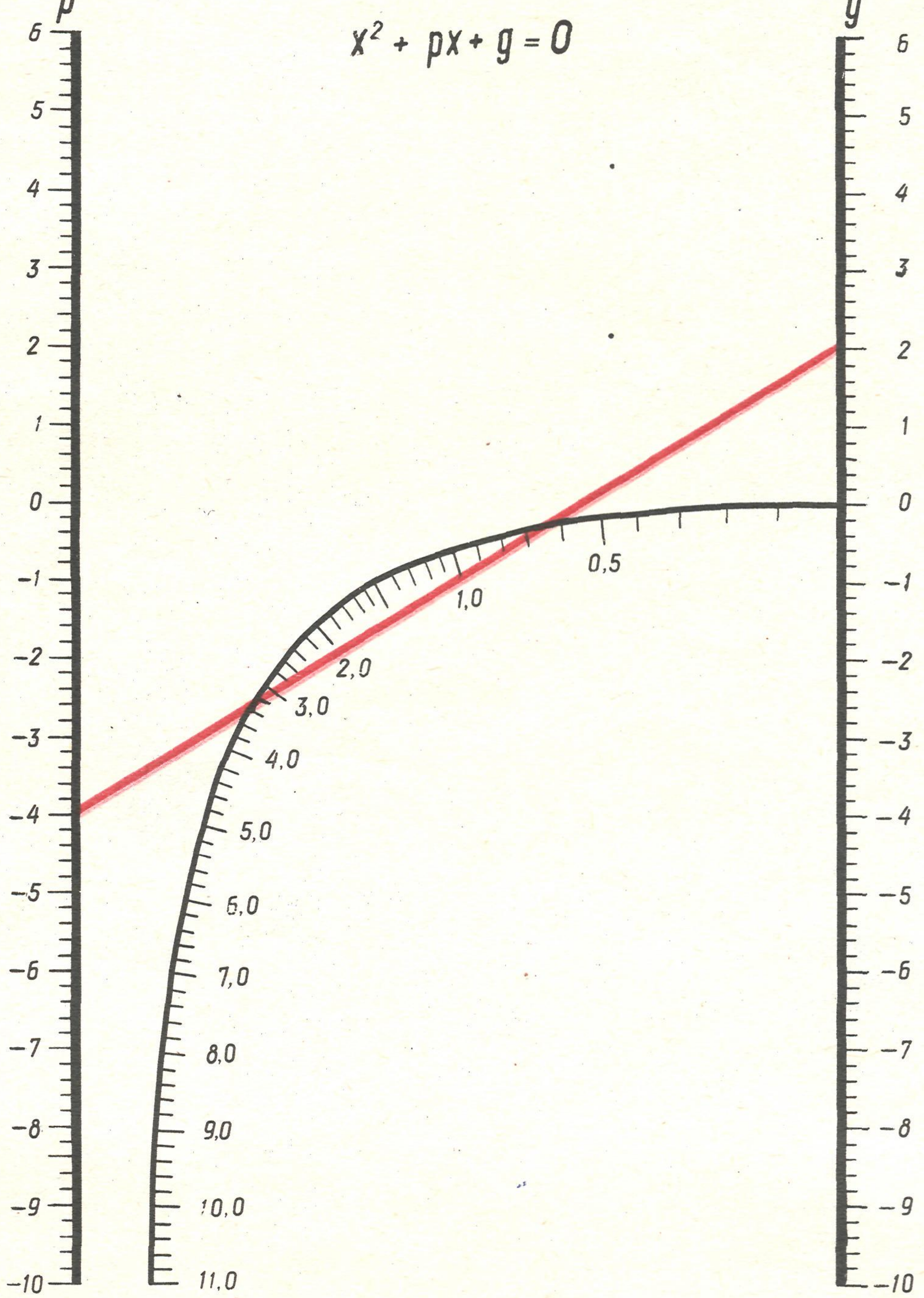


Номограмма для вычисления площади треугольника.

Номограммы из выровненных точек уравнения $f(x, y, z) = 0$ состоят из трех шкал переменных x, y, x, область изменения которых задается этими шкалами. Шкалы построены так, что значения переменных x, y, z на них, удовлетворяющие уравнению $f(x, y, z) = 0$, лежат на одной прямой.

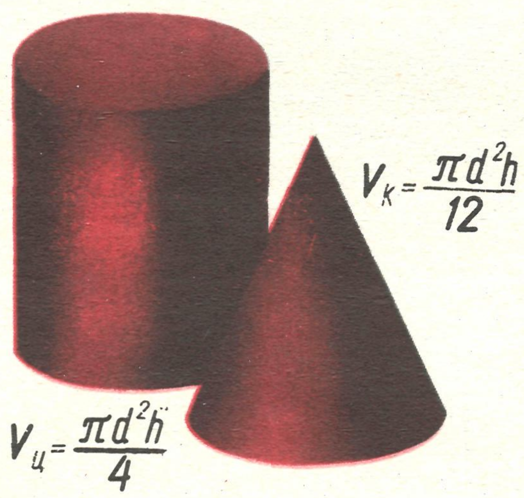
Шкалы для области переменных x, y, z уравнения $f(x, y, z) = 0$ в сетчатых номограммах строятся так, что каждые три точки, соответствующие коэффициентам уравнения, и точки, соответствующие искомым положительным корням уравнения, лежат на одной прямой.

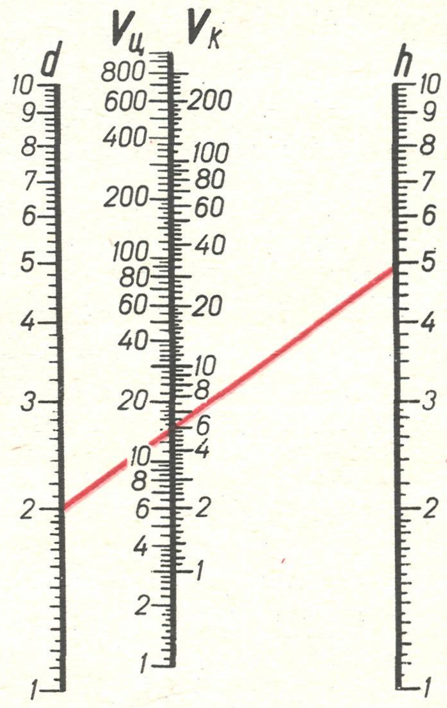
Транспарантная номограмма в простейшем случае состоит из двух плоских полей (плоскостей) — основного и поля транспаранта — с изображенным на них множеством точек, каждая из которых помечена парой чисел — значениями соответствующих переменных и немых линий и точек. Примером транспарантной номограммы является логарифмическая линейка, где транспарант (движок) совершает лишь поступательное движение.



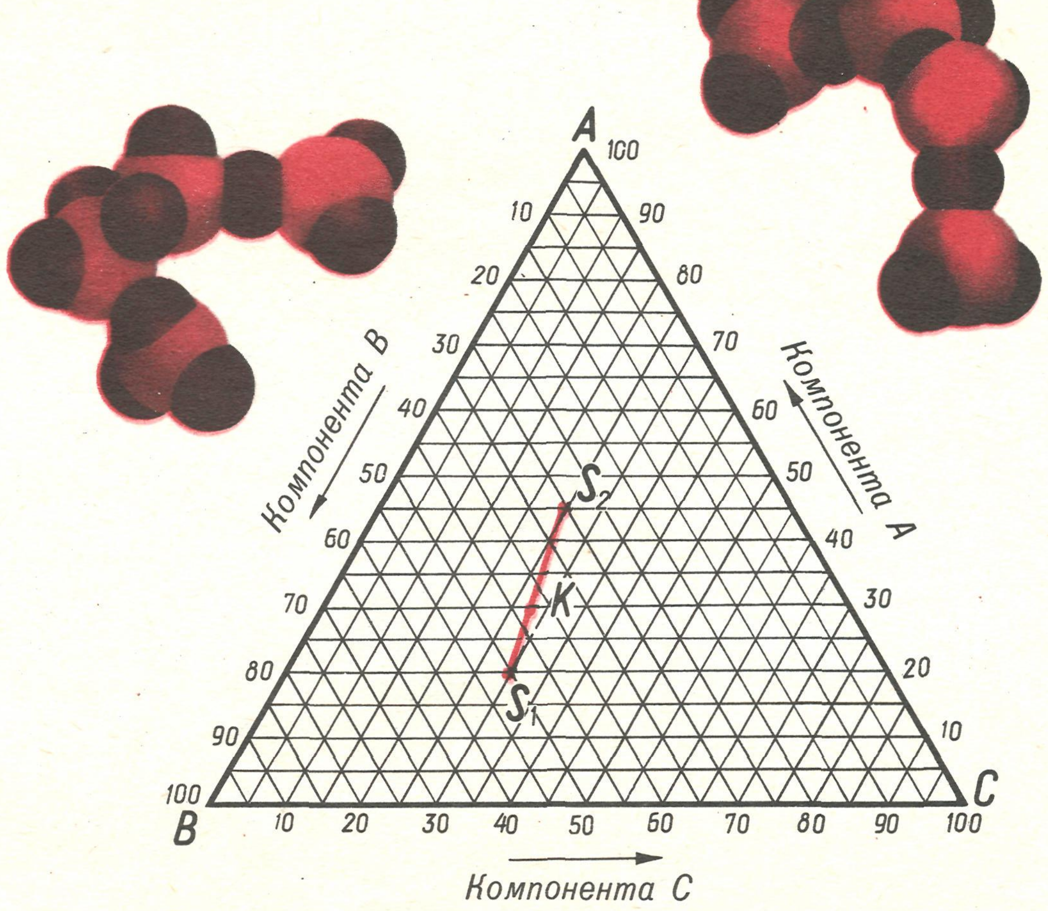
Номограмма для решения приведенных квадратных уравнений.

Номограмма для вычисления объема цилиндра и конуса.





Для решения многих задач химии широко используют номограмму „Треугольник Гиббса".

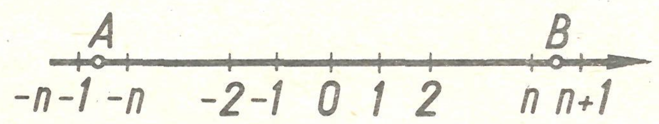


45. Номограммы

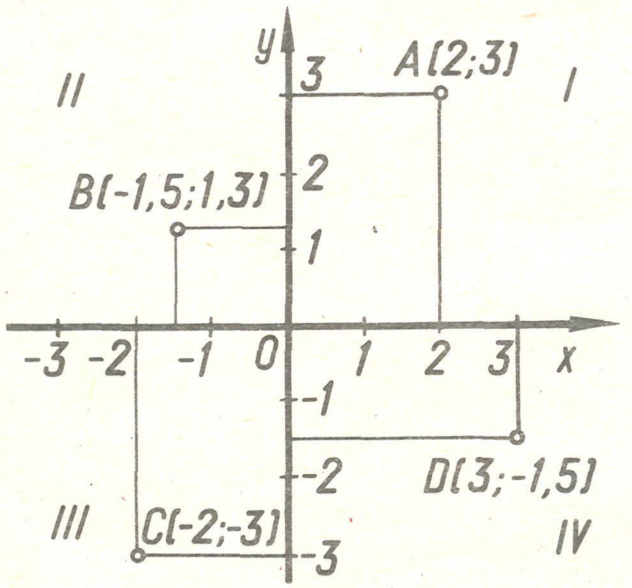
Номография (от греч. νόμος — закон и γράμμα — письменный знак) — это область математики, изучающая теорию и практические методы построения специальных чертежей — номограмм, которые являются графическим изображением функциональных отношений и позволяют при помощи простой схемы найти ту или иную величину по данной формуле. Каждая номограмма составляется для какой-то определенной формулы или уравнения. Номограммы предназначены для быстрого выполнения расчетов, которые не требуют большой точности (две-три значащие цифры). Часто номограммы применяются для контроля при точных вычислениях.

Первые графические таблицы для вычислений применяли уже в эпоху античности. Во времена Гиппарха (II в. до н. э.) эти графические методы были общепринятыми для решения сферических треугольников.

В 1628 г. в Лондоне было издано практическое руководство английского юриста и математика Э. Уингейта (1593—1656) „Построение и использование линий пропорции". В середине XIX в. номограммы ввел французский инженер Лалан. Он применил неодинарные шкалы на параллельных осях, осуществил спрямление графика. Но творцом общей теории номограмм стал французский математик и инженер М. Окань.

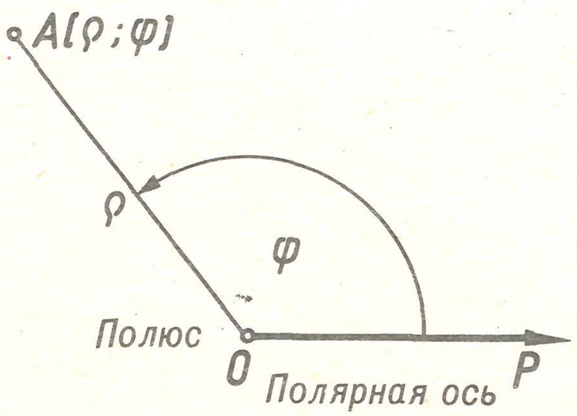


Положение точки на числовой прямой задается одним числом.

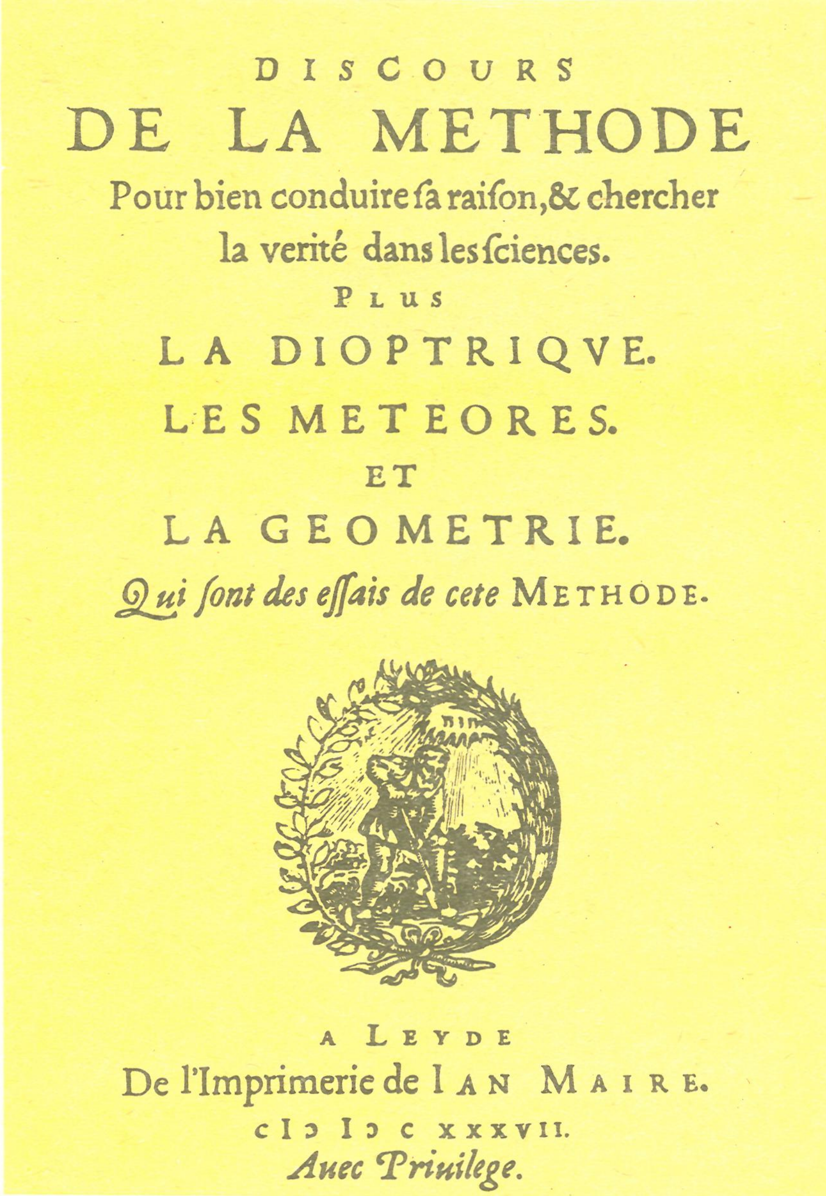


Точка в квадранте	Знаки	
	абсциссы	ординаты
I	+	+
II	−	+
III	−	−
IV	+	−

Декартова прямоугольная система координат на плоскости.

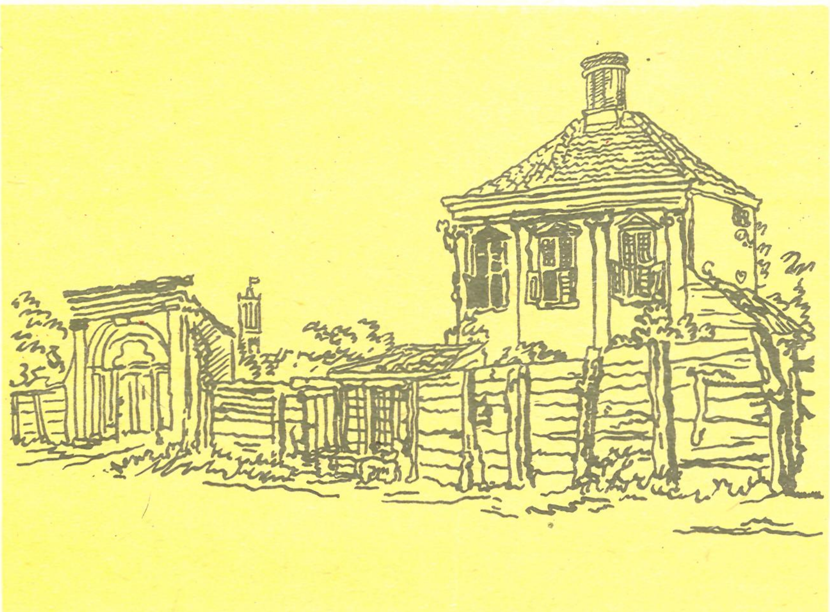


В полярной системе координат положение точки на плоскости задается направлением $\hat{\varphi}$, в котором смещается эта точка, и расстоянием ρ до нее.



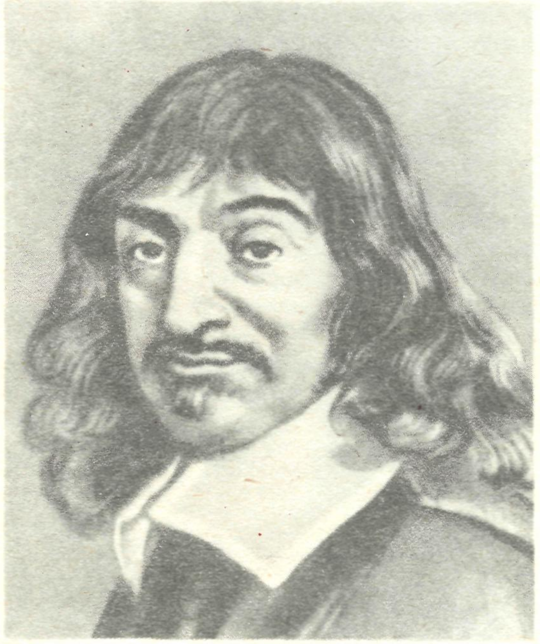
DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon, & chercher la verité dans les ſciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
cIↃ IↃ c XXXVII.
Auec Priuilege.

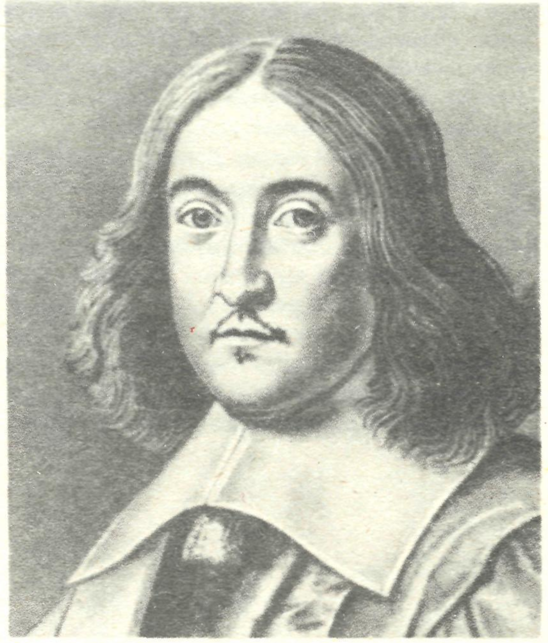


Поворотным пунктом в математике была Декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и тем самым диалектика и благодаря этому же стало немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление, которое тотчас и возникает и которое было в общем и целом завершено, а не изобретено, Ньютоном и Лейбницем.

Ф. Энгельс



Рене Декарт (1596–1650) — выдающийся французский математик, философ, физик, физиолог, основоположник аналитической геометрии, в которой положение множества точек на прямой, плоскости и в пространстве описывается с помощью отношений между числами.



Пьер Ферма (1601–1665) — французский юрист и математик. Наряду с Декартом является основоположником аналитической геометрии. Внес большой вклад в развитие теории чисел, математического анализа, один из создателей теории вероятностей.

46, 47. Союз алгебры и геометрии

В первой половине XVII в. возникла новая ветвь математики — аналитическая геометрия, установившая тесную связь между линиями на плоскости и алгебраическими уравнениями с двумя переменными.

Сведения о свойствах геометрических линий необходимы были не только геометрам, но и мореплавателям, механикам, архитекторам. Уже И. Кеплер (1571—1630) открыл, что планеты вращаются вокруг Солнца по эллипсам, а Галилей — что брошенный камень летит по параболе, по параболах движутся и пушечные ядра.

В начале XVII в. некоторые математики были близки к идее аналитической геометрии. Особенно четко предусматривали возможности новой математической отрасли Р. Декарт и П. Ферма. Создателем аналитической геометрии считают Декарта. Он предложил наиболее общую постановку вопроса. Она была рассмотрена в его большом философском трактате „Рассуждения о методе с тем, чтобы хорошо упражнять свой ум и находить истину в науках, с приложениями: диоптрика, метеорология и геометрия". Последнее приложение „Геометрия" содержало достаточно полное, хотя иногда и не совсем четкое изложение новой математической дисциплины, называемой с того времени аналитической геометрией.

В основу новой теории Декартом была положена идея координат, средствами которой удалось „арифметизировать" плоскость. Он предложил в уравнении с двумя переменными $F(x, y) = 0$ считать x абсциссой некоторой точки плоскости, а соответствующее значение y — ординатой этой точки. Тогда при непрерывном изменении x для каждого его значения можно вычислить совершенно определенное y и, таким образом, задать на плоскости множество точек, представляющих собой некоторую линию.

Итак, каждому уравнению $F(x, y) = 0$ на плоскости соответствует линия, являющаяся множеством всех точек плоскости с координатами $(x_i, F(x_i))$. Это открытие ознаменовало начало новой эпохи в математике.

47. Союз алгебры и геометрии

Исследования уравнений кривых линий и поверхностей раскрывали ученым глубокие закономерности этих математических объектов, позволили выявить новые неожиданные факты и открыли путь к практическим применениям свойств различных кривых линий и поверхностей в машиностроении, приборостроении, строительстве, искусстве.

Декартов лист в прямоугольной системе координат имеет уравнение

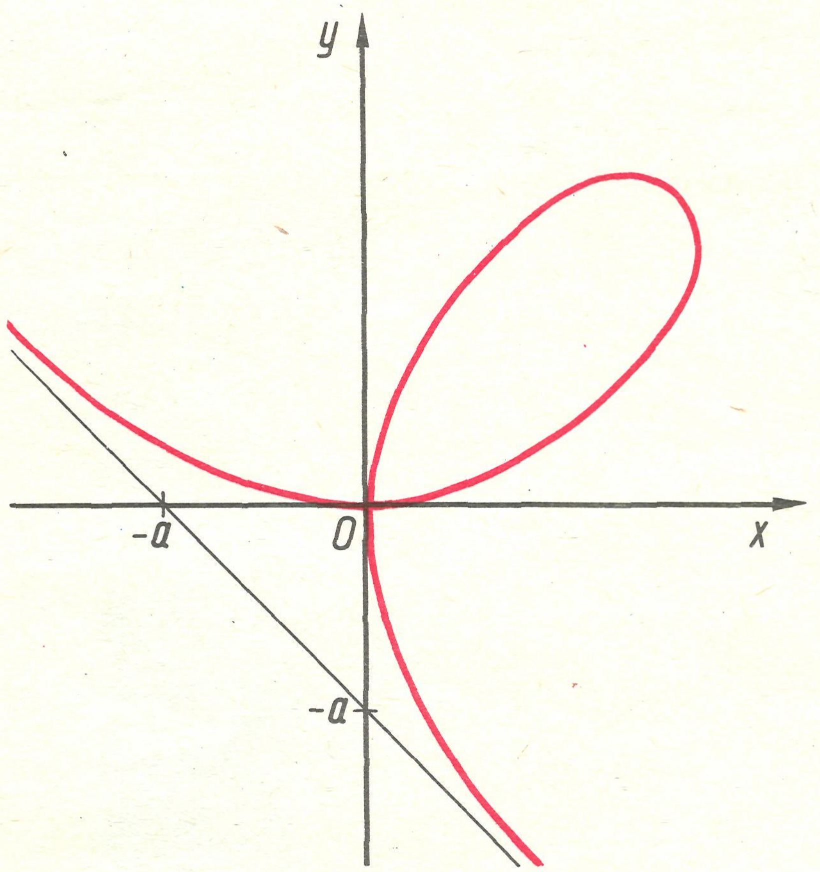
$x^3 + y^3 - 3axy = 0,$

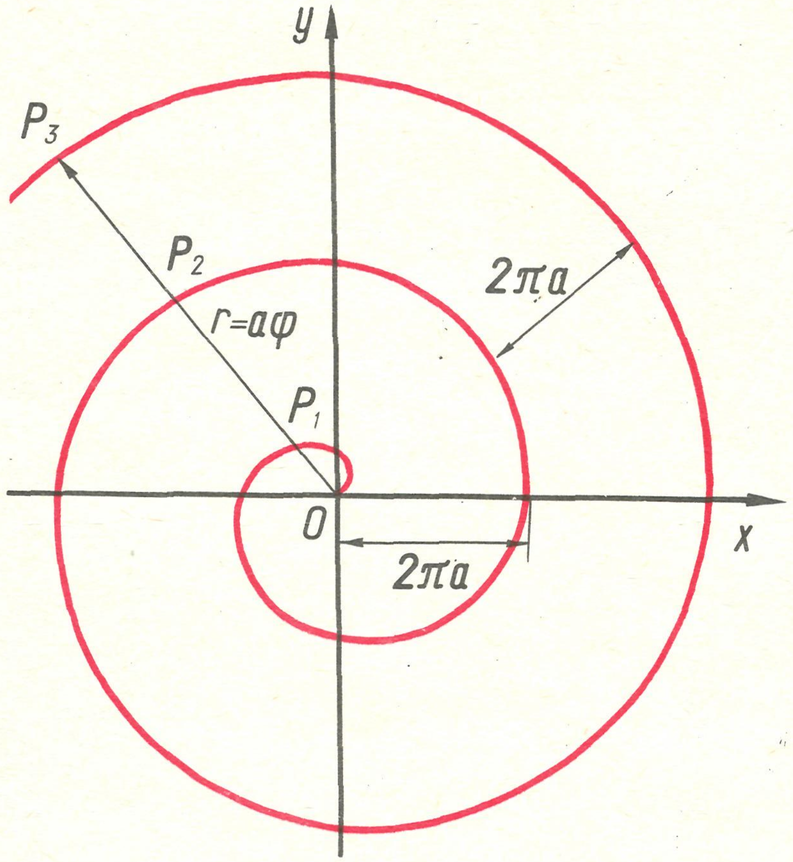
во втором и четвертом координатном углах ветви его стремятся к бесконечности.

Логарифмическая спираль в полярной системе координат записывается уравнением

$\rho = a\,e^{b\varphi}.$

Она переходит в себя при линейных преобразованиях плоскости, составляющих группу, часто проявляется в живой природе, находит широкое применение в технике. Вращающиеся ножи в различных режущих машинах имеют профиль, ограниченный дугой спирали; по этой спирали закручивают трубы, подводящие воду к лопастям турбинного колеса; ее широко используют при проектировании зубчатых колес.





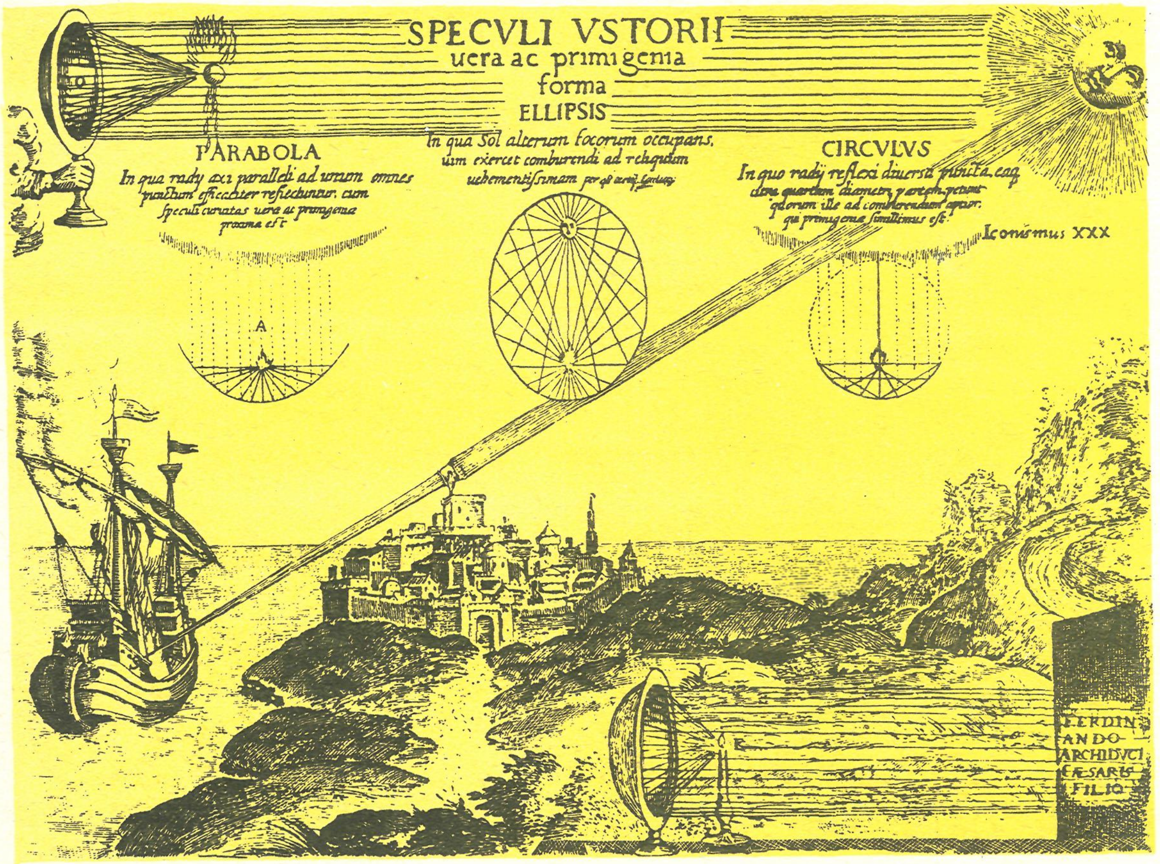
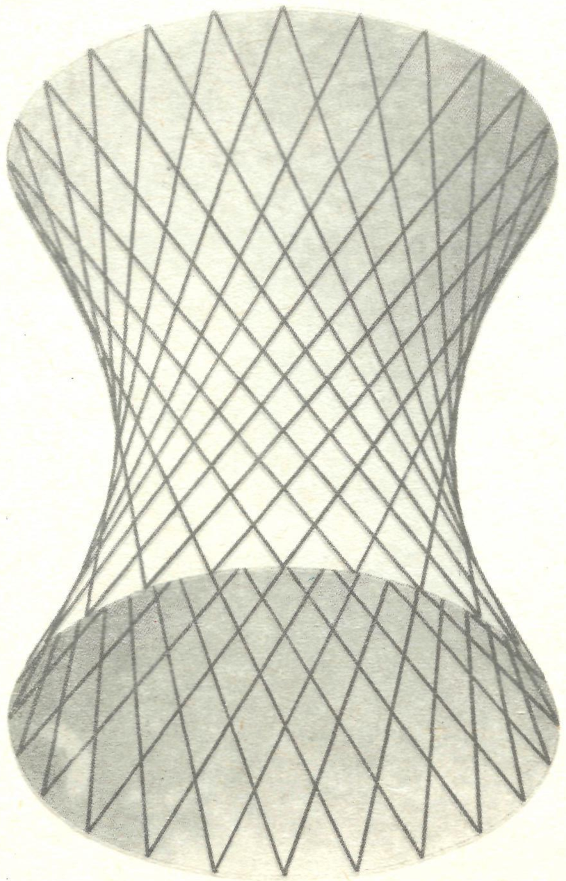
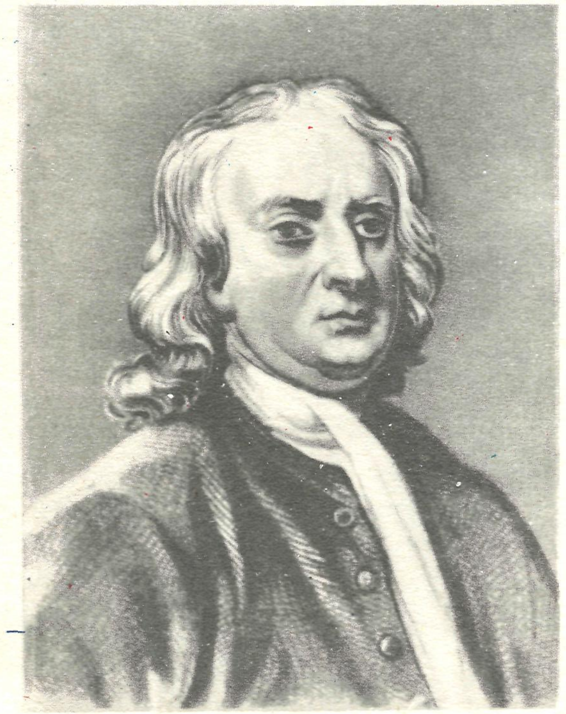


Рисунок из книги Афанасия Кирхнера „Великое искусство света и тени", изданной в 1671 г., свидетельствует о понимании в то время оптических свойств кривых второго порядка и важности применения этих свойств на практике.



Поколения студентов, изучая аналитическую геометрию, записывали уравнения, которыми определяются направления линий, образующих однополостный гиперболоид. Через каждую точку этой поверхности второго порядка проходят две прямые — прямолинейные образующие поверхности. В случае гиперболического параболоида — это действительные прямые линии.

Выдающийся советский инженер, почетный член АН СССР В. Г. Шухов (1853—1939) положил это свойство однополостного гиперболоида в основу нового вида сетчатых конструкций, в которых пространственный каркас, имеющий криволинейные очертания, образован из одинаковых прямых элементов. Первая гиперболоидная водонапорная башня была построена в в 1896 г. для Нижегородской всероссийской выставки. Идея сетчатых гиперболоидных башен Шухова была подхвачена проектировщиками и конструкторами водонапорных башен, маяков, башен для линий электропередачи и многочисленных других конструкций.



Исаак Ньютон (1643—1727) — выдающийся английский математик, физик, механик, астроном. Вместе с Лейбницем, но независимо от него подвел исторически важнейший итог многовековой истории формирования фундаментальных понятий производной и интеграла, создал дифференциальное и интегральное исчисления.

Научные труды посвящены математическому анализу, алгебре, геометрии, механике, в частности небесной механике, оптике, астрономии, теории света, теории цветов и другим областям математической физики.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) — выдающийся немецкий математик, физик, философ, организатор научных учреждений. Вместе с Ньютоном разделяет славу открытия дифференциального и интегрального исчислений.

Исключительно многогранной и плодотворной была научная деятельность Лейбница. В своих многочисленных (около 80 тыс.) работах, преимущественно незавершенных, объял почти все области физико-математических, естественных, гуманитарных и технических наук.

Геометрический смысл производной:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} =$$

$$= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

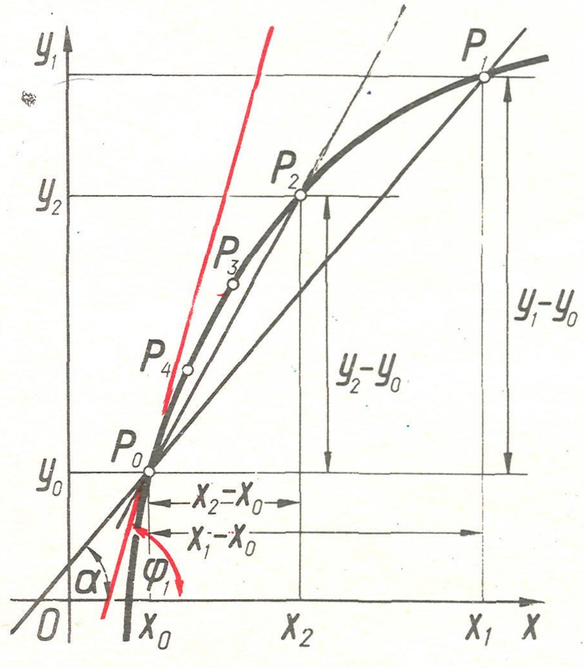
$$= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \operatorname{tg} a;$$

$$f'(x_0) = y'_{x = x_0} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{x_n \to x_0} \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} = \lim_{x_n \to x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$



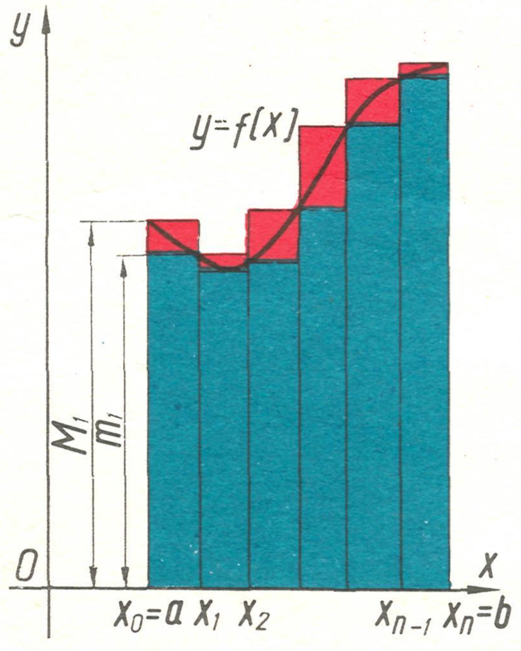
К понятию производной, как и к понятию интеграла, можно прийти, решая задачи механики, теплофизики, электротехники, радиотехники, биологии и др. Путь, по которому начали подход к этим понятиям ученые Древней Греции, был геометрический — решение задач на проведение касательной к кривой в заданной ее точке и вычисление площади фигуры, в частности криволинейной трапеции.

Исчисление бесконечно малых стало важнейшей дисциплиной классической высшей математики. Именно ему в значительной степени обязана математика столь быстрому всеобъемлющему и эффективному применению математических методов к решению многочисленных задач естествознания, техники и даже гуманитарных наук. В частности, проектирование, запуск и обеспечение нормального функционирования искусственных космических объектов — это прежде всего решение целого комплекса задач методами дифференциального и интегрального исчисления.

Площадь криволинейной трапеции между точками $x = a$ и $x = b$, абсциссой и графиком кривой $y = f(x)$:

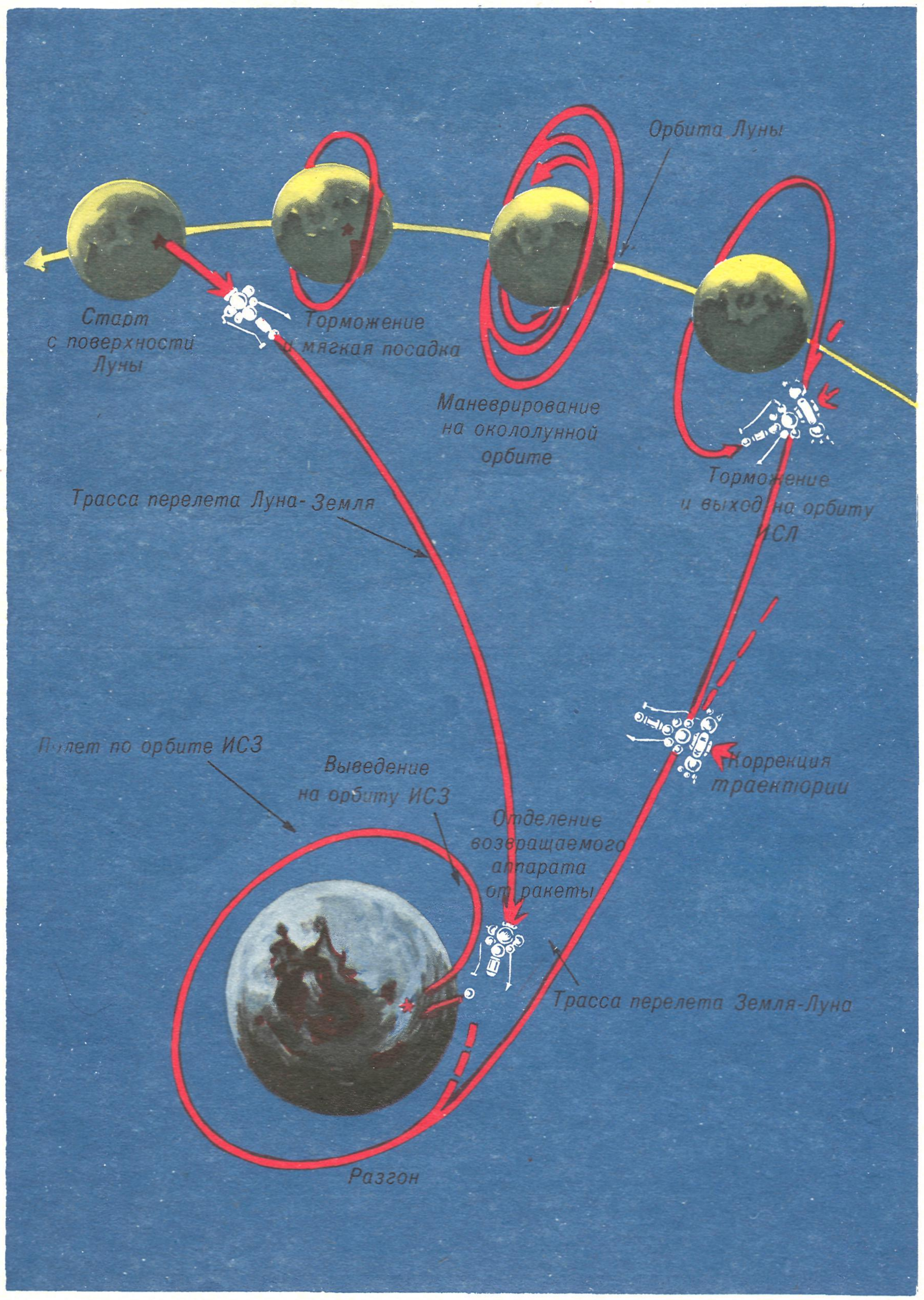
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \lim_{n \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Соединение в одном алгоритме двух операций предельного перехода — бесконечного убывания каждого из слагаемых суммы с одновременным увеличением до бесконечности числа слагаемых — привело к созданию нового исключительно важного математического понятия — определенного интеграла.



Лишь дифференциальное исчисление дает естествознанию возможность изображать математически не только с о с т о я н и я, но и п р о ц е с с ы: движение.

Ф. Энгельс



48, 49. Математика движения

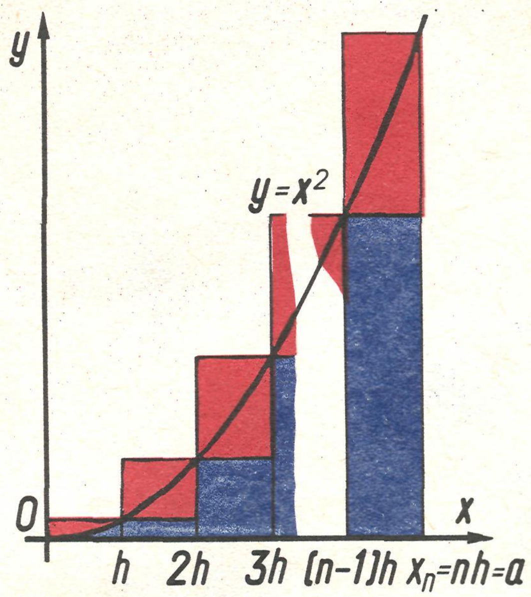
В заметках и фрагментах к „Диалектике природы" Ф. Энгельс писал о том, что среди всех успехов теоретического знания вряд ли какой-либо является таким выдающимся триумфом человеческого духа, как изобретение исчисления бесконечно малых во второй половине XVII в.

Важно отметить, что даже создатели нового исчисления не могли постичь всей глубины совершаемого ими революционного преобразования математики. Фундаментальные понятия нового исчисления бесконечно малых и операции над ними еще облечены в них некой загадочностью, непостижимостью. К. Маркс писал об этом периоде истории математического анализа: „Итак, сами верили в таинственный характер новооткрытого исчисления, которое давало правильные (и притом в геометрическом применении прямо поразительные) результаты математически положительно неправильным путем. Таким образом, сами себя мистифицировали и тем более ценили новое открытие, тем более бесили толпу старых ортодоксальных математиков и вызывали с их стороны враждебные вопли, будившие отклик даже в мире неспециалистов и необходимые для прокладывания пути новому" [9, с. 169].

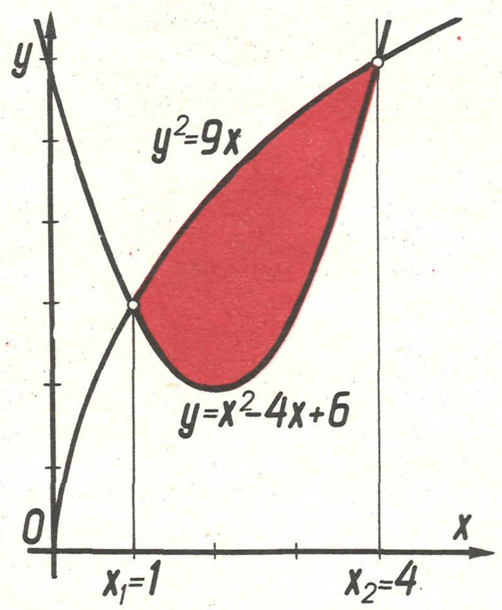
49. Математика движения

Вычисление площади под параболой $y = x^2$:

$$\underline{F}_n = 0 + 1^2 \cdot h^2 h + 2^2 \cdot h^2 h + \ldots + (n-1)^2 \times$$
$$\times h^2 h = \frac{h^3 (n-1) n (2n-1)}{6};$$
$$\overline{F}_n = 1^2 \cdot h^2 h + 2^2 \cdot h^2 h + \ldots + h^2 h^2 h =$$
$$= \frac{h^3 n (n+1)(2n+1)}{6};$$
$$F_n = \lim_{n \to \infty} \underline{F}_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a^3}{6} (1 - \frac{1}{n}) \cdot 1 \times$$
$$\times (2 - \frac{1}{n}) = \frac{a^3}{3};$$
$$F_n = \lim_{n \to \infty} \overline{F}_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a^3}{6} \cdot 1 \cdot (1 + \frac{1}{n}) \times$$
$$\times (2 + \frac{1}{n}) = \frac{a^3}{3};$$
$$F_n = \lim_{n \to \infty} \underline{F}_n = \lim_{n \to \infty} \overline{F},$$

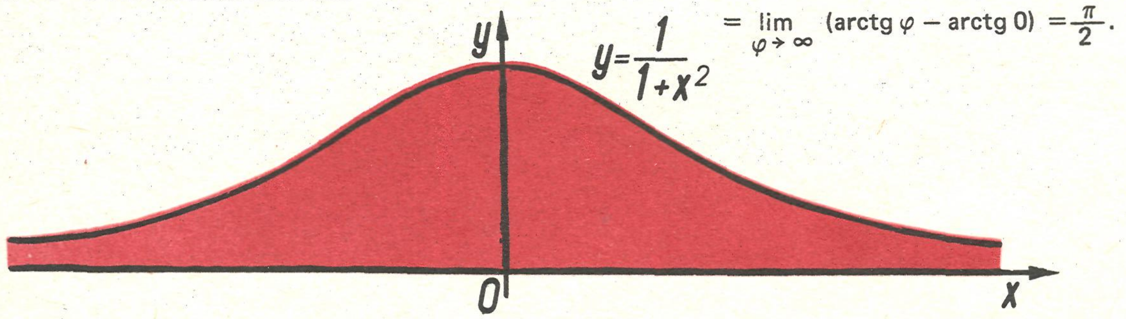


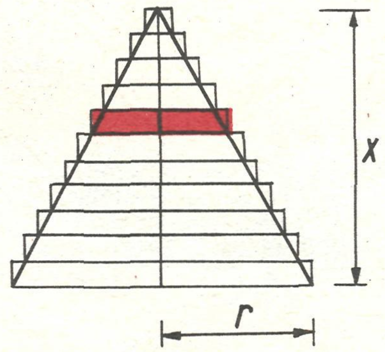
Вычисление площади, ограниченной двумя кривыми $y^2 = 9x$ и $y = x^2 - 4x + 6$.

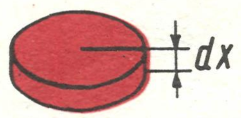


При помощи интеграла вычисляем площадь, ограниченную бесконечной фигурой, и находим, что эта площадь конечна:

$$S = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\varphi \to \infty} \int_0^{\varphi} \frac{dx}{1+x^2} =$$
$$= \lim_{\varphi \to \infty} (\operatorname{arctg} \varphi - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2}.$$



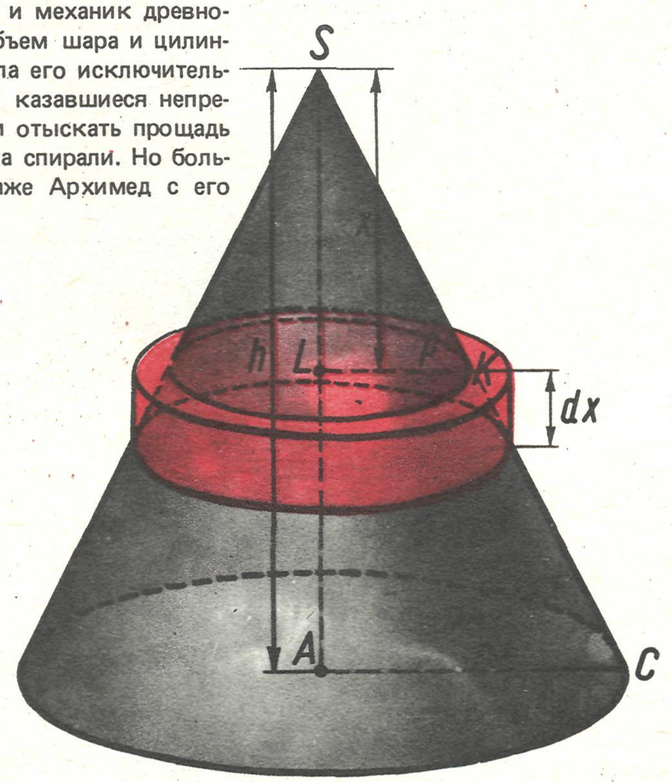


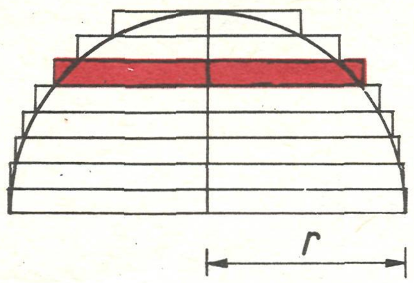


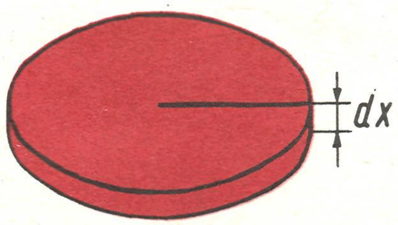
Вычисление объема конуса:

$$V = \lim \sum_0^h \pi \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \int_0^h \pi \frac{r^2}{h^2} x^2 dx =$$
$$= \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} (\frac{x^3}{3}) \Big|_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Величайший математик и механик древности Архимед вычислил объем шара и цилиндра. Понадобилась вся сила его исключительного гения, чтобы обойти казавшиеся непреодолимыми препятствия и отыскать прощадь сегмента параболы и витка спирали. Но большего не смог сделать даже Архимед с его уникальной одаренностью.







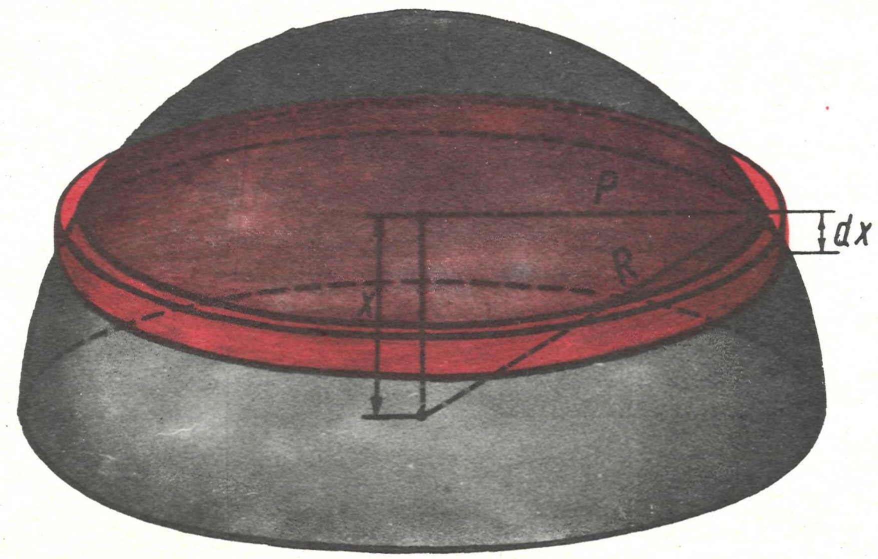
Вычисление объема шара.

$$\frac{V}{2} = \lim \sum_0^R \pi (R^2 - x^2)\, dx = \pi \int_0^R (R^2 - x^2)\, dx =$$
$$= \pi (R^2 x - \frac{x^3}{3}) \Big|_0^R = \frac{2}{3} \pi R^3,$$

откуда

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

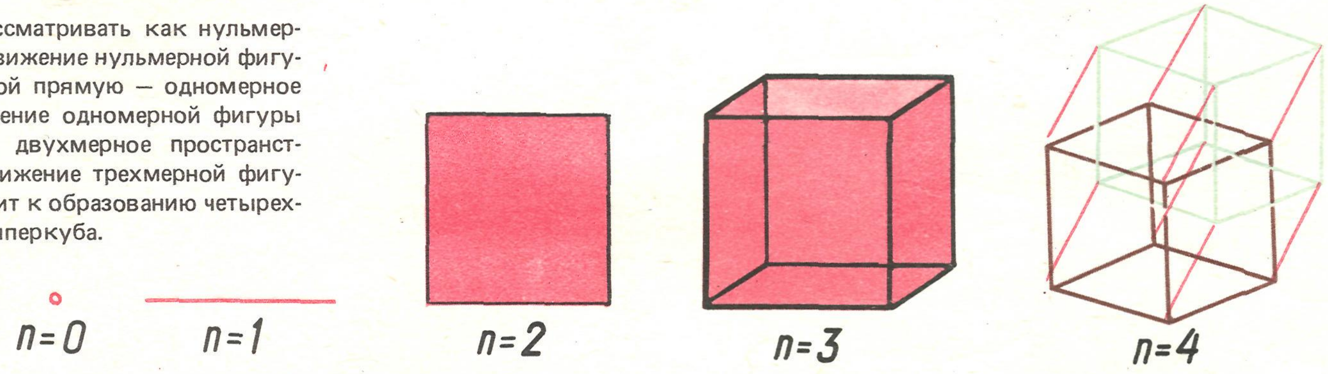
В настоящее время задачи на вычисление площадей, ограниченных любой степенной и многими трансцендентными кривыми, объемов тел вращения решают учащиеся старших классов средней школы. Это стало возможным благодаря тому, что они владеют исключительно эффективным и мощным математическим методом — интегральным исчислением.

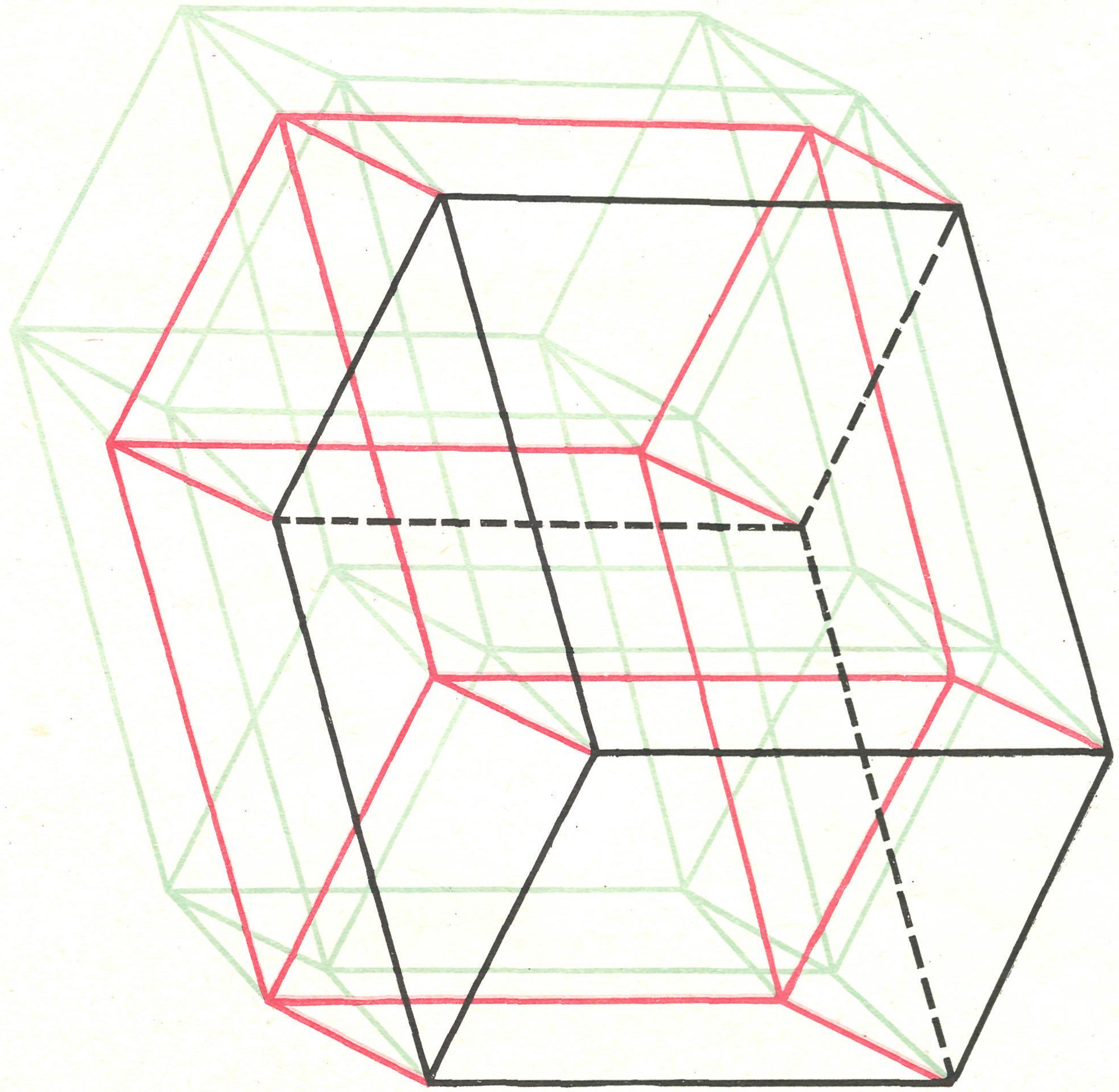


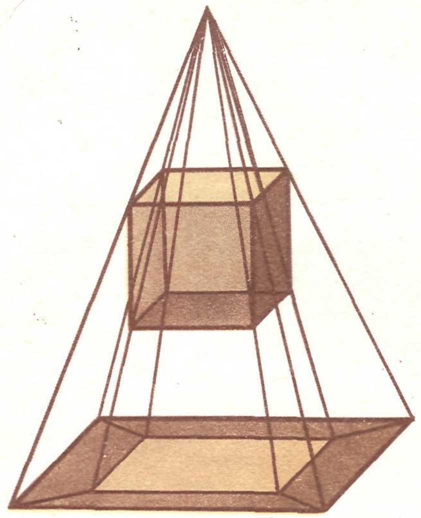
Объем половины шара

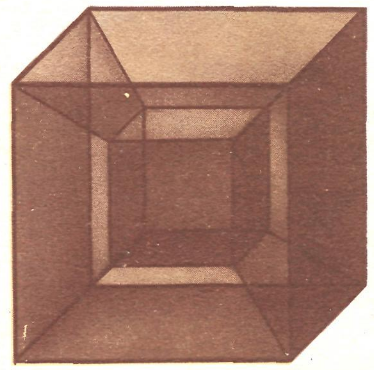
Многомерные пространства — замечательный пример математических абстракций, созданных для изучения систем объектов и различных сложных процессов, происходящих в окружающем человека трехмерном мире.

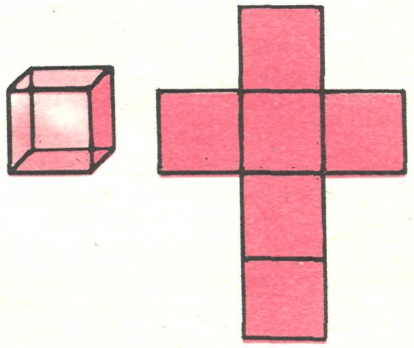
Точку можно рассматривать как нульмерное пространство. Движение нульмерной фигуры представляет собой прямую — одномерное пространство; движение одномерной фигуры представляет собой двухмерное пространство — плоскость; движение трехмерной фигуры — куба — приводит к образованию четырехмерного куба, или гиперкуба.

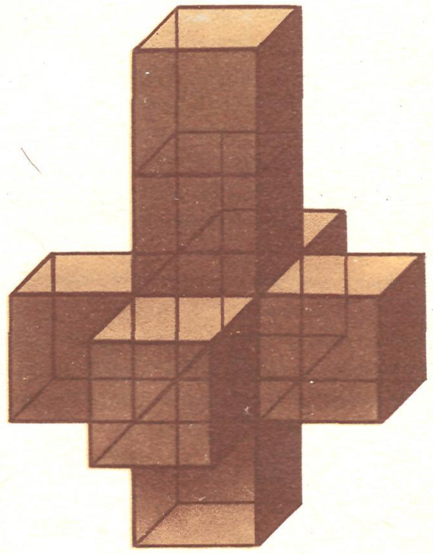












Проектируя трехмерный куб на плоскость, получаем двухмерную фигуру — его проекцию.

Такой вид имеет трехмерная проекция (проекция в трехмерное пространство) гиперкуба.

Одна из возможных разверток трехмерного куба.

Одна из возможных разверток четырехмерного куба.

Мы живем в четырехмерном пространстве-времени.

50. Мир иных измерений

Человек живет в трехмерном пространстве. Однако для изучения происходящих в нем явлений, для постижения сущности трехмерных объектов возникла необходимость в создании понятия многомерного пространства. Некоторые представления о многомерном кубе имелись уже у древнегреческого математика Диофанта из Александрии (III в.). Он употреблял геометрические термины, аналогичные терминам „квадрат" для второй степени и „куб" для третьей, называя произвольные степени: 4 — „квадрато-квадрат", 5 — „кубо-квадрат", 6 — „кубо-куб".

Немецкий математик М. Штифель (1487—1567) четко представлял целесообразность понятий многомерной геометрии. Он высказывал сожаления по поводу того, что в арифметике допускается создание многочисленных вещей, вовсе не имеющих формы, в то время как в геометрии нельзя выйти за пределы куба потому, что придется рассматривать более чем три измерения. Важное значение в развитии понятия многомерного пространства имели идеи Д'Аламбера. Он рассматривал время как четвертое измерение.

Первое систематическое исследование в области многомерной геометрии принадлежит немецкому ученому Г. Грасману (1809— 1877). Он изложил свои результаты в труде „Учение о протяженности" (1847).

Первое оригинальное исследование в отрасли четырехмерной геометрии на русском языке опубликовал Н. И. Гулак (1822—1899) — один из основателей Кирилло-Мефодиевского братства, в котором он вместе с Т. Г. Шевченко примыкал к левому революционно-демократическому крылу. В 1877 г. в Тбилиси Гулак опубликовал книгу „Попытка геометрии четырех измерений".

Термин „n-мерная геометрия" ввел английский математик А. Кэли (1821 — 1895).

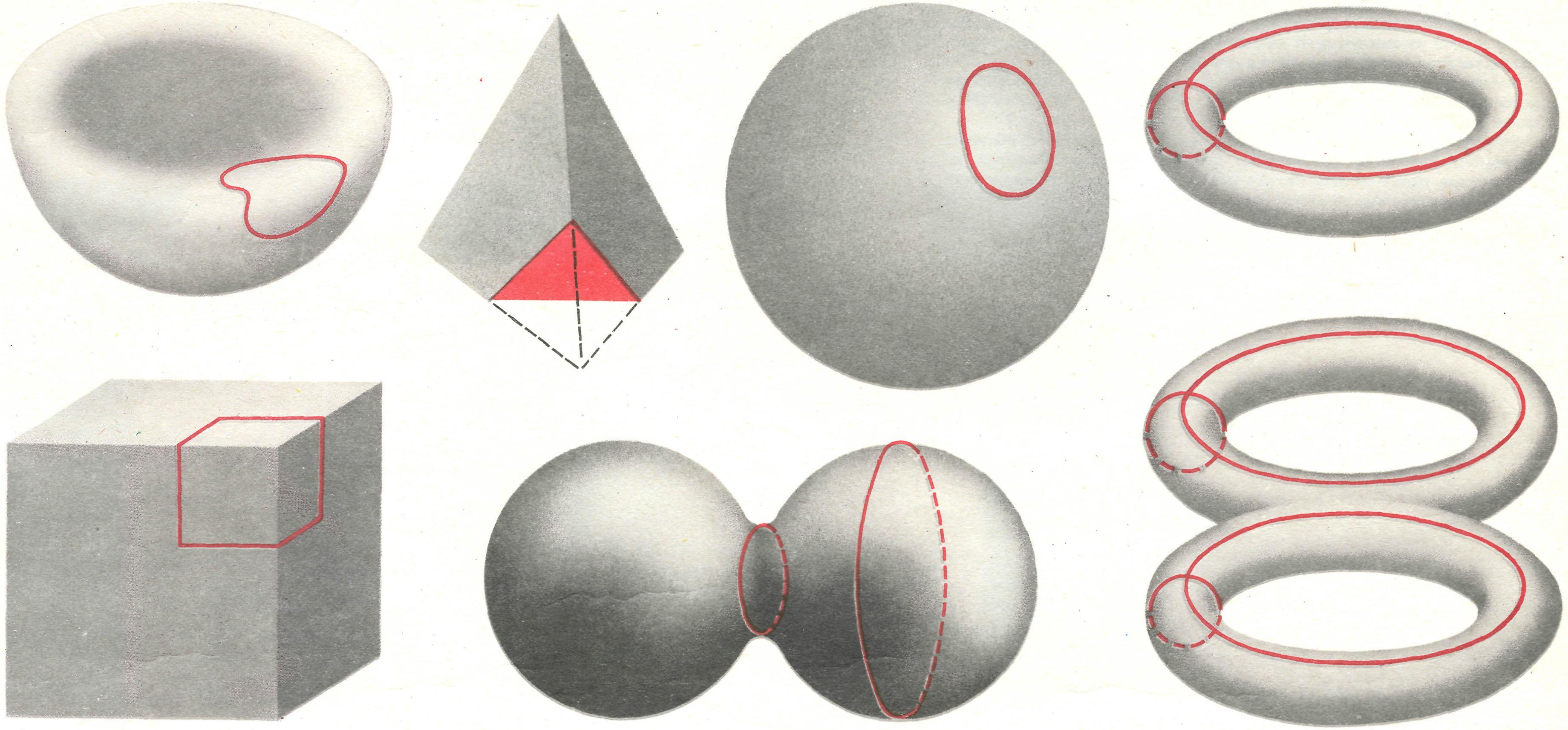
В наше время многомерные пространства утратили ореол таинственности. Идеи и методы многомерной евклидовой и неевклидовой геометрий широко применяются в различных отраслях науки и техники.

51. Топология — геометрия XX века

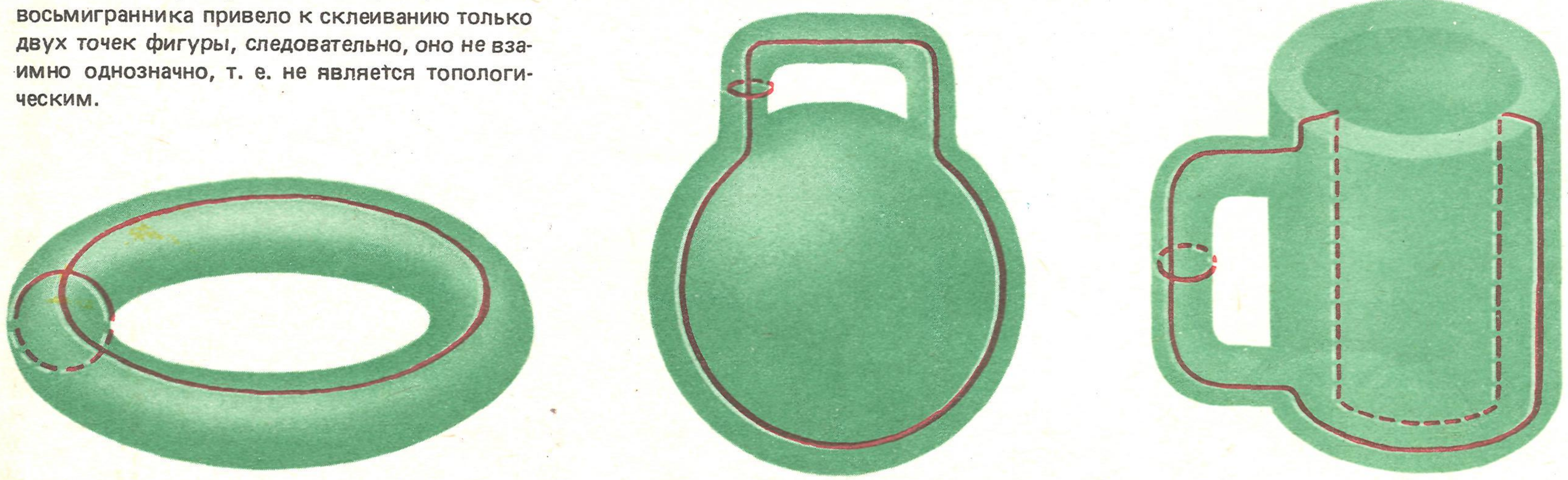
В прошлом веке были распространены два названия этой области математики — топология и analys situs. Первой работой, посвященной специально топологии, явилась „Предварительные исследования по топологии" (1847) немецкого математика И. Б. Листинга (1808—1882). Он же предложил название „топология" (от греч. τοπος — место и λογος — слово, закон). Название analys situs (анализ положения) предложил Б. Риман.

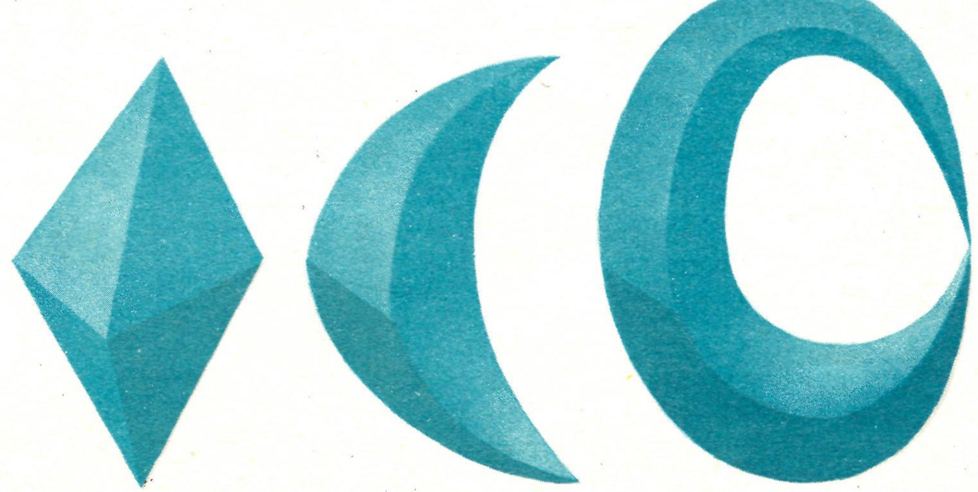
Топологическая структура множества математических объектов (пространства) задается указанием совокупности открытых подмножеств, удовлетворяющих определенным условиям (аксиомам).

Взаимно однозначное отображение $f: X \to Y$, непрерывное одновременно с обратным ему отображением f^{-1}, называется гомеоморфным отображением X на Y, или гомеоморфизмом. Свойства пространства и его фигур, сохраняющиеся при гомеоморфных отображениях, называются топологическими. Это наиболее глубокие и устойчивые свойства геометрических фигур, к ним принадлежат связность, компактность и размерность. Образно говоря, топология изучает свойства фигур, которые не являются метрическими и поэтому могут быть установлены без измерения и сравнения геометрических величин. Мы можем фигуру сгибать, скручивать, сжимать или растягивать, лишь бы не произошла катастрофа — разрыв или склеивание ее частей. Топологические свойства фигуры при упомянутых преобразованиях останутся неизменными.



Деформация тора в кружку — пример топологического преобразования. Преобразование восьмигранника привело к склеиванию только двух точек фигуры, следовательно, оно не взаимно однозначно, т. е. не является топологическим.





51, 52. Топология — геометрия XX века

Иллюстрации на этих двух плакатах могут создать ложное представление, что топология рассматривает главным образом занимательные задачи. Конечно же, это не соответствует действительности, хотя многие топологические задачи занимают почетное место в занимательной математике.

Исторически первой теоремой, относящейся к топологии, была известная формула Л. Эйлера о соотношении между числом вершин (B), ребер (P) и граней ($Г$) произвольного выпуклого многоугольника: $B - P + \Gamma = 2$.

Но к концу XIX в. топология была уже достаточно разработанной областью математики. Топологию часто называют современным этапом геометрии, потому что она, можно сказать, изучает, как построено интересующее нас множество математических объектов (и не обязательно геометрических фигур) из своих подмножеств.

52. Топология — геометрия XX века

Топологические свойства фигур люди подметили уже в древние времена. На одной древнеримской мозаике начала нашей эры дважды изображен рисунок перекрученной замкнутой ленты.

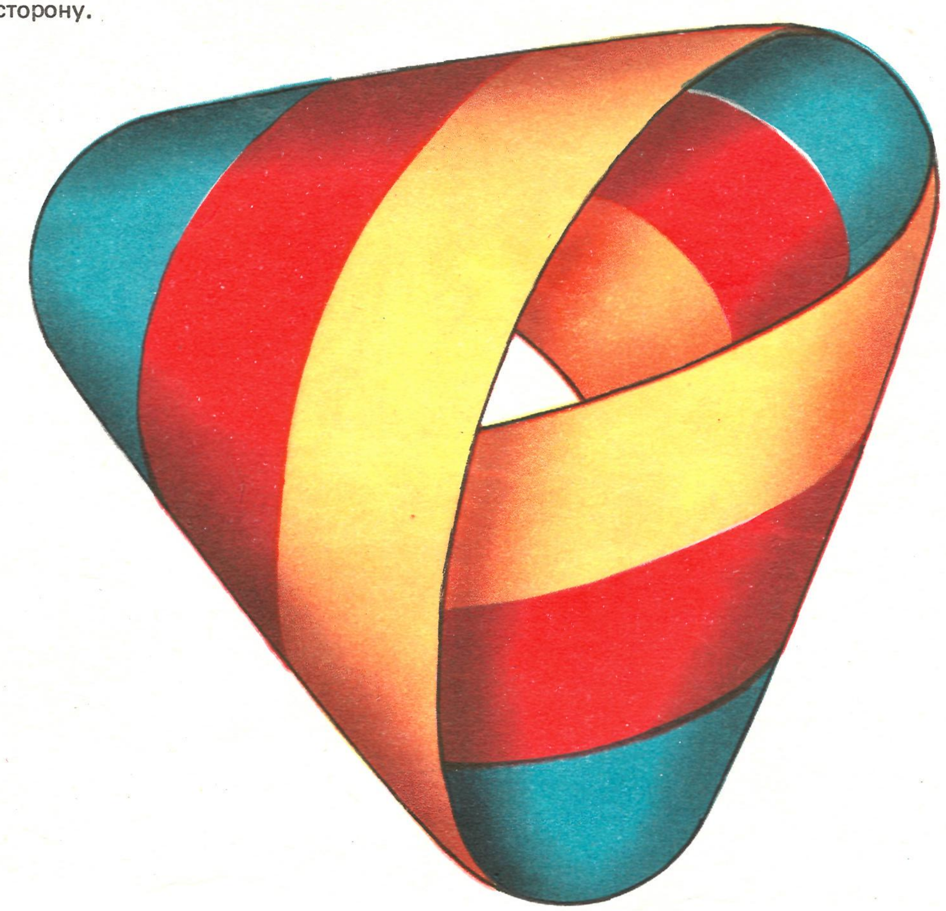
В 1736 г. гениальный математик Л. Эйлер решил известную задачу о семи мостах. Решая ее, он установил ряд топологических свойств графов. Наконец, в 1858 г. немецкий математик А. Ф. Мёбиус (1790—1868) удивил мир открытием парадоксального математического объекта — односторонней поверхности, названной позже „листом Мёбиуса". То, что только угадывали творцы древнеримской мозаики, в XIX в. получило оформление в строгих формулировках новых понятий и целой цепи неожиданных математических фактов.

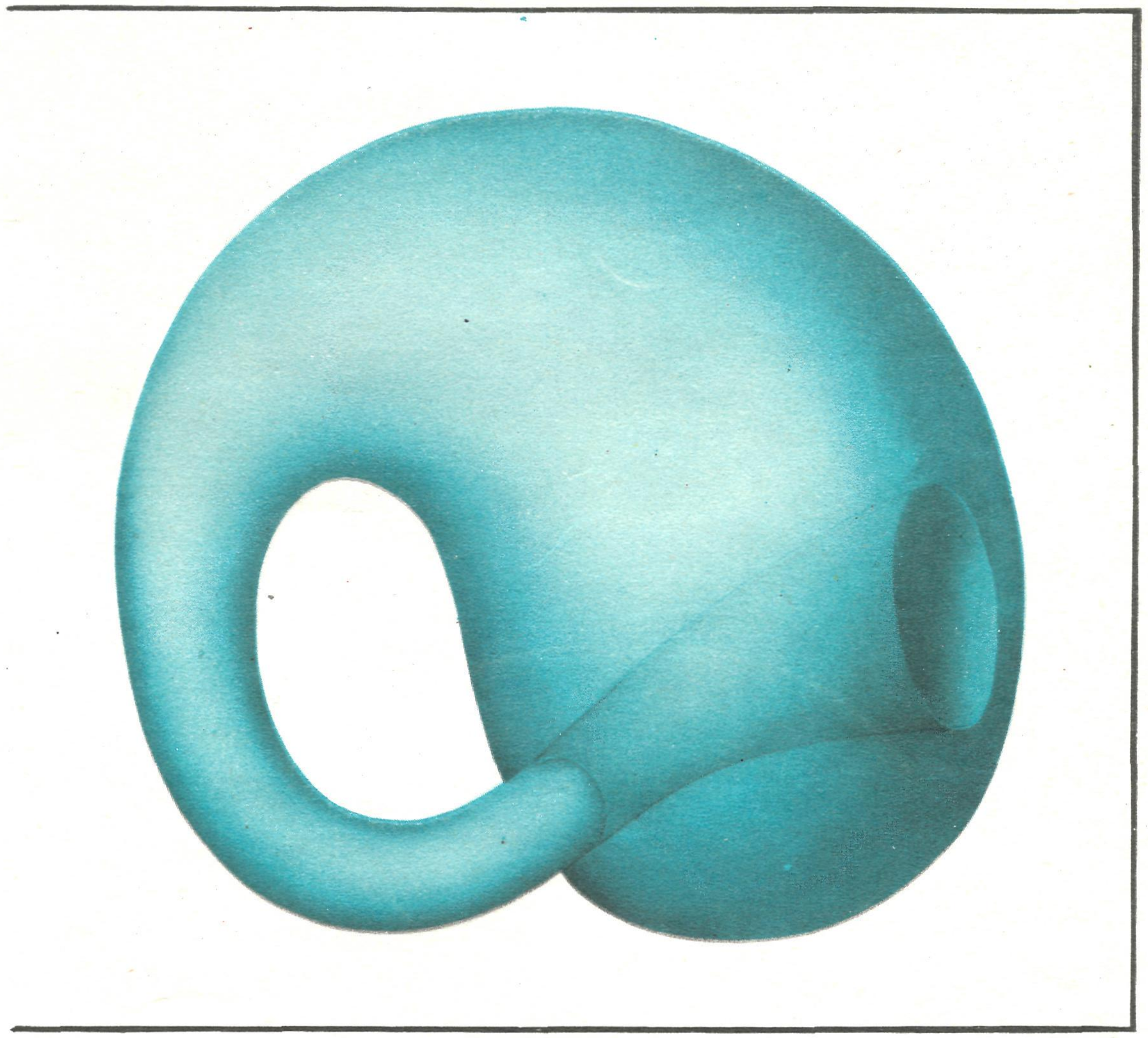
Бутылка Клейна — второй пример односторонней поверхности. Она показывает, что всякая замкнутая односторонняя поверхность в трехмерном евклидовом пространстве пересекает саму себя.

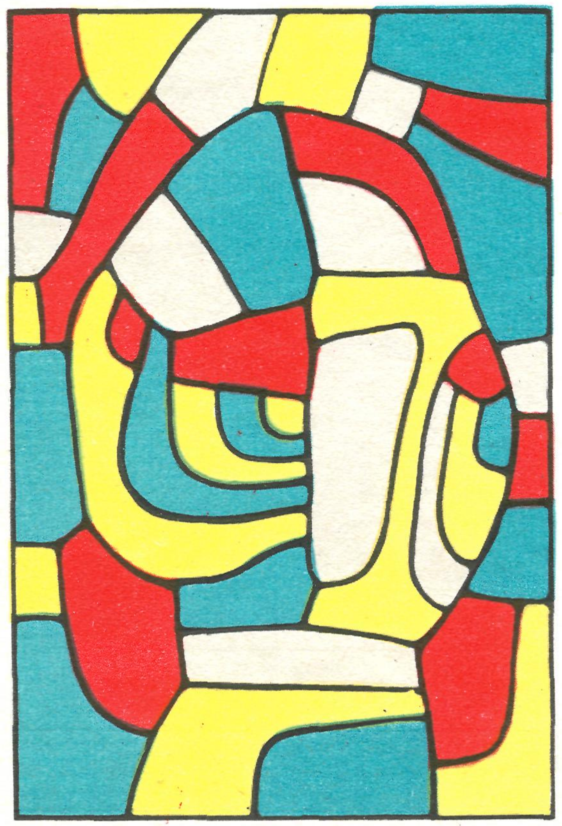
Условия многих топологических задач имеют занимательную форму и понятны даже учащимся начальных классов, решения же их часто исключительно сложны и стоили огромных усилий многим математикам.

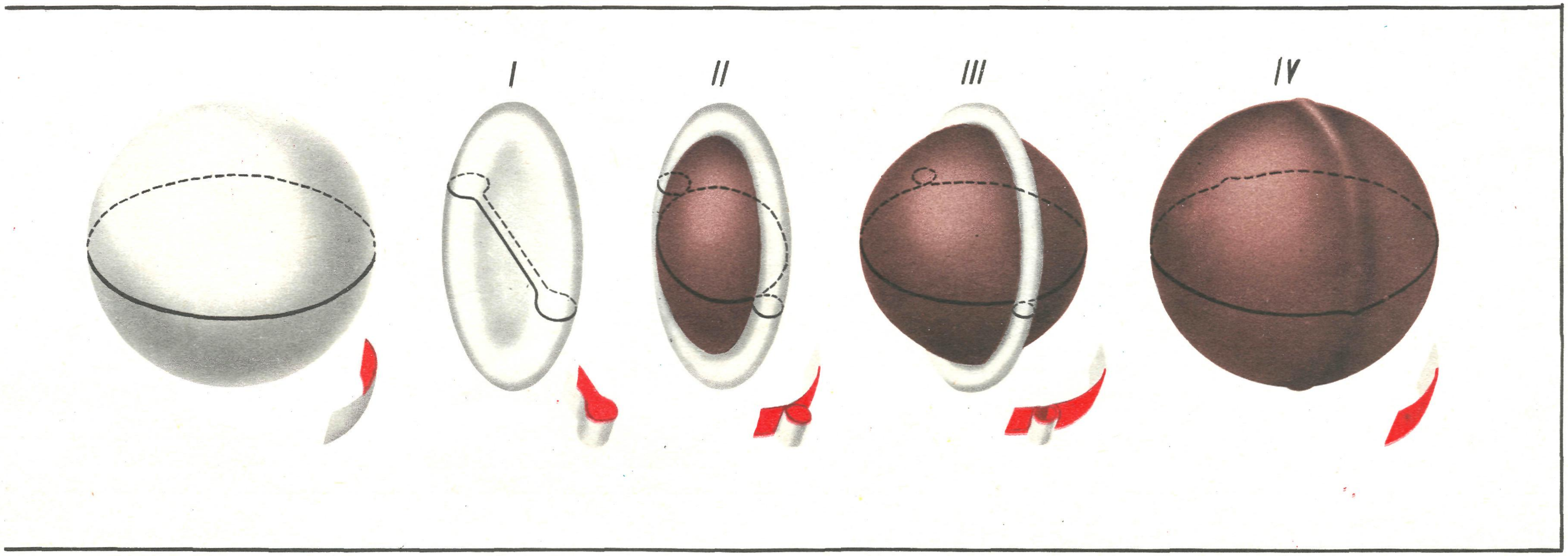
Например, только в 1976 г. при помощи ЭВМ ученые решили проблему „четырех красок", поставленную в 1840 г. Мёбиусом: каждую изображенную на шаре или на плоскости карту можно раскрасить четырьмя красками так, что каждые две страны, имеющие общий участок границы, будут окрашены разными красками.

Некоторые теоремы и задачи топологии поражают воображение неожиданностями своих результатов. Так, в одной из них доказывается, что шар, не разрывая, можно вывернуть на другую сторону.

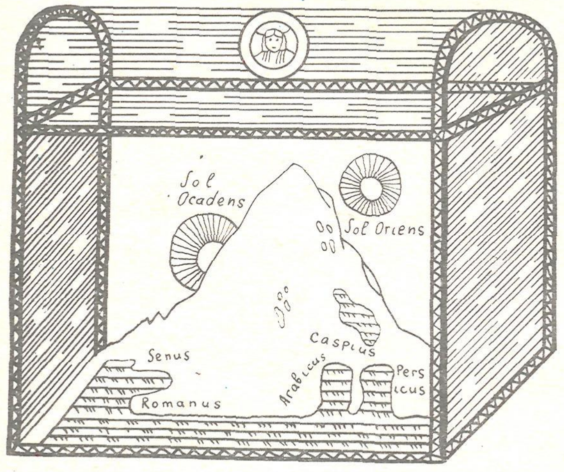








53. Геометрия Вселенной

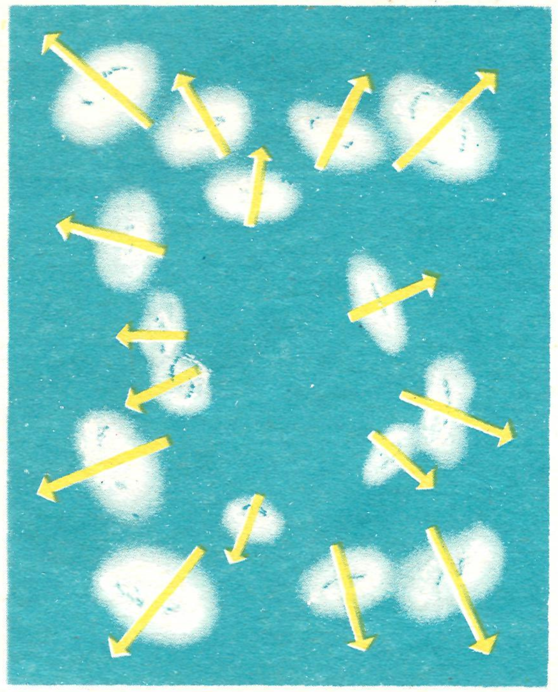


Вселенная и Земля в представлении александрийского купца, а затем монаха Космы Индикоплова (конец VI в.).

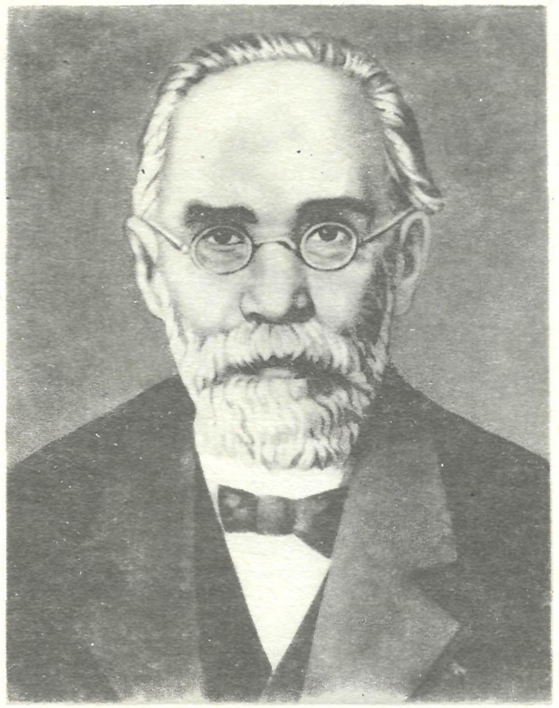
Такие представления о строении Вселенной распространялись церковниками в средние века. Рассказывали даже, что некий пилигрим достиг „конца света" и сумел заглянуть за его пределы...

Мы живем в неспокойной антикаллапсирующей Метагалактике, расширяющейся, возможно, после сверхгигантского взрыва, происшедшего около 10 миллиардов лет назад. Современные радиотелескопы проникли на расстояния до 10 миллиардов световых лет в глубины Вселенной и улавливают сигналы, затратившие миллиарды лет, чтобы достичь Земли. Они приходят от удаляющихся от нас границ расширяющейся Вселенной.

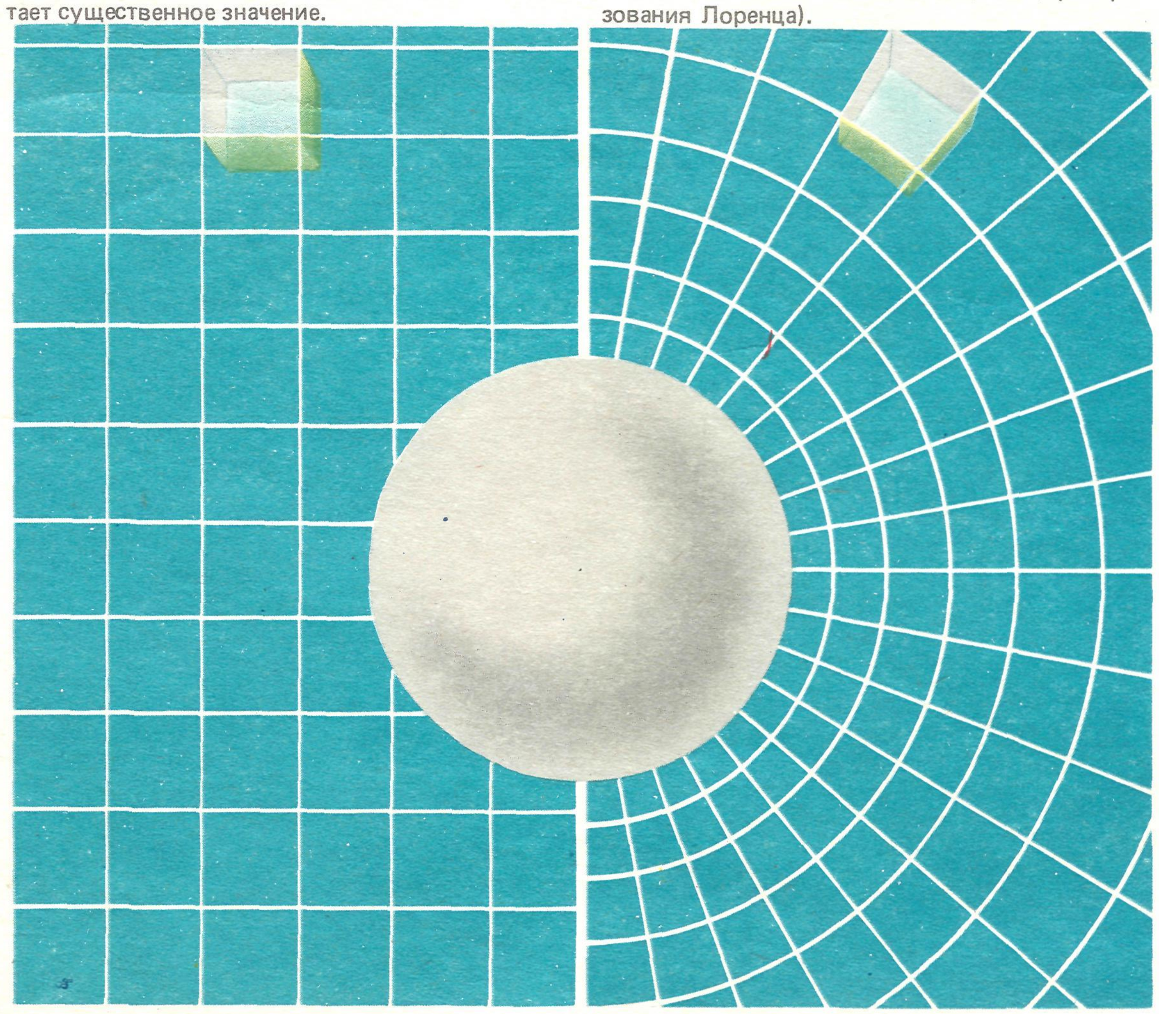
Окружающий нас мир изменяется с течением времени — эволюционирует. Из общей теории относительности вытекает возникновение сингулярностей при гравитационном коллапсе. В сингулярных точках плотность приобретает бесконечную величину и Вселенная в таком состоянии фактически становится микрообъектом. Это свидетельствует о тесной связи между мегакосмосом и микромиром потому, что массы материи (космические тела) определяют геометрию пространства, в котором они находятся. Вблизи их пространство искривляется, как бы прогибается под их тяжестью.



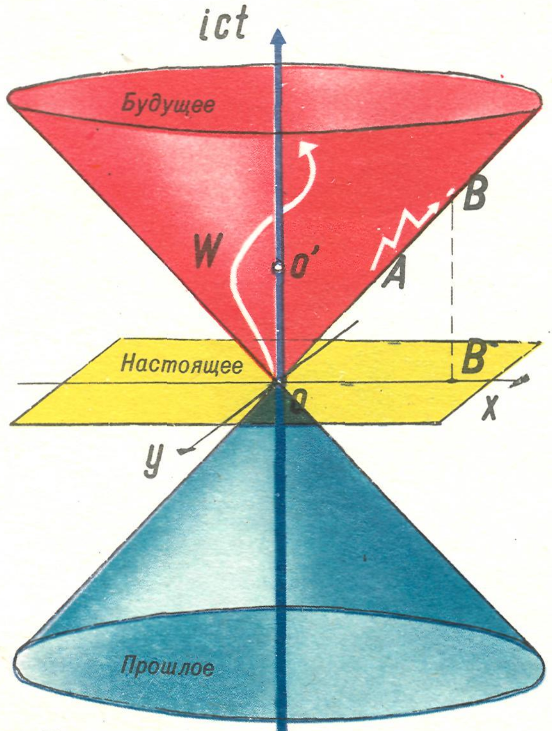
Благодаря этому лучи света распространяются не по прямым, а по изогнутым линиям. Мы этого не замечаем только потому, что имеем дело с небольшими расстояниями. Но при переходе к космическим масштабам искривленность (неевклидность) пространства приобретает существенное значение.



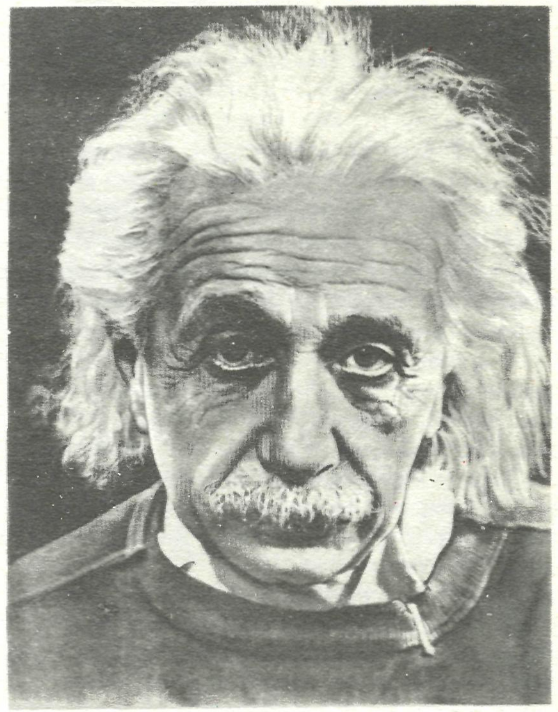
Хендрик Антон Лоренц (1853—1928) — выдающийся голландский физик-теоретик. Открыл формулы, связывающие между собой пространственные координаты и момент времени одного и того же события в двух различных инерциальных системах отсчета (преобразования Лоренца).



Анри Пуанкаре (1854—1912) — выдающийся французский физик и математик. В 1905 г. почти одновременно с А. Эйнштейном и независимо от него выдвинул основные положения теории относительности. Развил и усовершенствовал классические методы решения задач, связанных с изучением возмущенного движения, разработал вопрос о фигурах равновесия жидких масс в поле тяготения.



Пространственно-временной мир по Минковскому. Такую четырехмерную систему невозможно изобразить в виде наглядной модели, однако она очень полезна для выполнения расчетов и решения задач.



Альберт Эйнштейн. (1879—1955) — физик-теоретик, один из создателей современной физики. В 1902—1907 гг. создал специальную теорию относительности (СТО), а в 1907—1916 гг. — общую теорию относительности (ОТО). В ОТО ученый показал неразрывную связь пространства, времени и тяготения, которая определяется метрикой пространства-времени, а последняя связана с распределением масс.

Исключительно сложной является геометрия скаллапсированных звезд — „черных дыр", пространство их искривлено и замкнуто, оно может даже стягиваться в точку.

53. Геометрия Вселенной

„...Это вечное молчание бесконечных пространств ужасает меня", — писал Блез Паскаль, считая далекие миры застывшими и неизменными. В действительности же они живут своей бурной и неспокойной жизнью. Однако ритмы ее очень велики в сравнении со временем жизни не только отдельного человека, но и всего человечества. Поэтому в каждую эпоху человечество имеет возможность наблюдать лишь мгновение эволюции далеких звезд и галактик. И все же благодаря своему разуму человек постиг всю грандиозность событий, происходящих в глубинах Вселенной, раскрыл удивительные пространственные формы существования материи.

К пониманию этих закономерностей вел долгий и, может быть, самый жестокий путь борьбы за научную истину, против отживших, но защищаемых религией примитивных взглядов на Вселенную и место в ней нашей планеты.

Современная наука рассматривает единое четырехмерное пространство-время Вселенной. Она оказалась вовсе не геометрической суммой простейших частей, и ее моделью не может служить тривиальная сумма кубометров, к которой всегда можно прибавить еще один кубометр.

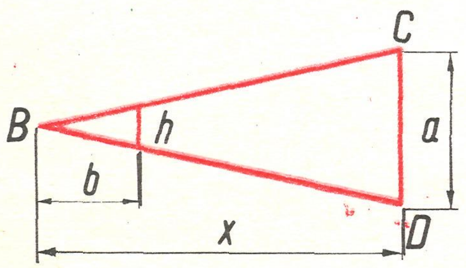
Прежде всего геометрия физического пространства оказалась неевклидовой, и кривизна ее тем больше, чем большие массы материи сконцентрированы в данной области пространства. Вычислена критическая плотность материи в пространстве $0{,}5 \cdot 10^{-29} < \rho_{кр} < 2 \cdot 10^{-29}$, г/см^3. Если средняя плотность (ρ_0) вещества во Вселенной больше $\rho_{кр}$, то кривизна может замкнуться и Вселенная окажется безграничной, но конечной. Подсчитано, что радиус замкнутой Вселенной приближенно может равняться 35 млрд. световых лет. Луч света, рванувшись по такому огромному космическому кольцу, возвратился бы в исходную точку только через 200 млрд. лет. Если же $\rho_0 < \rho_{кр}$, то Вселенная не только безгранична, но и бесконечна. По современным подсчетам $\rho_0 \approx (3 \div 5)\ 10^{-31}$, г/см^3, т. е. $\rho_0 < \rho_{кр}$. На основании этого делать окончательный вывод о том, что мы живем в открытом мире, пока что преждевременно. Есть реальное предположение, что ρ_0 — только нижний предел плотности Метагалактики, поскольку должны существовать невидимые для нас массы материи и, возможно, еще неизвестные формы ее существования.

Необычайно сложной, экзотической является геометрия пространства-времени черных дыр, порожденных катастрофическим сжатием звезд определенного класса под действием чудовищных гравитационных сил — релятивистским коллапсом.

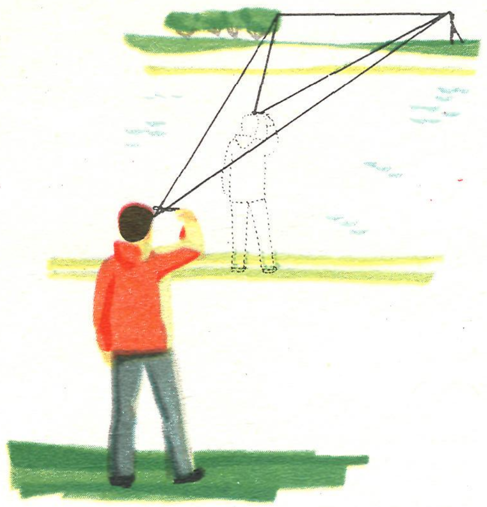
54. Простейшие измерения на местности

Определение расстояния до предмета с помощью миллиметровой линейки.

$$x=\frac{ab}{h}$$

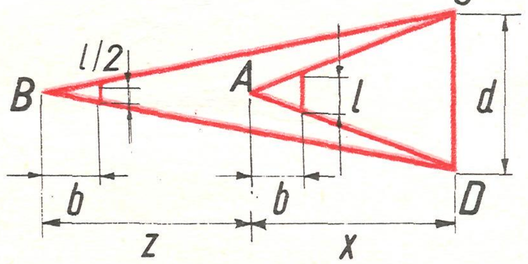


Определение ширины реки.



$$\Delta DAC:\quad \frac{d}{l}=\frac{x}{b};$$

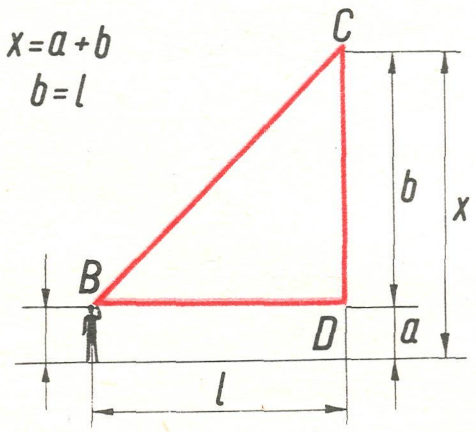
$$\Delta DBC:\quad \frac{d}{l/2}=\frac{x+z}{b}$$

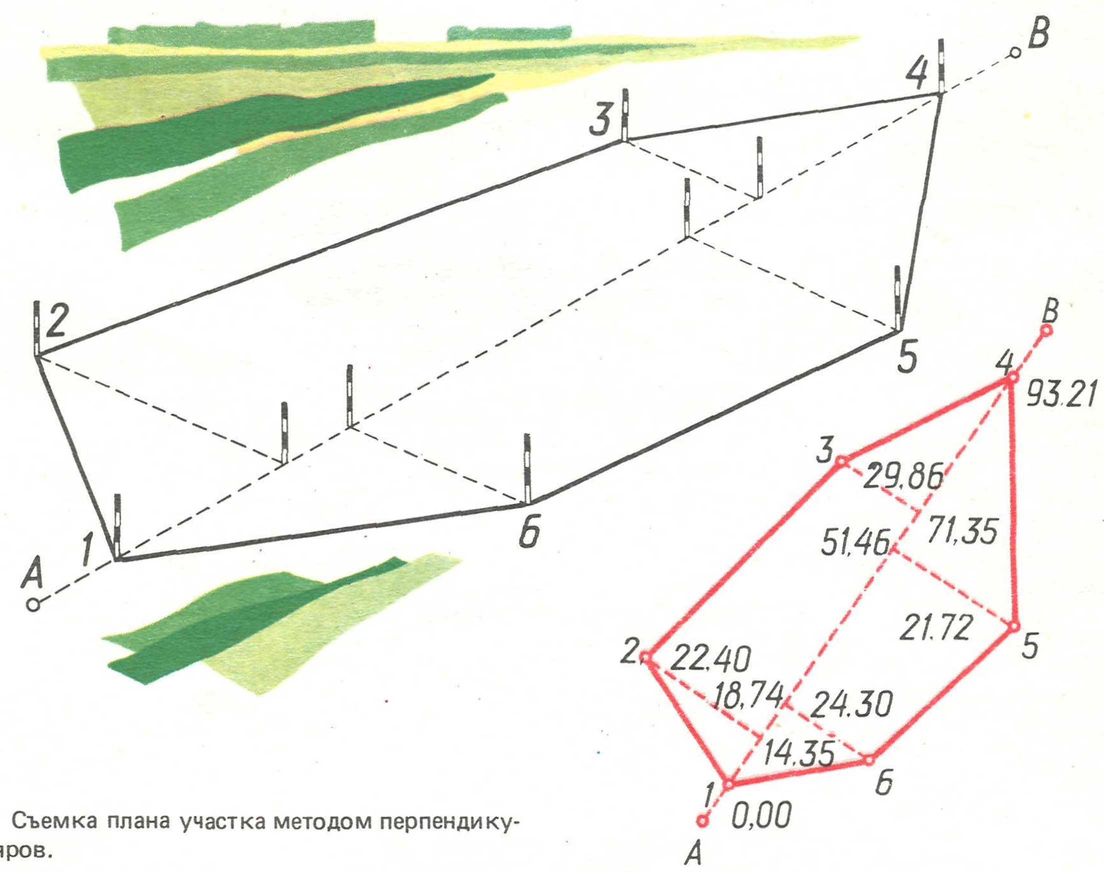


Определение высоты предмета при помощи треугольника.

$$x=a+b$$

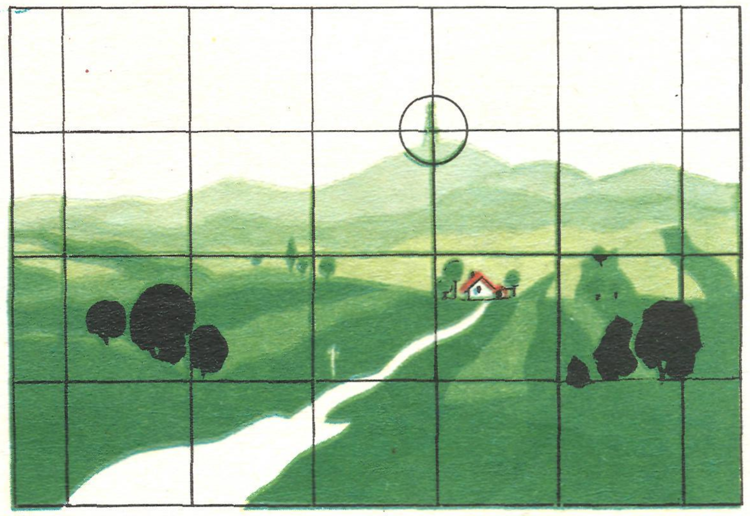
$$b=l$$





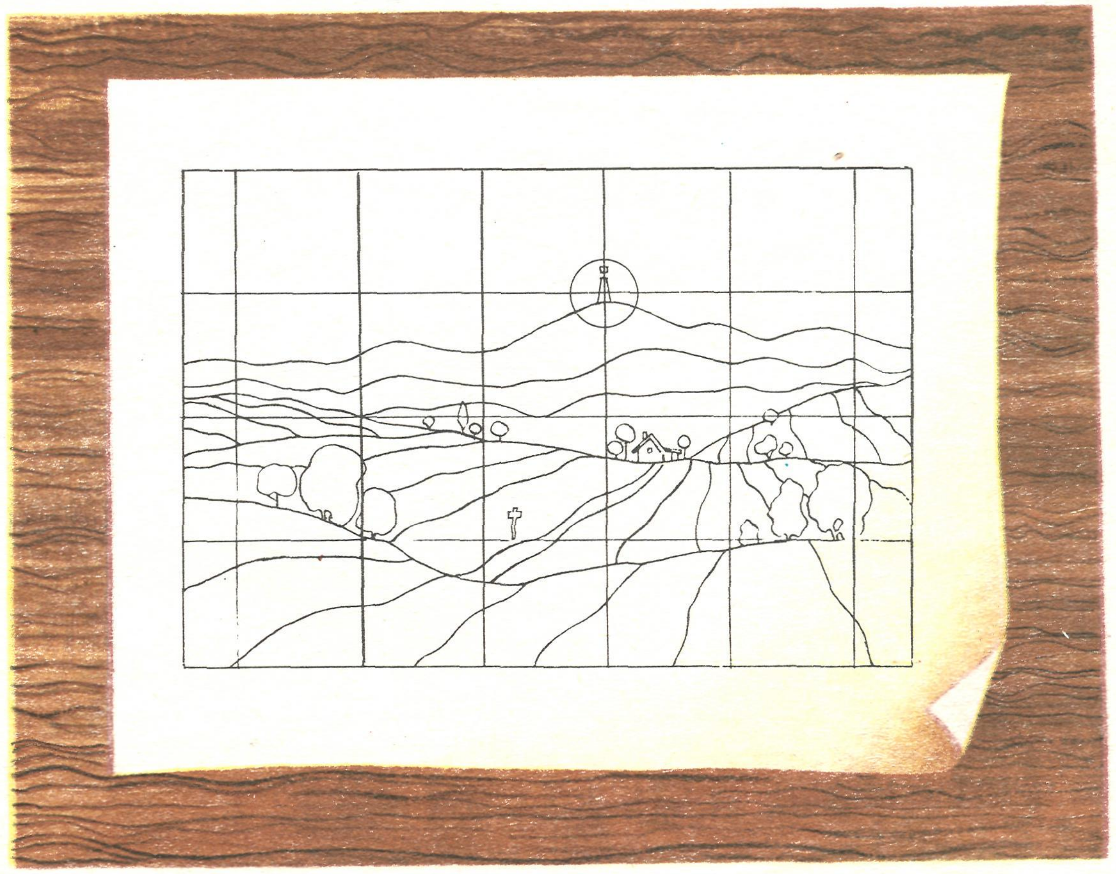
Съемка плана участка методом перпендикуляров.

Измерение расстояния до объекта при помощи пластинки Лионде.



Перспективная съемка с помощью сетки квадратов. На плотном листе бумаги вычертите сетку квадратов, такую же сетку постройте на основе, например, из неорганического стекла. При съемке местности сетка должна располагаться на одном и том же удалении от глаза.

Удаление от сетки определит масштаб съемки: чем ближе к глазу будет находиться сетка, тем мельче масштаб съемки. Перспективная съемка ведется с одной, наиболее возвышенной местности.



54. Простейшие измерения на местности

На практике нередко приходится определять расстояние к недоступным предметам, ширину реки или недоступной полосы, вычислять высоту предметов.

1. Определить расстояние до стоящего вдалеке человека можно, взяв в вытянутую руку линейку и определив n — число миллиметров, прикрытых длиной видимого силуэта человека. В результате деления 1000 на n получим искомое расстояние в метрах. Средний рост человека 1670 мм, а расстояние от линейки до глаза — 600 мм.

2. Для нахождения расстояния до движущегося пешехода необходимо вытянуть в его направлении руку с поднятым кверху большим пальцем, закрыть правый глаз (если пешеход движется справа налево). Если палец перекроет пешехода, открыть правый глаз и закрыть левый. Пешеход „передвинеться'' назад. Подсчитав, сколько шагов он сделает, пока снова не спрячется за пальцем, и умножив результат на 10, получим расстояние до пешехода в шагах.

3. Чтобы определить ширину реки, необходимо остановиться в точке A, взять в вытянутую руку травинку такой длины, чтобы она закрывала расстояние между двумя ориентирами, выбранными на противоположном берегу реки (противоположной стороне полосы). Далее необходимо сложить травинку пополам и отойти в такую точку B, чтобы расстояние между теми же ориентирами закрывалось половиной длины травинки. При этом условии ширина реки (полосы) будет равняться расстоянию между A и B.

4. Для определения высоты предмета необходимо установить веху. Измерить длину теней вехи и предмета. Далее используем следствие третьего свойства гомотетии: при гомотетии с коэффициентом k все расстояния между точками умножаются на k:

$$|x_1, y_1| = k|xy|,$$

где $x_1 = H(x), \quad y_1 = H(y)$.

5. Для измерения высоты предмета необходимо установить равнобедренный прямоугольный треугольник так, чтобы один из его катетов занял вертикальное положение, а гипотенуза совпала с направлением визирования на верхнюю точку измеряемого предмета. Высота предмета будет равна сумме расстояний от глаз до предмета и до земли.

55. К тайнам простых чисел

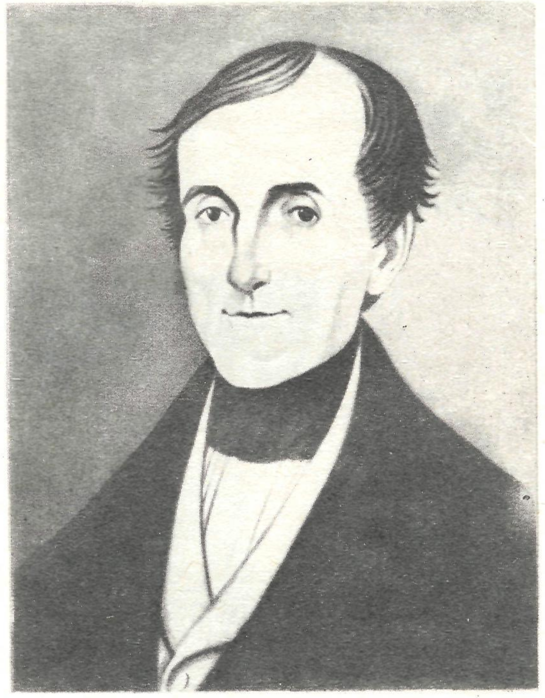
Якуб Филипп Кулик (1793—1863) — чешский математик, профессор Пражского университета, исключительно трудолюбивый и самоотверженный вычислитель. Создал гигантский „Великий канон делителей всех чисел, не делящихся на 2, 3 и 5 и содержащихся между ними простых чисел до 100 330 201".

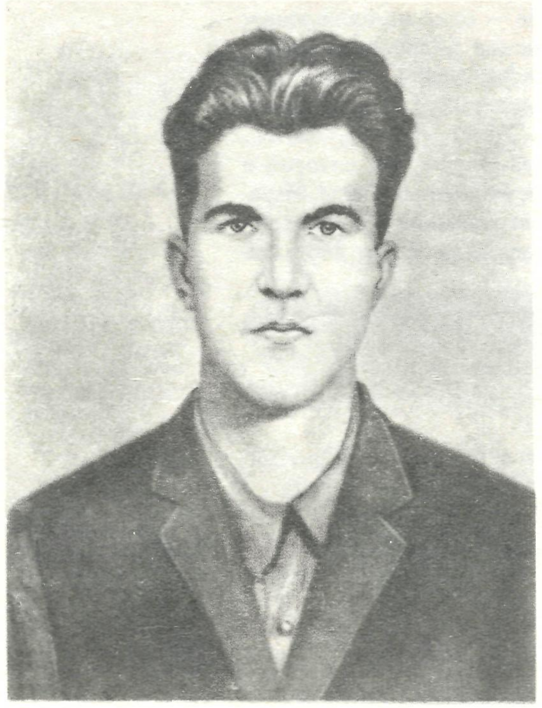
Вацлав Серпиньский (1882—1969) — известный польский математик, автор многочисленных исследований по теории простых чисел.

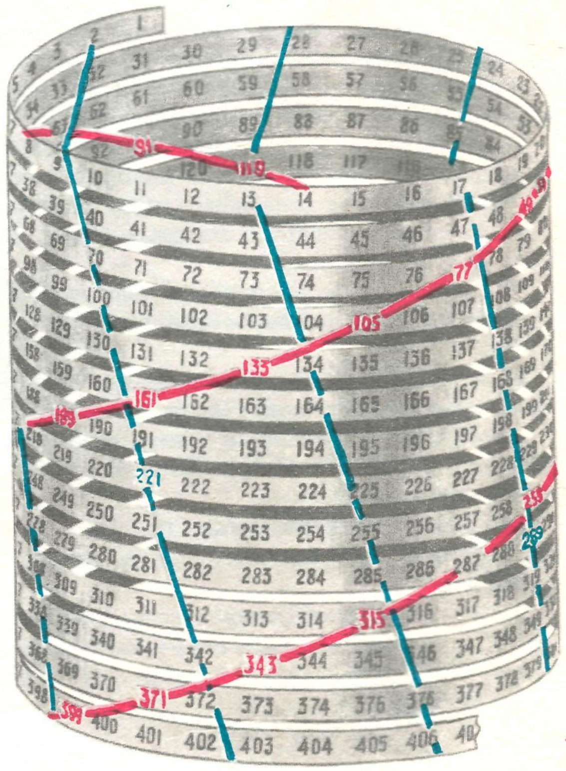
Ученые проводят самые неожиданные эксперименты с рядом натуральных чисел, чтобы, возможно, случайно выявить пока неуловимые закономерности размещения простых чисел в этом ряду.

Например, американский математик Станислав Улам (род. в 1909 г.) „завертел" последовательность натуральных чисел в гигантскую спираль, но в результате количество новых вопросов значительно превзошло количество найденных ответов.

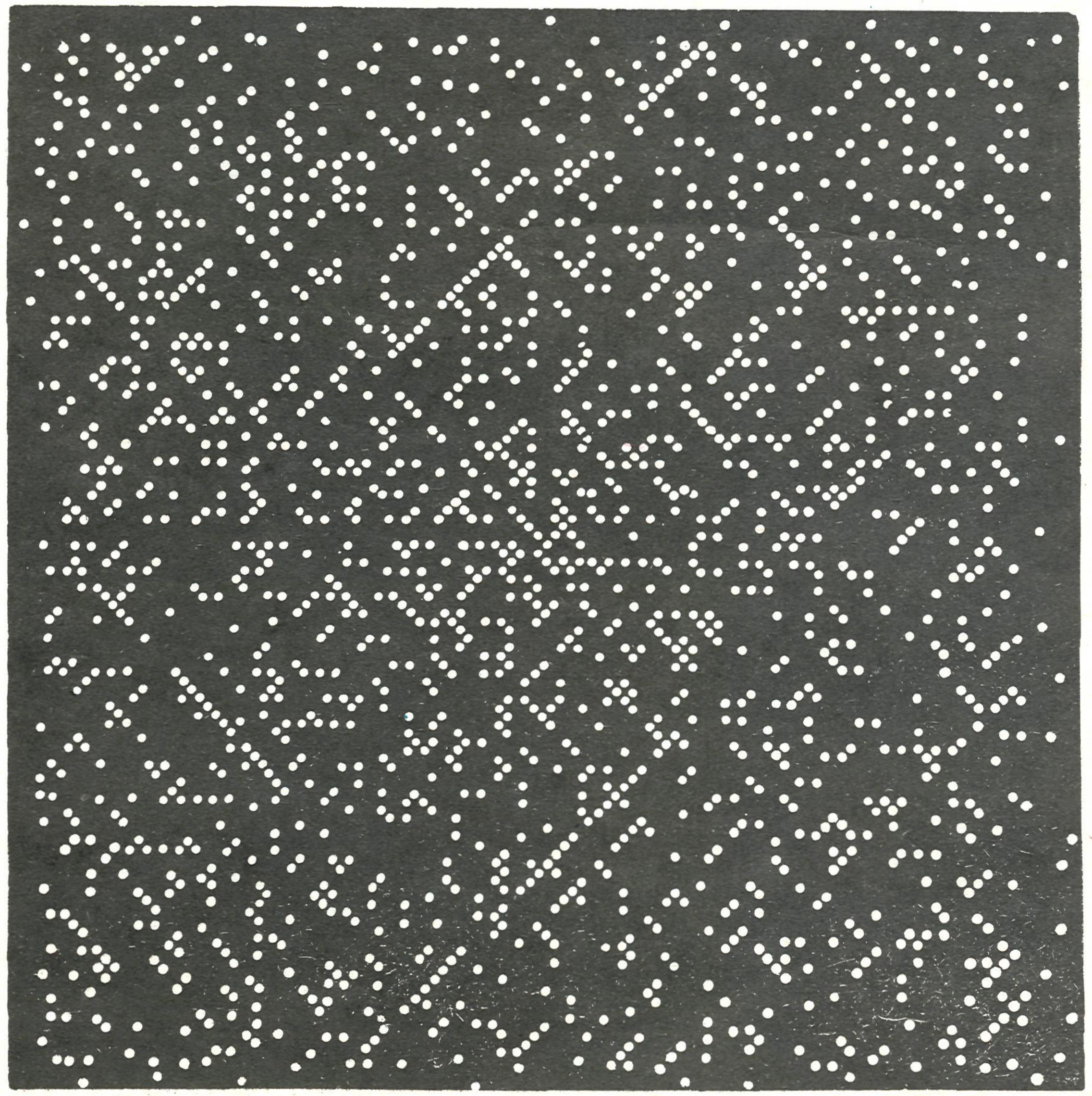
На этом рисунке показан результат образования с помощью ЭВМ спирали, состоящей из 65 млн. простых чисел, отмеченных светлыми точками.







400	399	398	397	396	395	394	393	392	391	390	389	388	387	386	385	384	383	382	381
325	324	323	322	321	320	319	318	317	316	315	314	313	312	311	310	309	308	307	380
326	257	256	255	254	253	252	251	250	249	248	247	246	245	244	243	242	241	306	379
327	258	197	196	195	194	193	192	191	190	189	188	187	186	185	184	183	240	305	378
328	259	198	145	144	143	142	141	140	139	138	137	136	135	134	133	182	239	304	377
329	260	199	146	101	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91	132	181	238	303	376
330	261	200	147	102	65	64	63	62	61	60	59	58	57	90	131	180	237	302	375
331	262	201	148	103	66	37	36	35	34	33	32	31	56	89	130	179	236	301	374
332	263	202	149	104	67	38	17	16	15	14	13	30	55	88	129	178	235	300	373
333	264	203	150	105	68	39	18	5	4	3	12	29	54	87	128	177	234	299	372
334	265	204	151	106	69	40	19	6	1	2	11	28	53	86	127	176	233	298	371
335	266	205	152	107	70	41	20	7	8	9	10	27	52	85	126	175	232	297	370
336	267	206	153	108	71	42	21	22	23	24	25	26	51	84	125	174	231	296	369
337	268	207	154	109	72	43	44	45	46	47	48	49	50	83	124	173	230	295	368
338	269	208	155	110	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	123	172	229	294	367
339	270	209	156	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	171	228	293	366
340	271	210	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	227	292	365
341	272	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	291	364
342	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	363
343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362



Спирали, закрученные вокруг некоторых простых чисел. По диагонали расположены простые числа, описываемые квадратными трехчленами (генераторами простых чисел): x^2+x+17 и x^2+x+41.

Советский писатель П. Орешкин догадался закрутить натуральный ряд в пространственную спираль. И тогда нечто прояснилось...

Юрий Владимирович Матиясевич (род. в 1947 г.) с 6-го класса принимал участие в математических олимпиадах — от городских до международной. Закончил Ленинградский университет. В 1970 г. решил 10-ю проблему Гильберта. Из найденного им решения следует, что можно указать конкретный многочлен пятой степени, множество положительных значений которого совпадает с множеством всех простых чисел.

				53
	45	44	43	
	46	41	42	
	47	48	49	
61				

55. К тайнам простых чисел

История проблемы распределения простых чисел — одна из волнующих страниц истории математики. От шумеро-вавилонских и древнегреческих математиков до наших современников многие тысячи ученых отдали дань решению удивительно интересных, но исключительно сложных задач, притаившихся в числовой последовательности: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

Простые числа — это своеобразная числовая праматерия, из которой с помощью операции умножения конструируются все составные числа. Нерегулярный характер следования простых чисел в натуральном ряду порождает все новые теоретико-числовые задачи. Центральными стали две задачи теории простых чисел:

1) построение такой функции целочисленного аргумента (аргументов), которая при всех значениях переменной давала бы все простые числа, и только их;

2) нахождение формулы, с помощью которой можно было бы вычислить количество простых чисел $\pi(n)$ на промежутке $[1; n]$.

Много усилий приложили ученые разных эпох, чтобы найти упомянутую формулу. Сложность построения функции $y = \pi(x)$ обусловлена именно ее нерегулярностью.

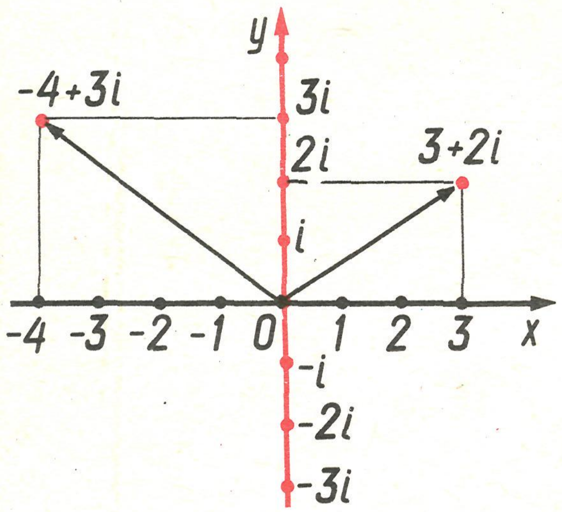
Обе эти задачи окончательно пока не решены. Очевидно, это подразумевал советский поэт Валерий Брюсов, когда писал в стихотворении „Загадка сфинкса'':

> Но пред Эдипом загадка Сфинкса,
> Простые числа все не разгаданы.

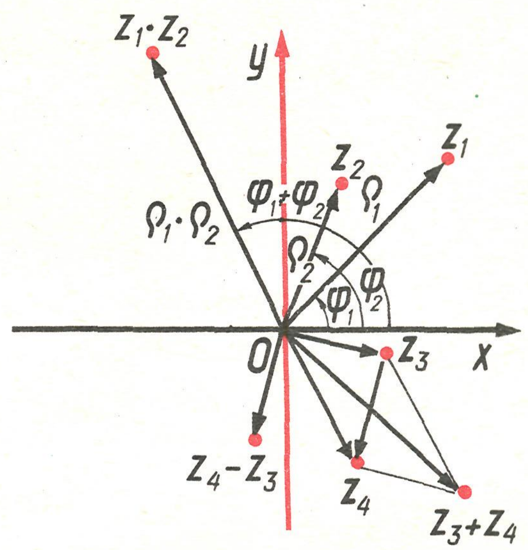
(Брюсов В. Собр. соч.: В 7 т. — М.: Худож. лит., 1974. — Т. 3. — С. 153).

56. Реальная польза комплексных чисел

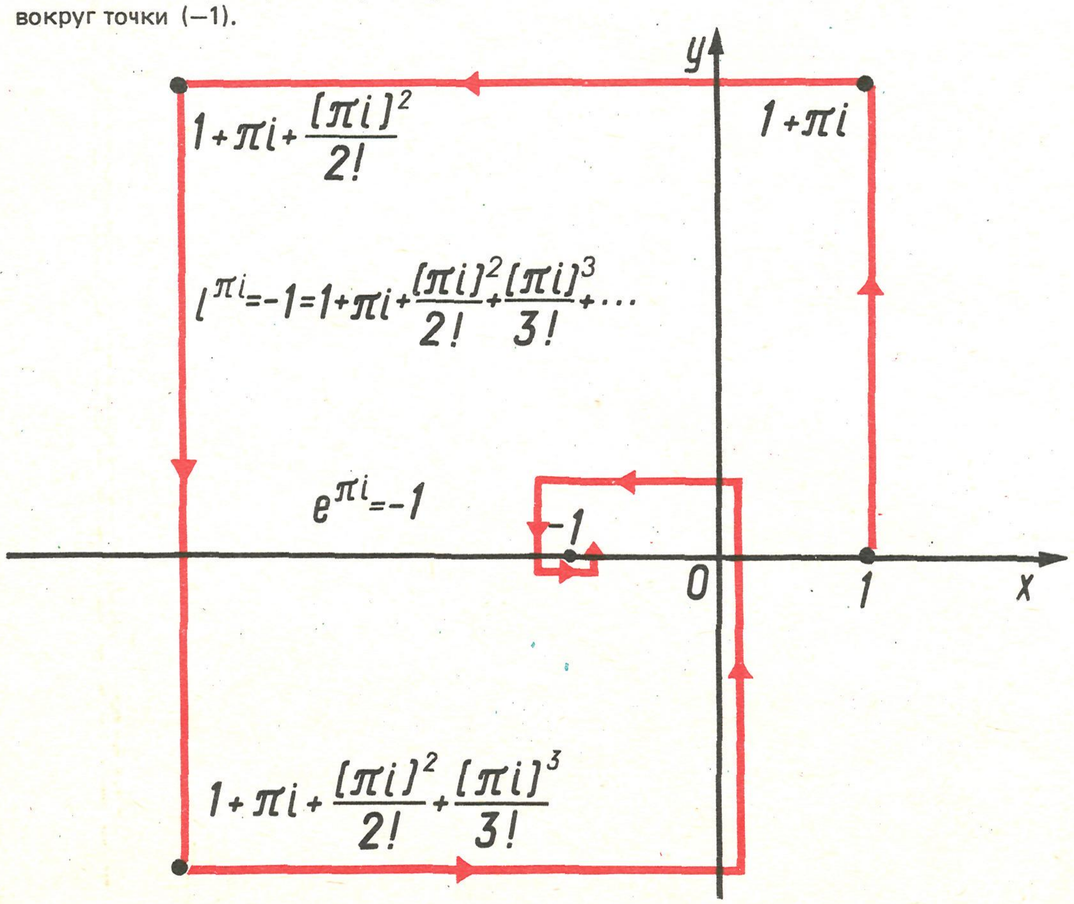
Комплексные числа получили признание, когда была найдена их геометрическая интерпретация как точек или векторов на числовой плоскости.

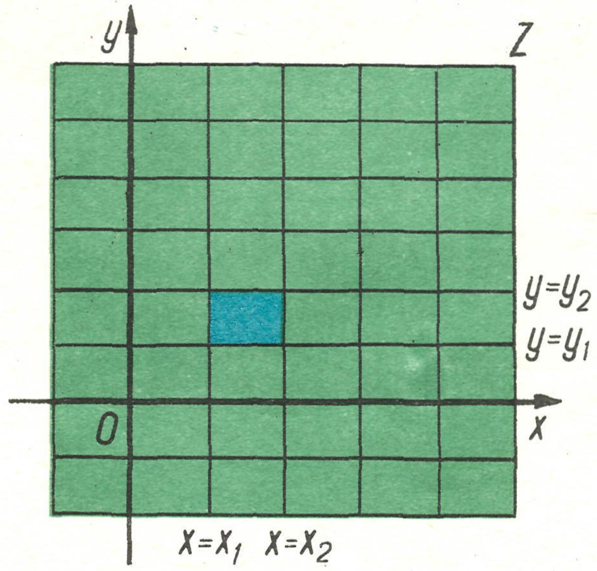


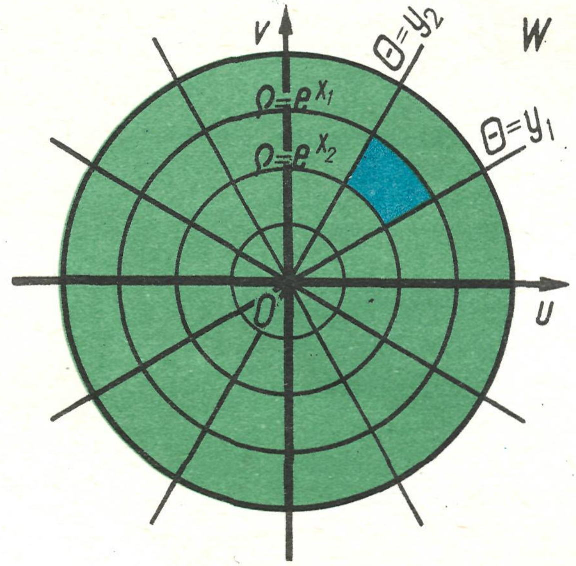
Геометрическая интерпретация операций над комплексными числами.

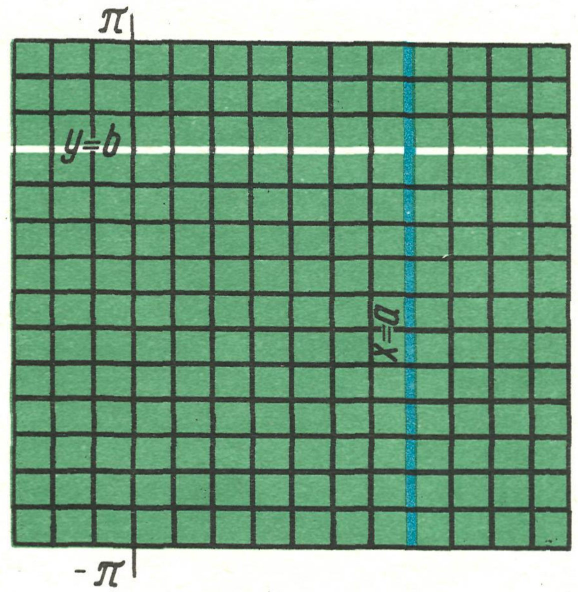


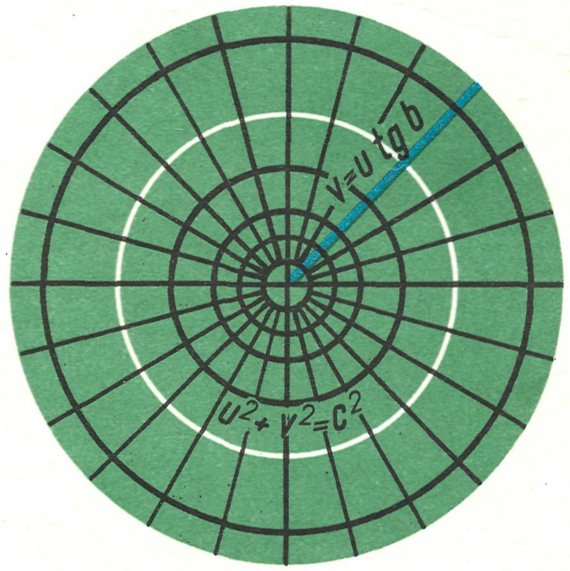
Графическое представление знаменитой формулы Эйлера, связывающей три известных числа e, π, i. Числа $e^{\pi i}$ и (-1) можно представить бесконечной суммой векторов. Бесконечная спираль, являющаяся наглядным представлением этого суммирования, заворачивается вокруг точки (-1).

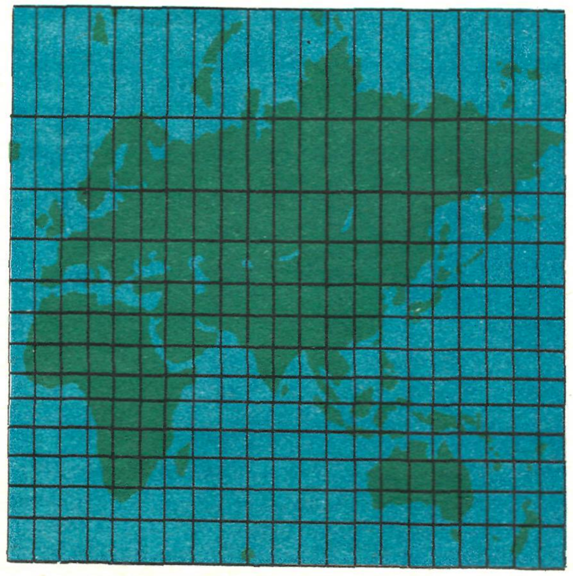


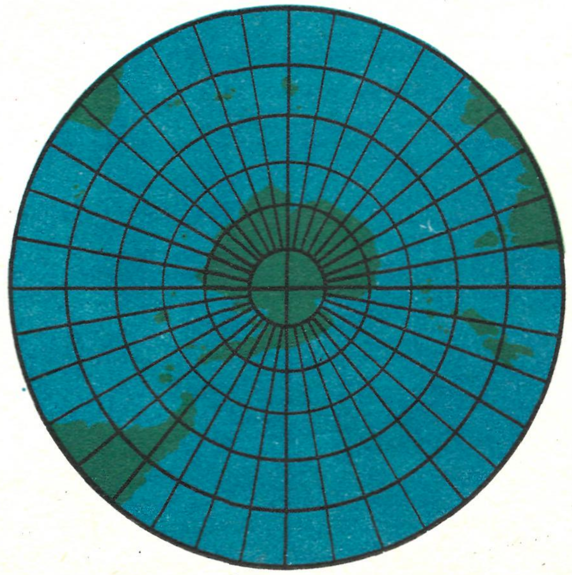






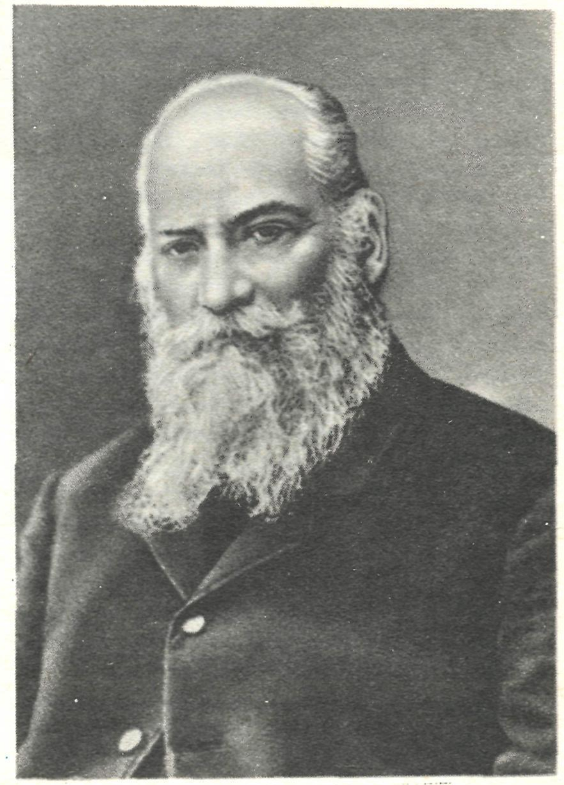






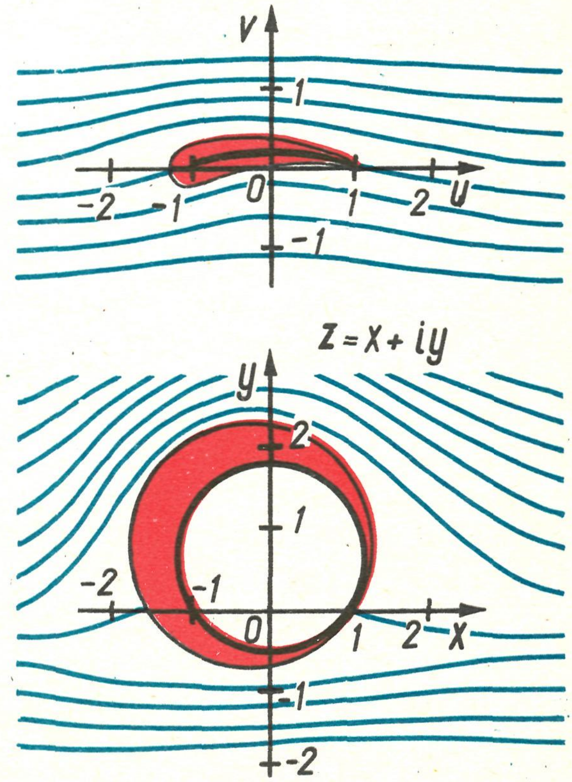
Применение комплексных чисел в картографии.

Функция Жуковского от комплексной переменной преобразовывает фигуру профиля, т. е. перпендикулярного сечения крыла самолета, в фигуру, ограниченную двумя окружностями.



Николай Егорович Жуковский (1847—1921) — выдающийся русский ученый, по высказыванию В. И. Ленина, „отец русской авиации". Широко использовал комплексные числа для расчетов конструкций, прежде всего — крыльев самолета.

$$W=u+iv=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$



56. Реальная польза комплексных чисел

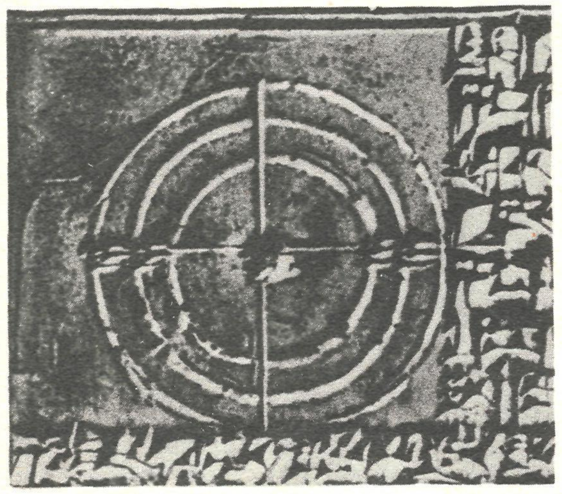
Впервые мнимые числа появились в труде Дж. Кардано „Великое искусство'', опубликованном в 1545 г. Они еще не были результатом выполнения каких-либо операций, а являлись всего лишь промежуточным „продуктом'' в вычислениях действительных корней алгебраических уравнений. Кардано назвал их „софистическими''. Отказываться от них было невозможно, так как их полезность в математике не вызывала сомнений, признать же их было очень трудно, поскольку их истинный смысл оставался неизвестным, а свойства выглядели парадоксальными. Однако абстракция комплексного числа оказалась необычайно продуктивной.

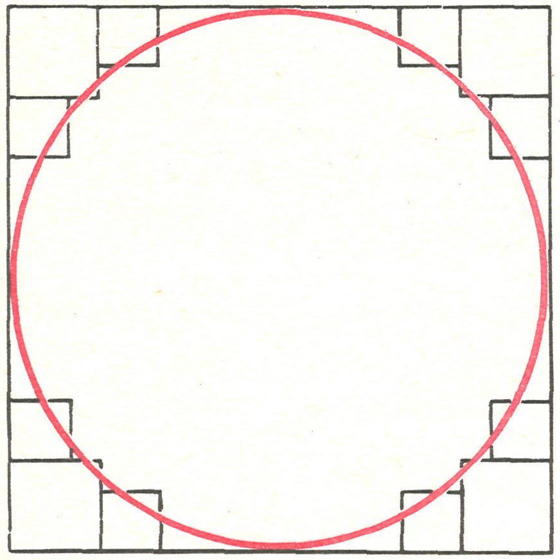
Известный советский математик Ю. И. Манин пишет: „В шестидесятых годах ... было сказано, что крупнейшее открытие последних лет в физике — комплексные числа'' (Манин Ю. И. Математика и физика. — М.: Знание, 1979. — С. 4). Действительно, комплексные числа оказались исключительно гибким и мощным математическим аппаратом для моделирования многих сложных физических, химических, биологических и других процессов. Например, решением основного уравнения квантовой механики — уравнения Шредингера, которое описывает поведение (состояние) элементарных частиц, есть функция комплексной переменной. Эта функция так связана с наблюдаемой частицей, что произведение этой функции и сопряженной с ней функции дает плотность вероятности пребывания частицы в данном месте пространства в данный момент времени.

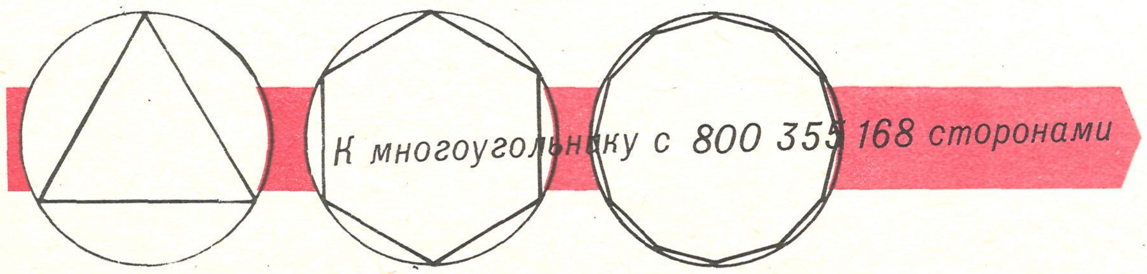
Именно функции комплексных переменных помогли советским математикам решить сложные задачи, связанные с проектированием и эксплуатацией мощных гидроэлектростанций, осуществить космические старты, овладеть тайнами атомной энергии и т. п.

57. Трансцендентное число π

В книге „Кошмары выдающихся личностей" известный английский математик и философ Бертран Рассел писал: „Лицо Пи было скрыто маской. Все понимали, что сорвать ее, оставшись при этом в живых, не сможет никто. Сквозь прорези маски пронзительно, безжалостно, холодно и загадочно смотрели глаза". Может быть, для описания математического понятия излишне патетично, однако в общем верно. Действительно, история числа π — это волнующие страницы многовековой победной поступи математической мысли, неутомимого труда открывателей истины. Были на этом пути триумфы побед, были горькие поражения, драматические коллизии и комические недоразумения. Ученые проделали гигантскую работу поиска, раскрывая арифметическую природу одного из самых неподдающихся, загадочных и популярных чисел — числа, обозначаемого греческой буквой π.







Шумеро-вавилонские математики вычисляли длину окружности и площадь круга с приближениями, которым соответствует значение $\pi = 3$, знали они и более точное приближение

$$\pi = 3\frac{1}{8}.$$

В папирусе Райнда (Ахмеса) указывается, что площадь круга равна

$$\left(\frac{8}{9}\cdot 2R\right)^2 = \frac{256}{81}R^2.$$

Это означает, что $\pi \approx 3{,}1605\ldots$.

Архимед первым поставил задачу вычисления длины окружности и площади круга на научную основу:

$$a_6 = 1;\ a_{12} = \sqrt{2-\sqrt{3}};\ a_{24} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}};\ \ldots$$

$$a_{96} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} \approx 0{,}06544.$$

Итак, $\pi r = \pi > 48\, a_{96} \approx 3{,}1410 > 3\frac{10}{71}$.

Ученый вычислил и верхний предел $\left(3\frac{1}{7}\right)$:

$$3\frac{10}{71} \approx 3{,}14084\ldots < \pi < 3\frac{1}{7} \approx 3{,}14285.$$

Узбекский математик и астроном аль-Каши, работавший в научном центре известного математика и астронома Улугбека, вычислил число 2π с точностью до 16 правильных десятичных знаков:

$$2\pi = 6{,}283\ 185\ 307\ 179\ 5866.$$

С помощью удвоения числа сторон правильных, вписанных в окружность многоугольников он получил многоугольник с 800 355 168 сторонами.

Голландский математик Лудольф ван Цейлен (1540—1610) вычислил 35 десятичных знаков π и завещал высечь это значение на своем могильном памятнике.

Иоганн Генрих Ламберт (1728—1777) — немецкий математик, физик, астроном и философ. Сделал решающий шаг к разгадке тайны числа π. В 1766 г. он доказал иррациональность числа π. Итог раскрытию тайны числа π подвел немецкий математик Фердинанд Линдеман (1852—1939). В 1882 г. он доказал, что число π является трансцендентным. Тем самым была доказана невозможность квадратуры круга в классической постановке этой задачи.

Некоторые замечательные формулы для вычисления числа π:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}\ldots;$$

(Ф. Виет)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\ldots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\ldots};$$

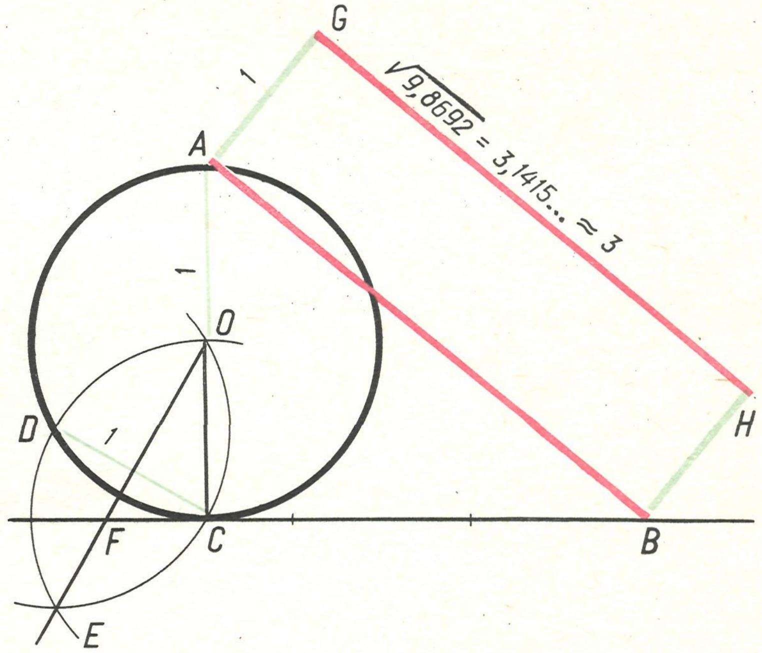
(Дж. Валлис)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots;$$

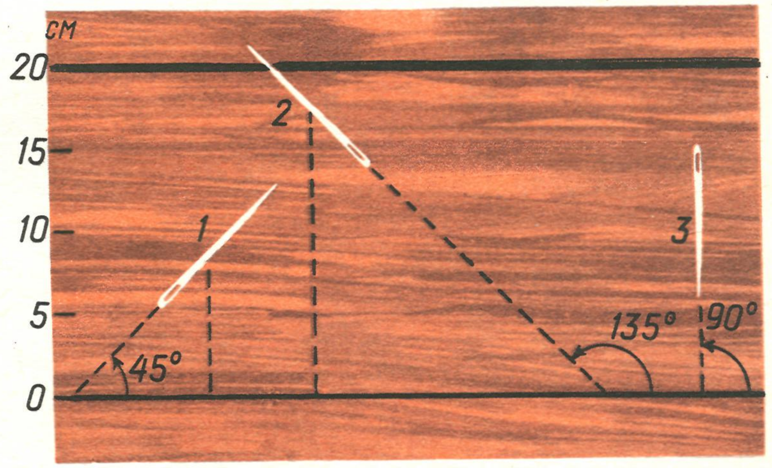
(Г. В. Лейбниц)

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots.$$

(Л. Эйлер)



Одна из красивейших квадратур круга, выполненная польским математиком А. А. Коханьским (1631—1700). Все построения выполняются при одном и том же растворе циркуля и быстро приводят к достаточно хорошему приближению числа π.



Случайные события: они реализовались с помощью бросания иголки и также помогали ученым вычислить число π с достаточно высокой точностью. Эту задачу впервые поставил и решил французский естествоиспытатель Жорж Луи Леклерк Бюффон (1707—1788). Таким самым способом швейцарский астроном и математик Рудольф Вольф (1816—1896) в результате 5 тыс. бросаний иголки нашел, что $\pi = 3{,}1596$. Другие ученые получили следующие результаты: при 3204 бросаниях $\pi = 3{,}1533$; при 3408 бросаниях $\pi = 3{,}141593$.

57. Трансцендентное число π

Природа числа π — одна из самых больших загадок математики. Интуиция подсказывала, что длина окружности и ее диаметр — величины в равной степени постижимые. Практика же показала, что это не так. Десять знаков после запятой в числе π обеспечивают вычисление длины земного экватора с точностью до 2,5 см, а 30 знаков этого числа (π = 3,141592 653 589 793 238 462 643 383 279) было бы достаточно для определения окружности всей видимой Вселенной с линейной погрешностью, которую не удается рассмотреть с помощью мощнейшего современного микроскопа.

Вычислением сотен десятичных знаков π на протяжении двух последних веков занимались многие ученые. Сначала стремились уловить какую-либо закономерность чередования цифр в дробной части π и, возможно, доказать конечность цепочки составляющих его цифр. Если бы это удалось, знания человечества об основных постоянных существенно пополнились бы. Ученые стремились открыть хотя бы какую-то регулярность, периодичность в чередовании значащих цифр числа π. Это также раскрыло бы одну из его тайн.

Уже Архимед установил, что $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, или $3{,}140 < \pi < 3{,}142$.

Индийский математик Ариабхата определил, что $\pi \approx 3{,}1416$. Новую страницу в истории числа π открыл немецкий математик и астроном И.-Г. Ламберт.

И все же „погоня" за десятичными знаками числа π не прекращалась. Были найдены формулы, позволяющие с произвольной точностью вычислить значения этой трансцендентной знаменитости. Некоторые из них были необычайно просты, но медленно сходились к π. Например, рассмотрим ряд Лейбница: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \ldots$. Чтобы вычислить 100000 десятичных знаков π, необходимо рассмотреть сумму $10^{100\,000}$ членов!

Сумма первых 98 членов ряда Лейбница равна 3,1313888; 99 — 3,1516934; 100 — 3,1315929. Среднее арифметическое 98 и 99 членов равно 3,1415411.

Английский математик Уильям Шенкс (1812—1882) потратил 20 лет на вычисление 707 десятичных знаков π, однако он ошибся уже на 520, и, начиная с этого знака, вычисления его были неправильными.

Букву π для обозначения отношения длины окружности к ее диаметру впервые ввел в 1706 г. английский преподаватель математики Уильям Джонс. Это обозначение стало распространенным благодаря трудам Л. Эйлера (1707 — 1783), который также стал использовать его, вероятно, независимо от Джонса, поскольку π — первая буква греческого слова *περιφερια* (означает окружность).

В наш век электронно-вычислительной техники ряд десятичных знаков числа π быстро увеличивается: в 1961 г. ЭВМ вычислила 100 000 знаков, в 1965 — 250 000, в 1967 — 500 000 и в 1986 — 29 360 128 десятичных знаков.

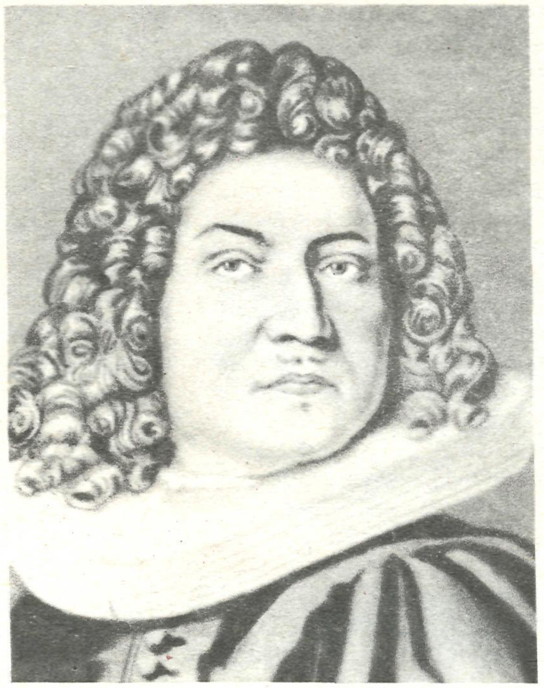
58. Мир укрощенных случайностей

Одним из выдающихся достижений математического *познания явлений* окружающей действительности было открытие закономерностей массовых случайных событий. Мысль о *возможности количественной* оценки случайных событий прошла длительный путь, прежде чем оформилась в исключительно важную область математики и стала эффективным орудием в практической деятельности человека.

Считают, что теория вероятностей зародилась в переписке двух выдающихся французских ученых Б. Паскаля и П. Ферма. Они впервые правильно решили задачи о разделе ставки в азартной игре. При этом использовали в зачаточной форме понятие математического ожидания и несовершенные формы теорем сложения и умножения вероятностей.

Идеи и методы теории вероятностей разрабатывали и усовершенствовали многие ученые: Абрахам де Муавр (1667–1754), Л. Эйлер (1707–1783), Ж. Бюффон (1707–1788), П. Лаплас (1749–1827), Э. Борель (1871–1956). Большой вклад в развитие науки о случайном сделали отечественные математики: Н. И. Лобачевский (1792 —1856), М. В. Остроградский *(1801–1862), В. Я. Буняковский (1804–1889)*, П. Л. Чебышев (1821–1894), А. А. Марков (1856–1922). Советские математики С. Н. Бернштейн (1880–1969), А. Я. Хинчин (1894–1959), А. Н. Колмогоров (1903–1987), Б. В. Гнеденко (род. в 1912 г.) и многие другие приумножили знания об исключительно важных для познания окружающего мира закономерностях случайных событий.

Выдающийся голландский математик, механик, астроном и изобретатель Христиан Гюйгенс (1629–1695). Под влиянием переписки Б. Паскаля и П. Ферма заинтересовался задачами вероятностного характера, результатом чего явилась работа „О расчетах в азартных играх''. Трактат Х. Гюйгенса выдержал несколько изданий и был единственной книгой по теории вероятностей в XVII в. Имена П. Ферма, Б. Паскаля и Х. Гюйгенса стоят у истоков этой математической теории.

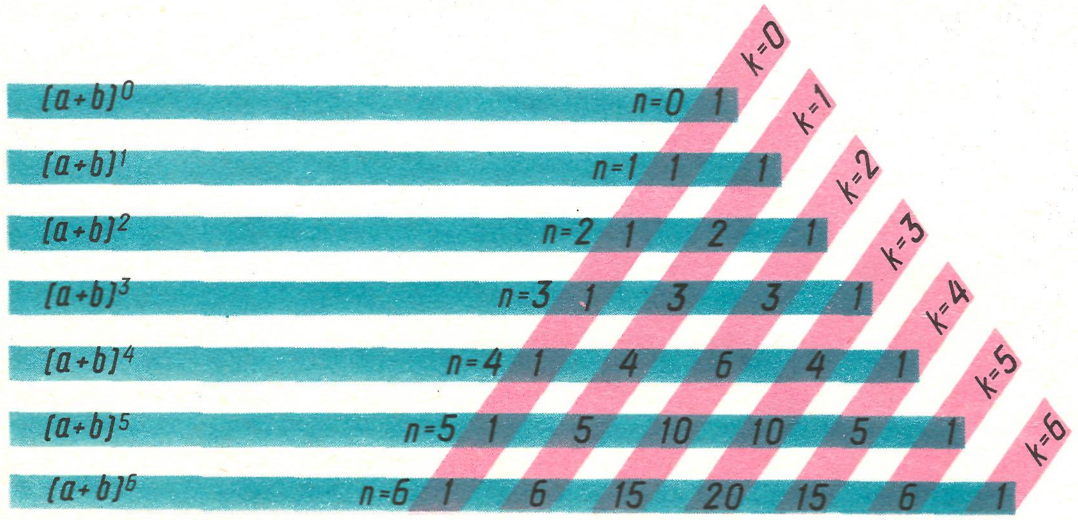


Но собственно история теории вероятностей начинается с работы выдающегося швейцарского математика Якоба I Бернулли (1654–1705) „Искусство предположения''. В этом трактате уже введено и широко используется понятие вероятности случайного события, доказаны некоторые теоремы, в том числе и простейший случай закона больших чисел — фундаментальной теоремы, которая имеет исключительно важное значение в познании закономерностей реальной действительности.

Известный советский математик и историк математики, академик АН УССР Борис Владимирович Гнеденко (род. в 1912 г.) наряду с известными советскими математиками А. Н. Колмогоровым, А. Я. Хинчиным, С. Н. Бернштейном внес большой вклад в разработку теоретических основ и практических применений теории вероятностей, математической статистики и теории массового обслуживания. Большое значение в истории науки имеют его исследования по истории и философским вопросам математики.

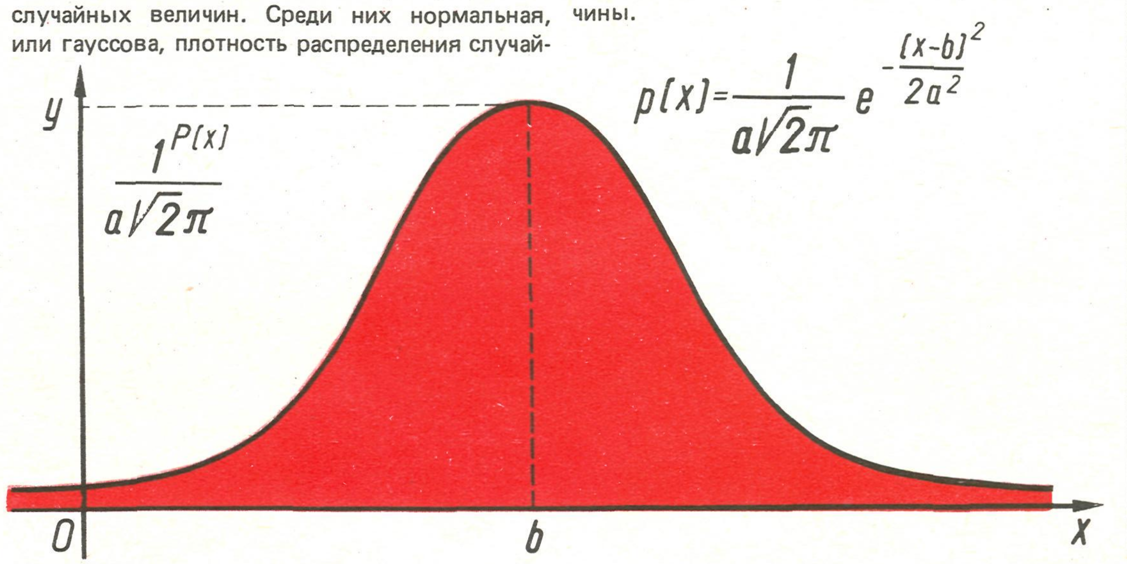
Б. Паскаль одновременно с разработкой теоретико-вероятностных проблем, составивших содержание переписки с П. Ферма, работал над „Трактатом об арифметическом треугольнике'', который стал заметным вкладом в прогресс комбинаторики.

Интересна приведенная в трактате Б. Паскаля бесконечная числовая таблица — арифметический треугольник Паскаля. Таблица содержит много разнообразных красивых числовых зависимостей, широко применяется при решении комбинаторных и теоретико-вероятностных задач.



Решения задач вероятностного характера показали, что даже в простейших ситуациях одного понятия вероятности недостаточно, поскольку в таких задачах неизбежно встречались не только случайные события, но и случайные величины. Изучение случайных величин и функций их распределения привело к формированию нескольких типов распределения случайных величин. Среди них нормальная, или гауссова, плотность распределения случайной величины моделирует частоту многочисленных случайных величин в окружающих нас явлениях.

В начале XIX в. ученые обнаружили, что нормальному закону распределения плотности вероятностей подчинены случайные погрешности измерений, причем *a* указывает точность измерений, а *b* — значение измеряемой величины.



Законы теории вероятностей применялись также для расчета безопасности космонавтов в открытом космическом пространстве.

58. Мир укрощенных случайностей

Уже с глубокой древности человек заметил, как сильно зависит он от случайных событий, буквально осаждающих его со всех сторон. От них зависела удача на охоте, хорошая погода, урожай, благосостояние в семье, племени и т. д. Вначале за всякой случайностью люди видели какую-то скрытую, невыясненную закономерность. Позднее стало ясно, что случайность — это вовсе не непредсказуемость. Случайные события происходят не хаотично, за ними просматриваются определенные устойчивые свойства явлений.

Живя в вероятностном мире, человек с неизбежностью должен был выработать способы борьбы с нежелательными последствиями случайных событий, учился приручать случай, использовать его в своих целях. Выдающийся чешский педагог Ян Амос Коменский (1592—1670) писал: „Искусство выковывать счастье состоит в таком восприятии всего, что происходит в нашей жизни, при котором не мы подчиняемся случаю, а он нам". Эту же мысль несколько иначе высказал выдающийся французский писатель А. Франс: „Надо учитывать в жизни роль случая. В конечном счете случай — это бог" (Франс А. Собр. соч.: В 8 т. — М.: Гослитиздат, 1958. — Т. 3. — С. 297).

Первыми были построены математические модели детерминированных явлений, так как они отличались малым числом легко наблюдаемых величин. Вероятностные (стохастические) же модели, как правило, характеризуются многими причинами, о которых к тому же часто отсутствует какая-либо информация. И все же, обобщая огромный опыт практической деятельности человека, ученые реализовали идею утилитаризации случая, воплотив ее в построенных вероятностных моделях количественных закономерностей массовых случайных событий.

Раздел математики, изучающий закономерности массовых случайных событий (теория вероятностей), зародился в средине XVII в. на основе задач демографии, страхования, учета и прогнозирования результатов хозяйственной деятельности человека.

Французские математики П. Ферма и Б. Паскаль первыми поняли, что азартные игры являются простейшими и удобнейшими объектами для построения стохастических моделей многих явлений реальной действительности. Переписка великих ученых по поводу решения теоретико-вероятностных и комбинаторных задач сыграла важную роль в формировании первых понятий теории вероятностей.

За три столетия своего развития теория вероятностей прошла сложный путь от поиска алгоритмов решения элементарных задач игрового характера до создания сложных математических моделей явлений природы, которые описываются случайными функциями одной или нескольких переменных. В первом случае говорят о случайном процессе, во втором — о случайном поле. Именно случайные процессы и поля являются центральными объектами в современной теории вероятностей.

Советский философ Ю. В. Сачков писал о понятии вероятности, связанном с рассмотрением случайного события: „Само понятие вероятности можно, не боясь преувеличений, назвать знаменем теоретического естествознания XX в., по крайней мере, — первой его половины". (Сачков Ю. В. Введение в вероятностный мир. — М.: Наука, 1971. — С. 9).

Данные археологии доказывают, что уже человек позднекаменного века (позднего палеолита) не только овладел искусством счета, но и выделил среди доступных ему натуральных чисел некоторые, служившие символом огромного количества каких-то предметов, символом достатка или, возможно, носителями какой-то магической силы.

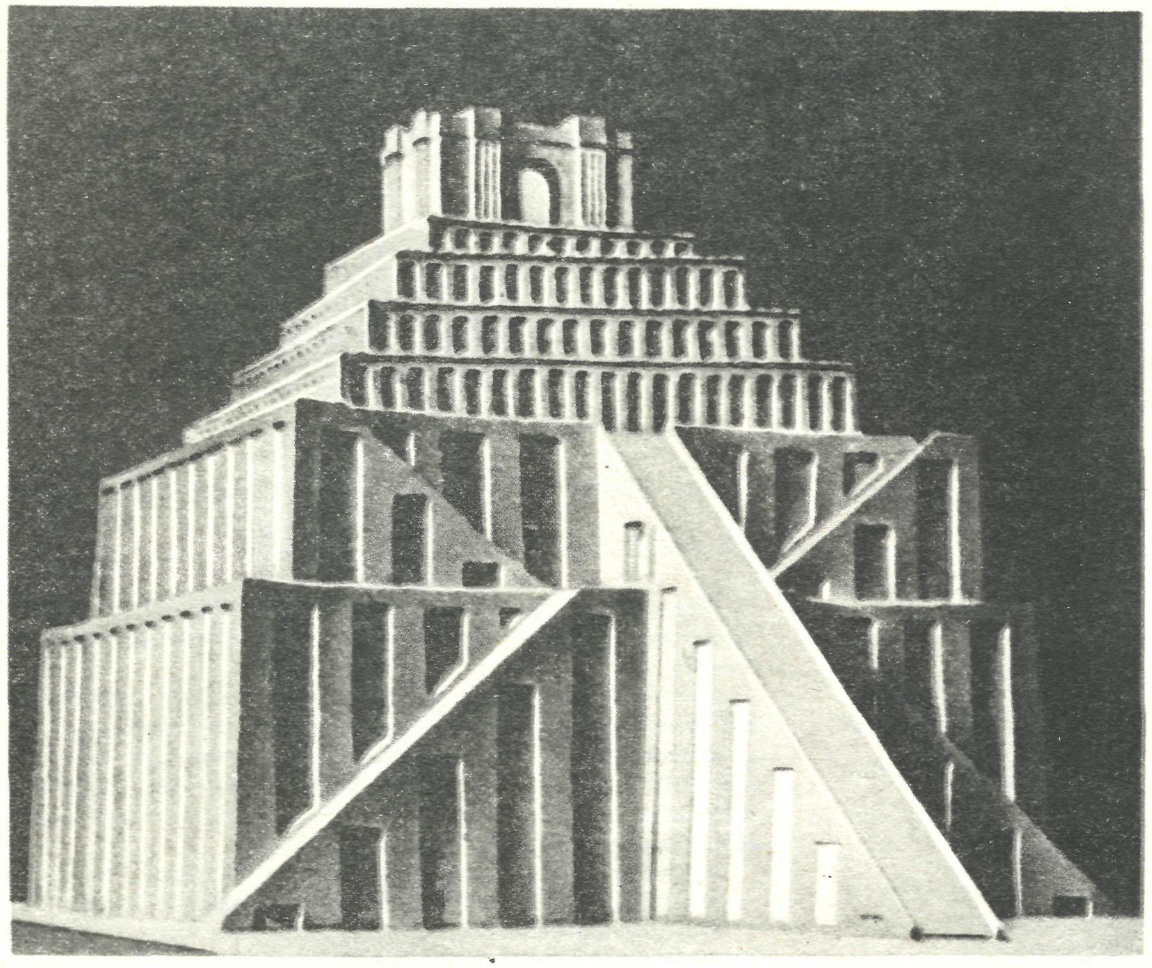
Бизон с семью нацеленными на него стрелами. Рисунок на стене грота Ляско (департамент Дордонь, Франция), поздний палеолит.

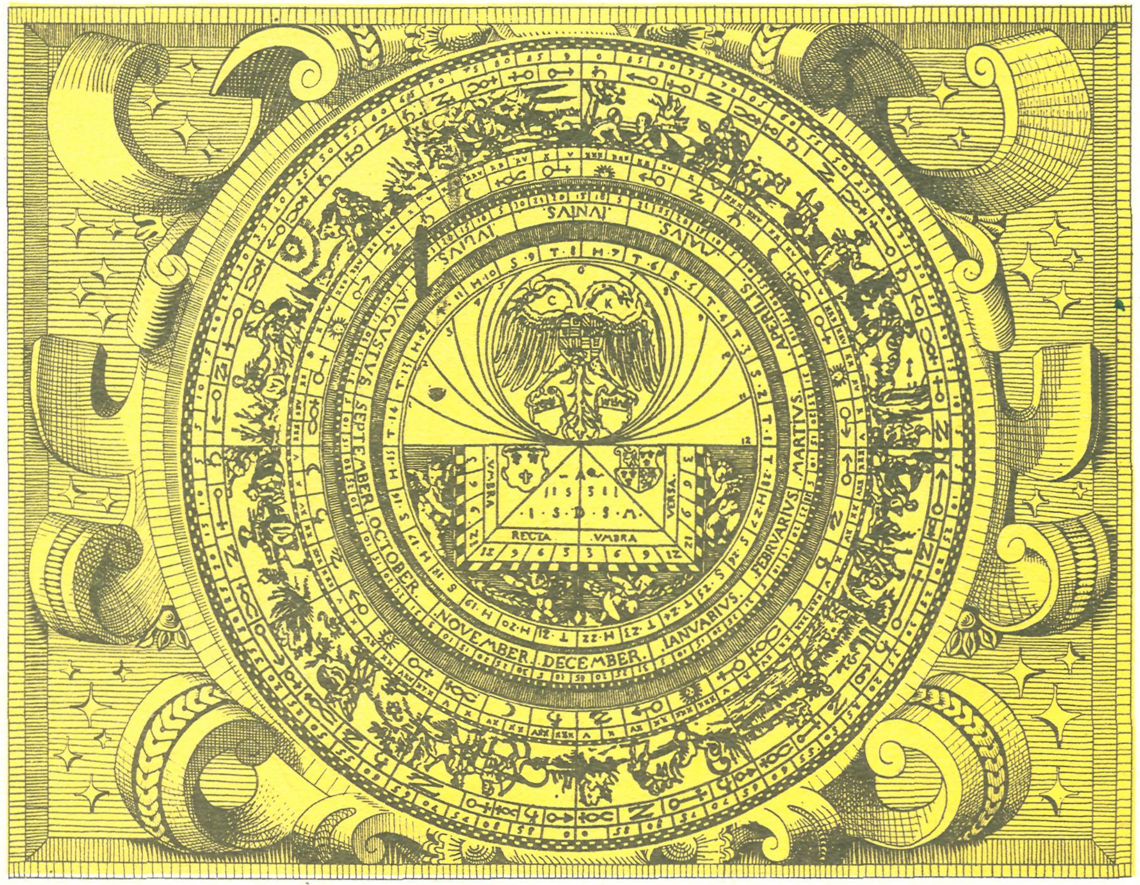
Сокровище стоянки Павлов (Моравия, ЧССР). Поздний палеолит. Изделия из бивня мамонта: пластина с семью нарезками и семь колец.

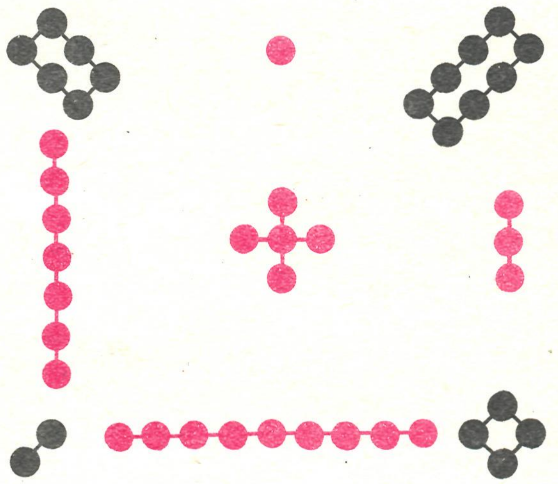
Триликий бог Шива индуистской религии. Мистические наслоения вокруг числа 3 широко использовали и используют различные религии, в том числе и христианство. Идея триликого бога свойственна многим религиям.

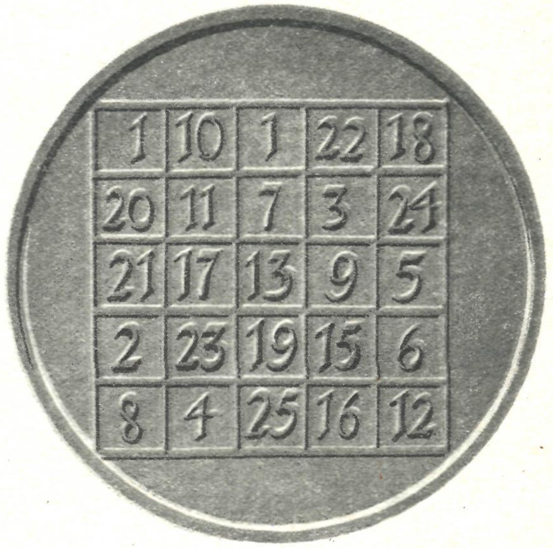
Астрономические наблюдения вавилонские жрецы вели с монументальных семиэтажных башен — зиккуратов. Семь ступеней-террас зиккуратов символизировали семь планет-богов, правителей неба и земли, семь грозных ветров, семь ворот подземного царства, семь дней недели.

Астрологи широко использовали геометрические фигуры, чтобы придать вид „научности" гороскопам, в которых якобы предсказывалось будущее человека. Чем более богатым и щедрым был заказчик, тем большим количеством геометрических чертежей украшали его гороскоп, ничего, конечно, не предвещавший.









Старинный магический квадрат. В далеком прошлом люди считали такие числовые таблицы таинственными, приписывали им чудодейственную силу, называя их магическими. Были распространены амулеты, на одной стороне которых изображали некоторое божество, а на другой — соответствующий магический квадрат.

59—61. Математика и религия

Сторонники всевозможных религиозных учений и мракобесы не напрасно испытывали страх перед „сухой" абстрактной наукой. Истории математики известно множество примеров борьбы ученых разных поколений со всем отжившим, консервативным, в частности с религией, тормозившей научный и социальный прогресс человечества.

Творческая деятельность многих ученых часто протекала в сложных условиях, и их жизнь — настоящий подвиг, волнующие и трагические страницы истории науки.

Считается, что после Фалеса Милетского математика из науки, подчиненной религиозно-мифологическому мировоззрению (именно такой она была в Египте и Вавилоне), становится дедуктивной. Смелым сторонником решения научных проблем с материалистических позиций был древнегреческий ученый Анаксагор.

В 415 г. христианские монахи жестоко расправились с выдающейся женщиной — философом, математиком и астрономом — Гипатией Александрийской. Эта трагедия завершила борьбу церковников с учеными, не желавшими принимать христианство и хранившими верность религии предков — язычеству.

Жестоким преследованиям подвергались многие выдающиеся ученые Средней Азии и Ближнего Востока, среди них — аль-Бируни, ибн-Сина (Авиценна), Омар Хайям, аль-Каши и многие другие.

Следует отметить, что многие математики боролись с религией всеми доступными им средствами. Глубоко атеистичны четверостишия (рубаи) выдающегося ученого-энциклопедиста и поэта Омара Хайяма. Необходимо было настоящее мужество, чтобы во времена массового религиозного фанатизма написать такие строки:

Дух рабства кроется в кумирне и Каабе,
Трезвон колоколов — язык смиренья рабий,
И рабства черная печать равно лежит
На четках и кресте, на церкви и михрабе,
Когда б я властен был над этим небом злым,
Я б сокрушил его и заменил другим,
Чтоб не было преград стремленьям благородным
И человек мог жить, тоскою не томим.

Там, где появлялись жгучие, неразгаданные еще тайны окружающей действительности, надолго поселялись суеверия и мистика. Из глубокой древности дошли до нас такие пустоцветы на здоровом древе человеческого познания, как числовая мистика и числовые суеверия.

Суеверный человек был окружен множеством „добрых" и „злых" чисел. Сколько легенд связано с обычным простым двухзначным числом 13! А сколько горьких разочарований принесли за века „счастливые" пятерка, семерка и другие „благодетели" из мира чисел, которых суеверные люди считали своими защитниками и союзниками.

Материалистические и атеистические традиции отечественных ученых сыграли положительную роль в развитии математики. Непримиримым противником религиозного фанатизма был выдающийся русский математик и философ Т. Ф. Осиповский (1765—1832). Будучи ректором и профессором Харьковского университета, он имел мужество пренебрегать принятыми царской администрацией правилами. На одном из экзаменов он публично заявил, что „бога нет". Ученый подвергался преследованиям реакционных чиновников. В расцвете творческих сил его отстранили от работы в университете, которому он посвятил лучшие годы своей жизни. Такая же участь постигла современника Т. Ф. Осиповского, ректора Казанского университета Н. И. Лобачевского — воинственного материалиста и атеиста.

Под влиянием Осиповского его ученик, будущий выдающийся математик М. В. Остроградский, также стал атеистом и подвергался нападкам со стороны реакционной администрации. Его лишили аттестата об окончании университета.

Последовательным атеистом был и выдающийся математик А. А. Марков.

Сторонники религии не ограничивались преследованиями и расправой над прогрессивными математиками. Они приложили много усилий, чтобы с математической строгостью доказать существование самого бога. Такие „доказательства" — результат нарушения элементарных математических законов.

Итальянский математик Г. Гранди в 1710 г. сделал попытку доказать существование бога следующим образом.

Введем обозначение

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots . \qquad (1)$$

Тогда

$$S - 1 = -1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n} + \ldots ,$$

однако

$$-1 + 1 - 1 + \ldots + (1)^{n} + \ldots = -S.$$

Итак, $S - 1 = -S, \quad 2S = 1, \quad S = 0{,}5.$

Если же в равенстве (1) сгруппировать члены попарно, то получим

$$S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0.$$

Оказывается, таким образом, что $S = 0{,}5$ и $S = 0$, т. е. $0{,}5 = 0$. Последнее же равенство, делает вывод Гранди, и символизирует создание богом мира из ничего!

Некоторые сторонники религии и в наше время, пренебрегая всеми математическими законами (чаще всего допуская деление на нуль), получают равенства типа $0 = 1$ или $0 \cdot 1 = 1$ и делают отсюда выводы, подобные „открытию" Гранди. Такие упражнения, несомненно, полезны для развития смекалки, однако средством для доказательства существования бога они могут служить лишь мошенникам.

Служители религии использовали в своих целях и математические задачи. На стенах одного египетского храма среди других текстов ученые обнаружили несколько математических задач. Они входили в комплекс испытаний для желающих получить звание жреца бога Ра. Вот текст одной из этих задач: „Это стена. За стеной находится колодец Лотоса, как круг Солнца; возле колодца положен один камень, одно долото, два прутика. Один прутик имеет три меры, второй — две. Прутики скрещиваются всегда на поверхности воды колодца Лотоса, и эта поверхность является одной мерой выше дна. Кто сообщит числа наидлиннейшей прямой, содержащейся в ободе колодца Лотоса, возьмет обе тростинки, будет жрецом бога Ра". Задача стоила жизни многим желающим стать таким жрецом, о чем прямо свидетельствует помещенное после приведенного текста предупреждение о сложности задачи и опасности участия в конкурсе, высеченное там же на стене.

В странах Западной Европы полы многих соборов украшали гигантскими геометрическими загадками — лабиринтами. Церковники, конечно, не решали этих загадок, а использовали их в целях наживы. Тем, кто провинился перед церковью, часто приходилось замаливать грехи поломничеством к „святым" местам. Однако многих из них страшила возможность встречи на этом пути с сарацинами, грозившая гибелью. Для достаточно денежных грешников церковники придумывали символические путешествия к гробу господнему — передвижение по-пластунски или на коленях с поклонами и молитвами по запутанным дорожкам лабиринтов. В некоторых лабиринтах длина дорожек достигала мили, поэтому, очевидно, путешествие было нелегким.

Теперь такие лабиринты служат увлекательными головоломками.

60. Математика и религия

Анаксагор (ок. 500—428 до н. э.) — древнегреческий философ. Вызвал неудовлетворение противников рабовладельческой демократии, был обвинен в безбожии и заключен в тюрьму. Ожидая приговора, работал над решением задачи квадратуры круга.

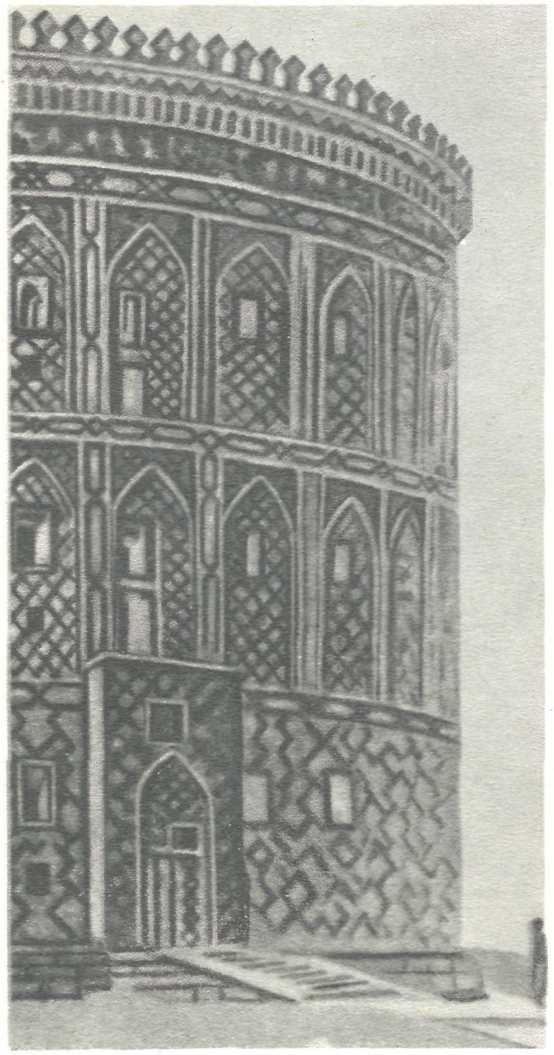
Демокрит из Абдеры (Фракия) (ок. 460—ок. 370 до н. э.) — выдающийся древнегреческий философ-материалист. Работал в различных областях физики, математики, физиологии, медицины, теории музыки, поэзии.

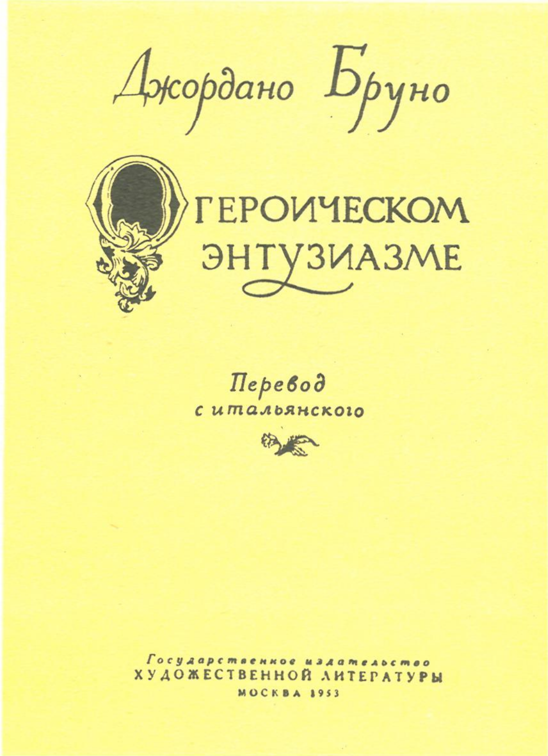
Аутодафе (португ. — акт веры) — публичное сожжение на костре осужденных, жестокий метод расправы католической церкви со своими противниками. Многие выдающиеся ученые, мыслители и прогрессивные деятели приняли мученическую смерть на кострах инквизиции.

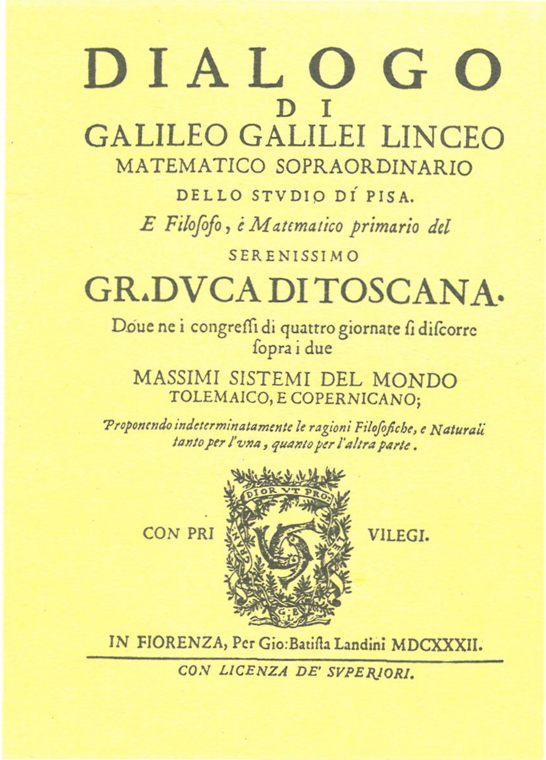
Убийство христианскими монахами-фанатиками выдающейся женщины-математика и философа Гипатии из Александрии (370—415) в храме Кесарион в марте 415 г.

С 1559 г. Ватикан публиковал индексы книг, чтение которых воспрещалось католической церковью. Последний индекс был издан в 1948 г. и содержал около 8 тыс. названий книг. Церковники сжигали сокровища печатного слова, если их содержание не соответствовало интересам церкви.

Пьер де ла-Раме (Рамус) (1515—1572) — один из самых выдающихся ученых XVI в., блестящий оратор, философ, известный математик. Один из 30 тысяч тех, кто стал жертвой Варфоломеевской ночи — массового убийства гугенотов католиками в Париже и других городах Франции.







БЛЕЗ ПАСКАЛЬ

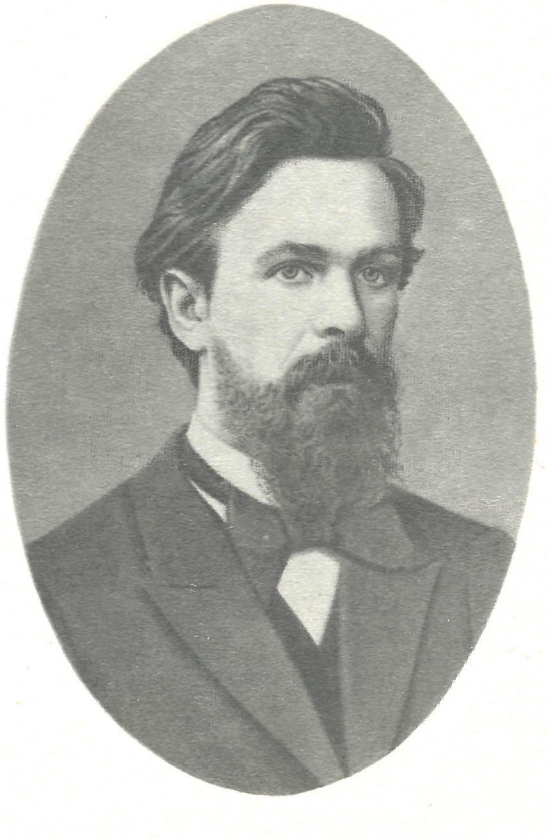
Многие выдающиеся ученые стран ислама подвергались преследованиям и стали жертвами религиозного фанатизма мусульманского духовенства. Одной из таких жертв стал и прогрессивный правитель Самарканда, выдающийся узбекский астроном и математик Мухаммед Тарагай Улугбек (1394—1449), убитый по приговору мусульманского религиозного суда. После гибели Улугбека фанатики-мусульмане разрушили величественное здание Самаркандской астрономической обсерватории. Спасаясь от их преследований, ученые этой обсерватории вынуждены были бежать в другие страны.

Вечным позором католическим церковным иерархам останется в веках процесс против выдающегося итальянского ученого Джордано Бруно. Всю жизнь Бруно вынужден был скитаться в различных городах Европы, спасаясь от постоянных преследований церковников. Выданный инквизиторам, он свыше семи лет мужественно выносил пытки и издевательства в застенках инквизиции, не отрекшись от своих прогрессивных воззрений. Выслушав страшный приговор, Джордано кинул в лицо убийцам: „Возможно, вы с большим страхом провозглашаете приговор, чем я принимаю его!" 17 февраля 1600 г. в Риме на площади Цветов Джордано Бруно был сожжен. Последними словами ученого были: „Я умираю мучеником добровольно". Все произведения Бруно сразу после его смерти были занесены в список запрещенных книг. 9 июня 1889 г. на месте казни Джордано Бруно возведен памятник. На пьедестале его начертано: „Джордано Бруно — от века, который он предвидел". Каждое последующее поколение все с большим правом сможет повторять эти слова, так как Бруно остается вечным современником искателей истины о законах природы.

В 1632 г. 70-летнего всемирно известного ученого Галилео Галилея вызвал из Флоренции в Рим инквизиционный трибунал. Ему учинили допросы, в том числе и „суровые", подразумевавшие применение пыток. Палачи в сутанах сломили волю ученого и вырвали у него отречение от учения Коперника. Галилео Галилея оглаеили узником инквизиции. 8 января 1642 г. ученый умер в окружении друзей и в присутствии агента инквиизиции. Лишь в 1835 г. произведения Галилея были выведены из списка запрещенных книг.

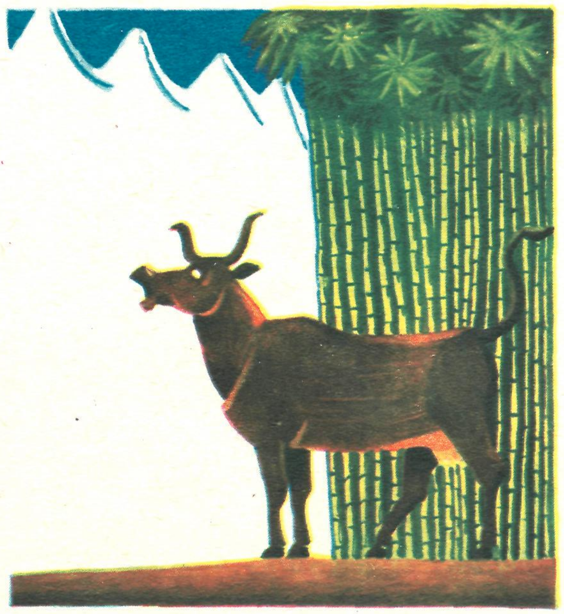
Бескомпромиссным борцом с религией был выдающийся русский математик, академик Петербургской АН, заслуженный профессор Петербургского университета Андрей Андреевич Марков (1856—1922). 12 февраля 1912 г. ученый представил в синод прошение об отлучении его от церкви. Он не поддался на уговоры и угрозы церковников. 28 сентября 1912 г. решением духовной консистории его отлучили от церкви. В „Правде" 9 мая 1912 г. было помещено сообщение об этом мужественном поступке ученого.

Трагизмом отмечена жизнь гениального французского ученого Б. Паскаля (1623—1662). Монахи воспользовались тяжелым нервным состоянием ученого, явившимся последствием дорожной катастрофы, в которой он едва не погиб, уговорили его оставить научные исследования и превратили в послушного исполнителя воли фанатиков-богословов. Ученый иногда находил в себе силы и вырывался из их когтей, создавая в эти мгновения гениальные труды, однако полностью избавиться от религиозного гнета так и не смог. На судьбе Паскаля можно видеть одну из драматических страниц в истории борьбы религии с наукой.



АНДРЕЙ АНДРЕЕВИЧ МАРКОВ

62. От локтя и пяди до СИ



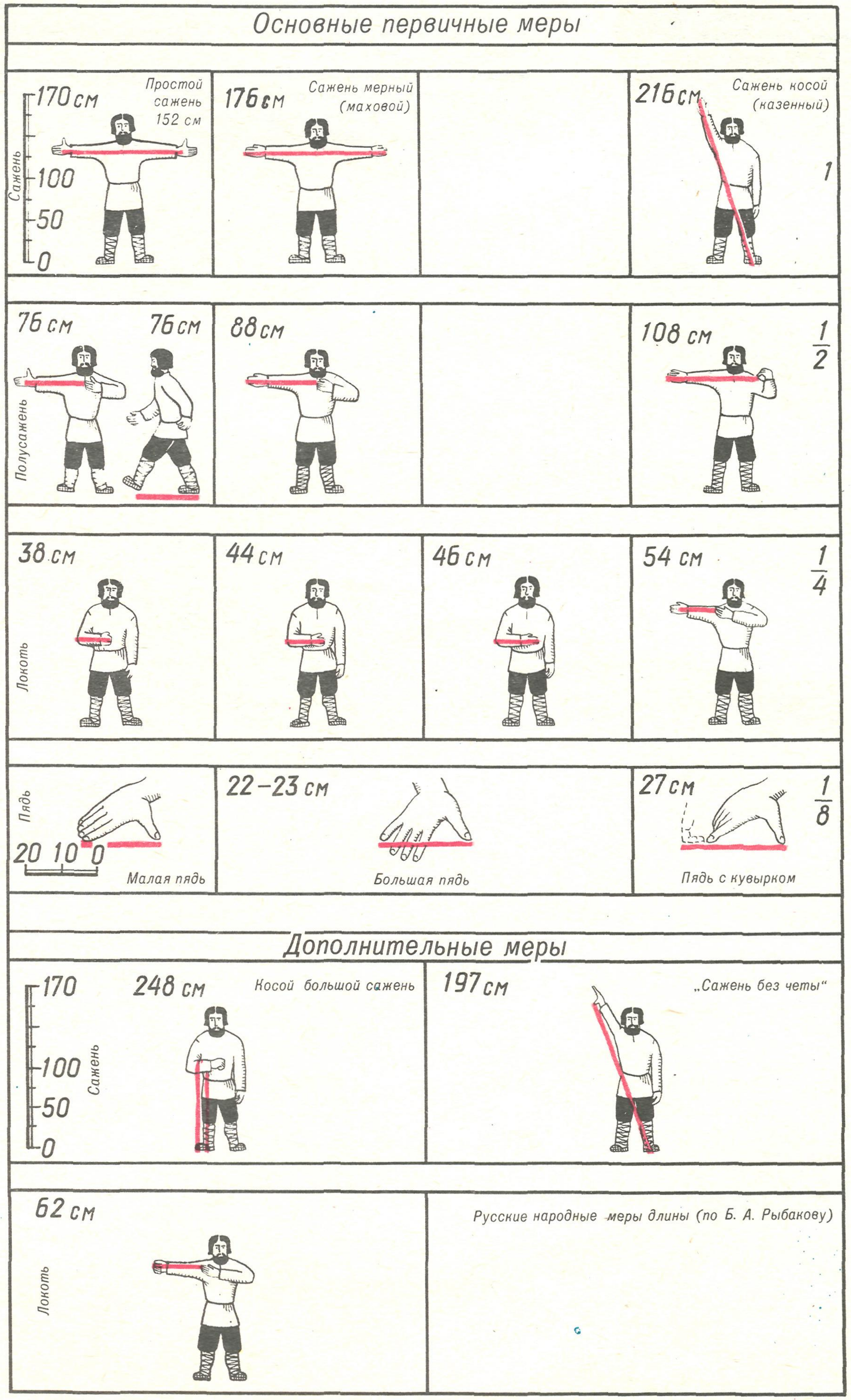
Измерение, как способ количественного отражения свойств объективного мира, прошло три этапа своего развития: период зарождения, измерения постоянных или медленно меняющихся величин и период (с XX в.) измерения быстро изменяющихся физических величин, а также величин в экономике, психологии, эстетике, теории информации и др.

Различные народы создавали единицы физических величин в процессе трудовой деятельности, связывая эти единицы с различными видами своей трудовой деятельности, частями своего тела и наиболее распространенными предметами.

Особенно распространенными были антропоморфные единицы длины, связанные с разными частями тела: пядь, ладонь, стопа, локоть и т. д. Отсюда и известный афоризм: „Человек — мера всех вещей".

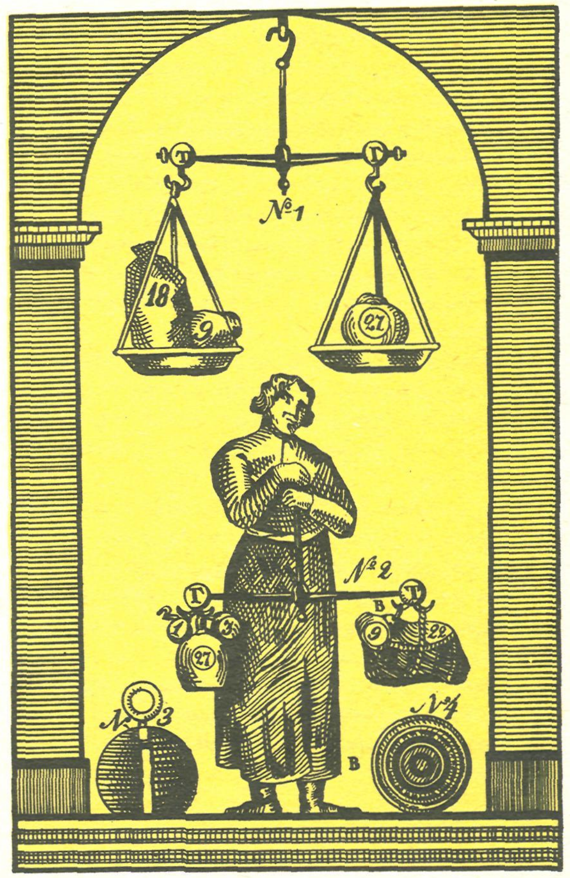
Установление в древнем Вавилоне меры длины — стадии.

Индийская единица „му" равна расстоянию, на котором еще слышно мычание коровы.



Шумеро-вавилонские гири в форме льва.

В 1797 г. российское правительство для дальнейшего упорядочения мер издало специальный указ о мерах с инструкцией об их применении и с приложением, на котором были изображены эталоны мер. На рисунке представлен фрагмент приложения к указу 1797 г. с изображением новых чугунных гирь.



62, 63. От локтя и пяди до СИ

Величина — одно из фундаментальных математических понятий, содержание которого в процессе развития науки претерпело ряд обобщений. Выдающийся русский ученый Д. И. Менделеев (1834–1907) писал: „Наука начинается с тех пор, как начинают измерять. Точная наука немыслима без меры".

Измерение величин прошло три основных периода развития.

Первый — зарождение измерений (от глубокой древности до создания первых теоретических концепций математики, VI–V вв. до н. э.). Это самый длительный период истории измерений. Первые измерения были связаны с разными частями человеческого тела (отсюда известный афоризм „человек — мера всех вещей"), разнообразными процессами его трудовой деятельности, устойчивыми и легко наблюдаемыми астрономическими явлениями.

Первой „теорией измерений" были правила, которыми пользовались строители, землемеры, ремесленники, охотники, землепашцы, жрецы. От их знаний позже взяла начало и геометрия, что подчеркнуто в самом названии этой ветви математики.

Второй период продолжался от VI–V вв. до н. э. к началу XX в. Это был период измерения постоянных или медленно изменяющихся величин. Измеряемые величины в этот период были физическими и число их ограничено — геометрические величины, сила тяжести, время, температура, масса, сила, ускорение, работа, мощность, электрический заряд и т. д.

Третий период характеризуется быстрым расширением области измерений на „нефизические" науки (психологию, социологию, экономику, этнографию, кибернетику, эстетику и т. п.). Измеряемыми становятся явления, которые раньше считались неизмеримыми — экономические цели, информация, сложность систем, эстетическая ценность и т. д. В этот период резко возрастает число физических величин, измерения становятся быстрыми, человек часто исключается из процесса измерений, его выполняют автоматы.

В разные периоды истории науки центральными задачами теории измерений выдвигались прикладные или теоретические проблемы измерений. Вторые приводили к созданию фундаментальных теорий — аксиоматик измерений. Так, в „началах" Евклида четко сформулированы свойства положительных скалярных величин, и эти свойства были непосредственным обобщением более конкретных понятий: длины, площади, объема....

Проблемы теории измерений сыграли важную роль в развитии физико-математических наук, естествознания и философии. Достаточно сказать, что открытие несоизмеримых отрезков в школе Пифагора, знаменитые апории Зенона Элейского, метод исчерпывания Евдокса Книдского, а также все этапы развития интегральных методов непосредственно связаны с измерением.

Измерение величин является отображением тех или иных величин во множество неотрицательных действительных чисел. Структура $(V, +, <)$ удовлетворяет всем аксиомам векторного пространства, поэтому является одновременно одномерным пространством, изоморфным одномерному евклидовому пространству (числовой прямой). Именно на основании этой связи между системой скалярных величин и числовой прямой в школьной геометрии в рассуждениях вместо скалярных величин фигурируют их числовые значения.

В физике, как и в математике, большое значение имеет выбор единиц физических величин, основанных на физических закономерностях, которые отображают отношения величин в природе. Ведь величина — это объект реальности, а численное значение ее — отображение этой реальности в сознании человека.

При выборе единиц какой-либо системы стремятся, чтобы их можно было подать в форме такой последовательности физических отношений, в которой каждый следующий член содержит только одну новую величину. Благодаря этому ту или иную величину можно определить через остальные, ранее определенные величины и, в конечном счете, через основные.

Неудобства, связанные с наличием многих национальных систем единиц, обусловили разработку метрической системы мер, которая стала основанием для международной унификации единиц длины (метр) и массы (килограмм), а также важнейших производных единиц.

В XIX в. немецкие ученые К. Ф. Гаусс (1777–1855) и В. Э. Вебер (1804–1891) предложили систему единиц для электрических и магнитных величин, названную Гауссом абсолютною.

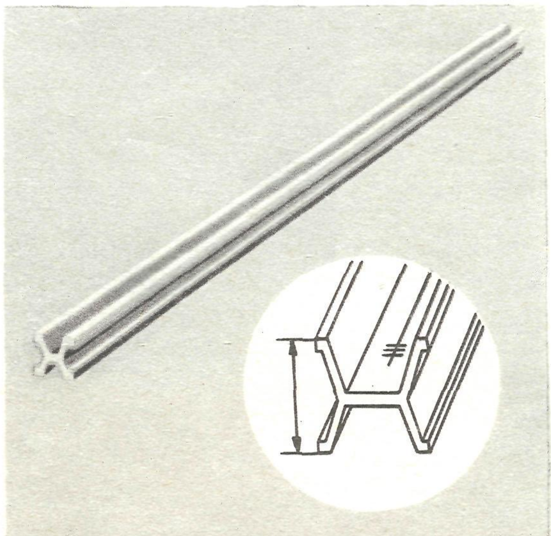
В 1960 г. XI Генеральная конференция по мерам и весам утвердила Международную систему единиц, основанную на метрической системе.

В СССР Международная система единиц введена с 1 января 1963 г. ГОСТ 9867–61, а стандарт СЭВ 1052–78 утвердил ее как обязательную.

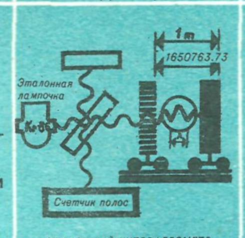
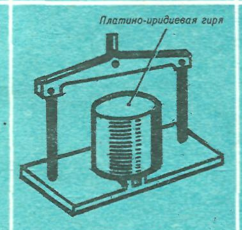
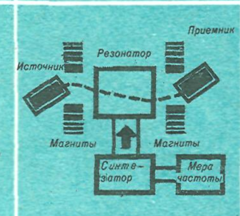
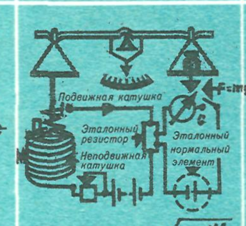
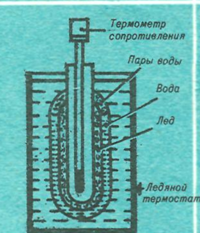
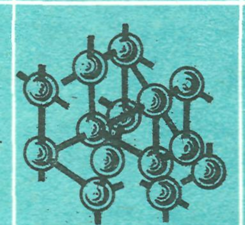
В течение 1792—1799 гг. французские ученые астроном и геодезист Ж. Б. Деламбр (1749—1822) и астроном-гидрограф П. А. Мешен (1744—1804) осуществили градусное измерение дуги меридиана от Дюнкерка до Барселоны (около 1000 км), которое было положено в основу установления метрической системы мер.

Основное достоинство метрической системы состоит в том, что в ней все меры подразделяются по десятичному принципу, лежащему в основе общепринятой десятичной системы счисления.

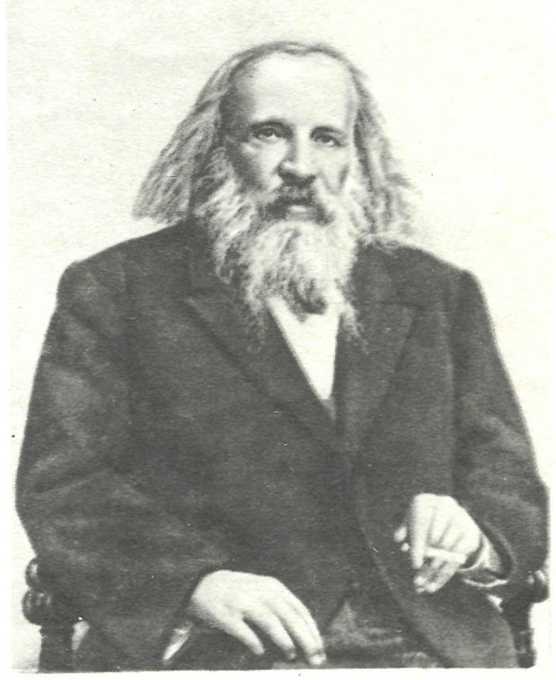
Идея применить в качестве эталона длины часть земного меридиана родилась в России еще в самом начале XVIII в. В 1719 г. Петр I особым указом поручил Я. Брюсу провести измерение части дуги меридиана по льду Ладожского озера.



МЕЖДУНАРОДНАЯ СИСТЕМА ЕДИНИЦ—СИ

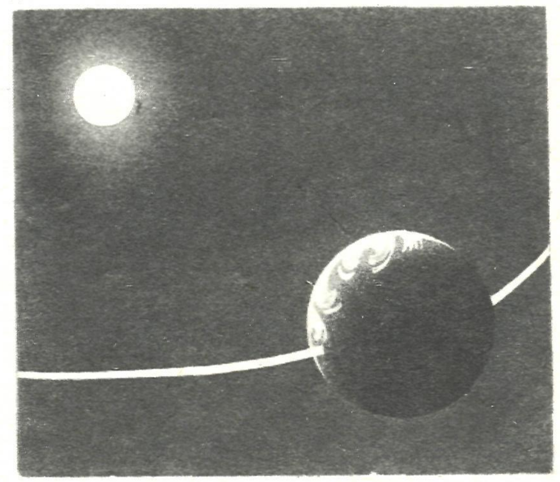
	ВЕЛИЧИНА	ЕДИНИЦА СИ			ОПРЕДЕЛЕНИЕ	СХЕМА ВОСПРОИЗВЕДЕНИЯ ЕДИНИЦЫ	ХРАНИТЕЛЬ ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭТАЛОНА
		Наименование	Обозначение				
			Международное	Русское			
ОСНОВНЫЕ ЕДИНИЦЫ	Длина	Метр	m	м	Метр равен 1 650 763,73 длин волн в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ атома криптона-86	 ЭТАЛОННЫЙ ИНТЕРФЕРОМЕТР	НПО ВНИИМ им. Д. И. Менделеева г. Ленинград
	Масса	Килограмм	kg	кг	Килограмм равен массе международного прототипа килограмма	 ЧАШКА ВЕСОВ	НПО ВНИИМ им. Д. И. Менделеева г. Ленинград
	Время	Секунда	s	с	Секунда равна 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133	 ЦЕЗИЕВЫЙ РЕПЕР ЧАСТОТЫ	ВНИИМ физико-математических и радиотехнических измерений Московская обл.
	Сила электрического тока	Ампер	A	А	Ампер — сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным бесконечным проводникам ничтожно малого сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м, вызывает на каждом участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия $2 \cdot 10^{-7}$ Н	 ТОКОВЫЕ ВЕСЫ $I=\sqrt{mg\frac{dM}{dx}}$	НПО ВНИИМ им. Д. И. Менделеева г. Ленинград
	Термодинамическая температура	Кельвин	K	К	Кельвин равен 1/273,16 части термодинамической температуры тройной точки воды	 АМПУЛА ТРОЙНОЙ ТОЧКИ ВОДЫ	НПО ВНИИМ им. Д. И. Менделеева г. Ленинград
	Количество вещества	Моль	mol	моль	Моль равен количеству вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в углероде-12 массой 0,012 кг	 СТРУКТУРНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ВЕЩЕСТВА	
	Сила света	Кандела	cd	кд	Кандела равна силе света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет 1/683 Вт/ср.	 СВЕТОВОЙ ЭТАЛОН	НПО ВНИИМ им. Д. И. Менделеева г. Ленинград

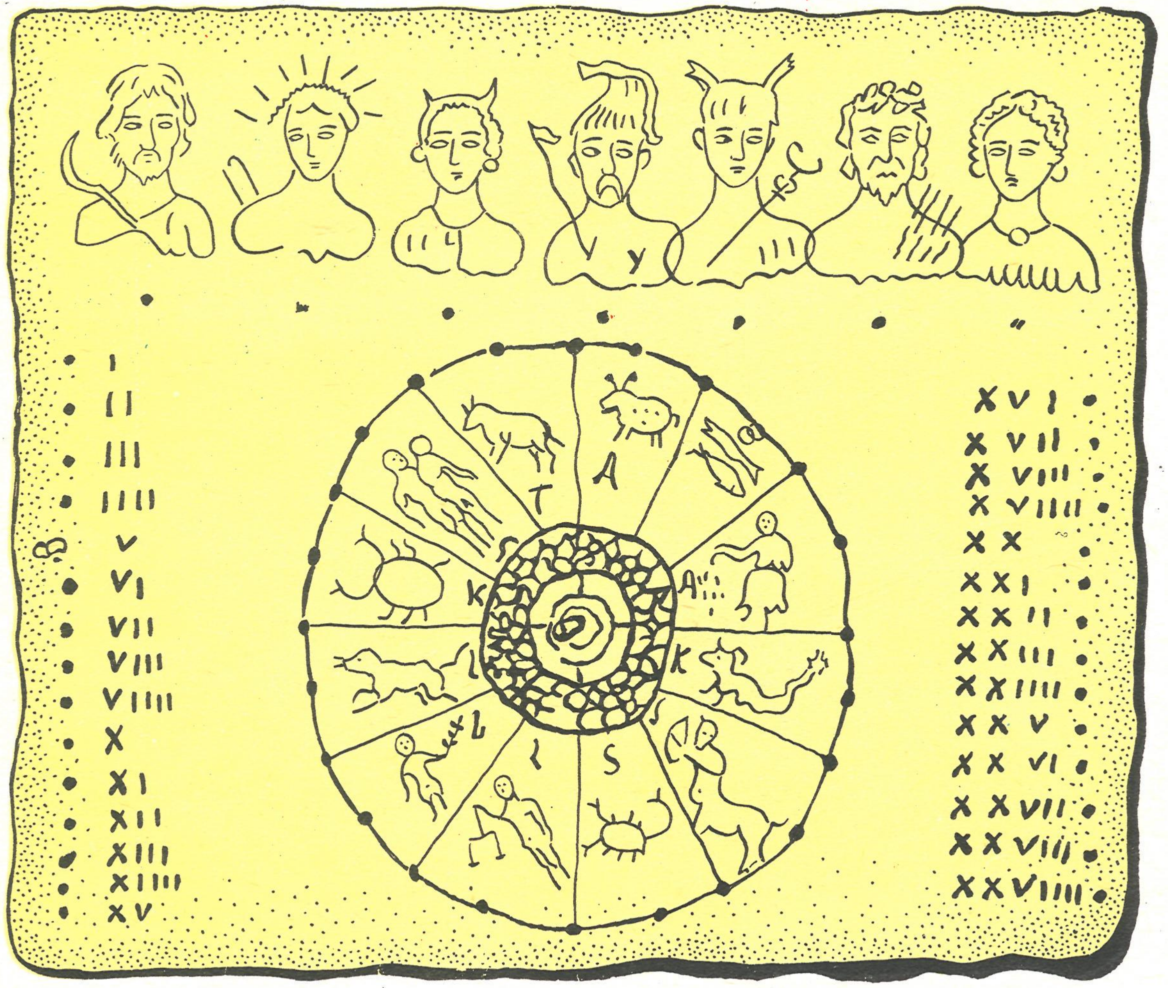
Дмитрий Иванович Менделеев (1834—1907) — выдающийся русский ученый-химик, физик, метролог и метеоролог, с 1893 г. возглавлял Главную палату мер и весов. Разработал физическую теорию весов, точные приемы взвешивания. Много сделал для распространения в



России метрической системы мер и григорианского календаря (нового стиля).

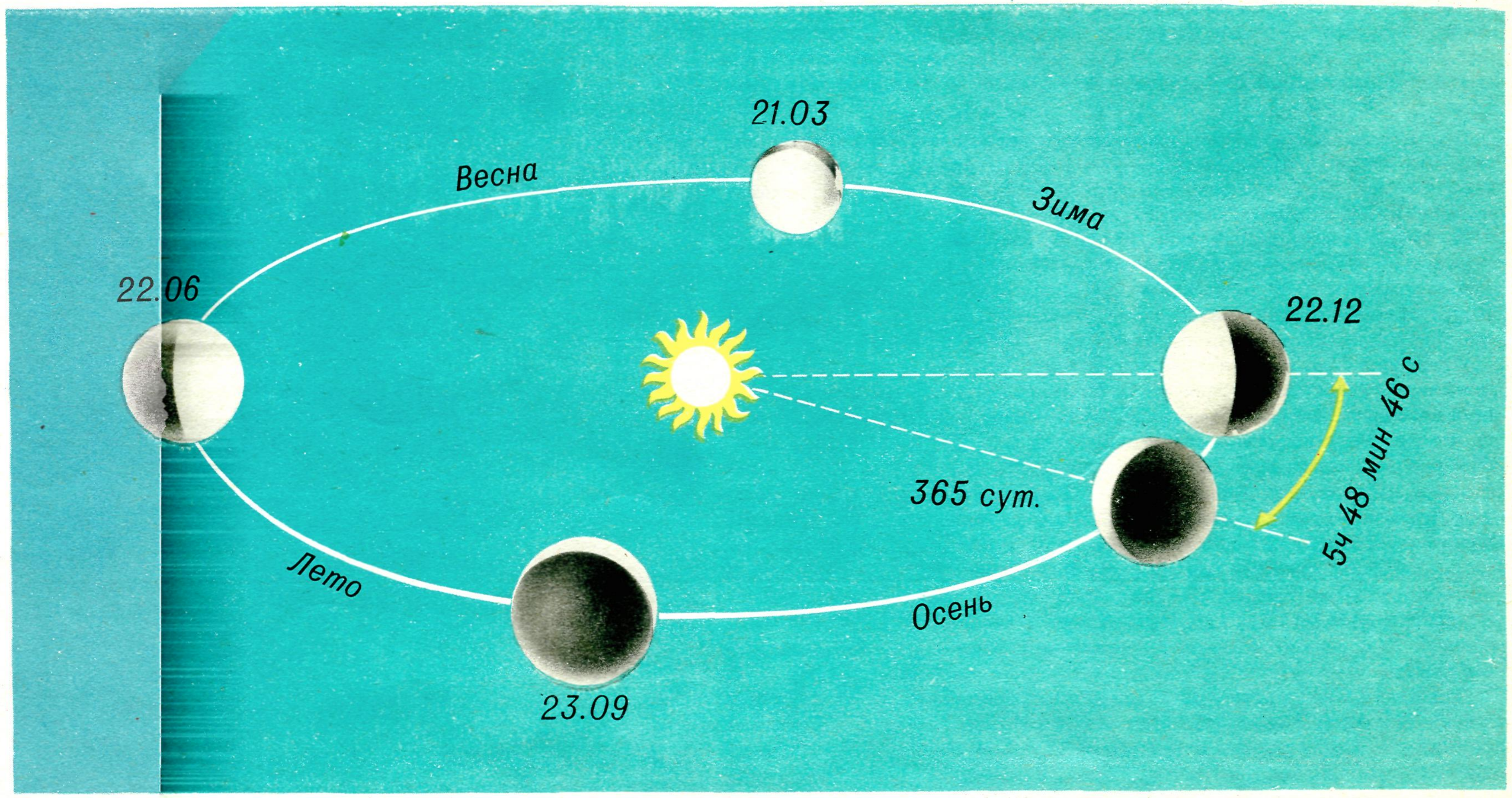
Созданный во Всесоюзном научно-исследовательском институте физико-математических и радиотехнических измерений метрологический цезиевый репер — один из четырех существующих в мире. Он обеспечивает воспроизведение атомной секунды с относительной погрешностью $5 \cdot 10^{-13}$ (совпадение размера секунды с принятым теоретическим определением — длительность 9 192 631 770 периодов излучения, соответствующих переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133). Метрологический цезиевый репер в Государственном эталоне — средство, по которому проверяется точность работы всех хранителей времени в нашей стране.





Древнеримский каменный календарь: наверху изображены боги, управляющие днями недели, начиная с субботы. Посередине изображен зодиак, а слева и справа — числа месяцев.

Стоунхендж — гигантский памятник каменного века (2000—1500 до н. э.), сооруженный в южной части Англии. Работа по его возведению потребовала около 1 497 680 человеко-часов. Сооружение функционировало как календарь, служило для счета дней и фиксирования времени года.

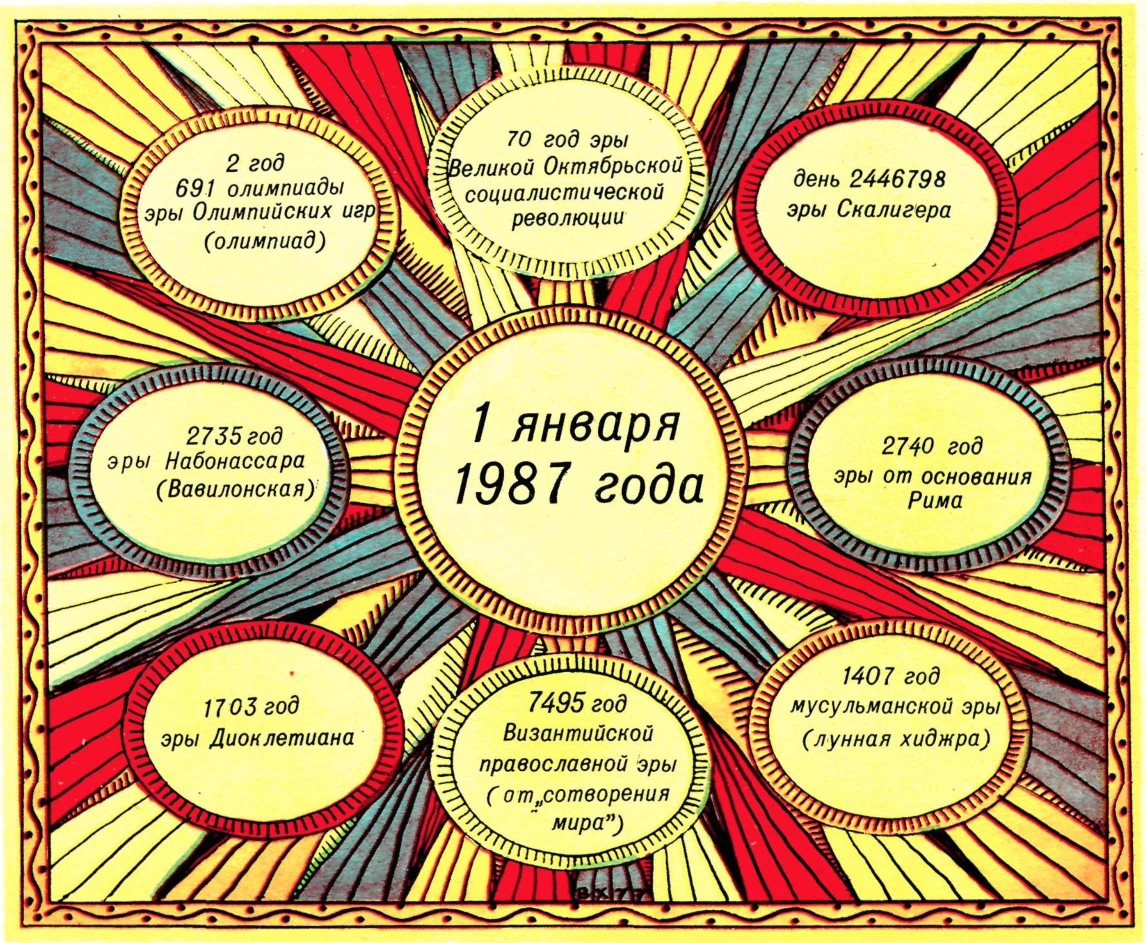


В основу современного календаря положен тропический год — промежуток времени между двумя последовательными прохождениями центра Солнца через точку весеннего равноденствия. Однако тропический год не содержит целого числа средних солнечных суток. Поэтому невозможно достаточно просто выразить одну из этих величин через другую. Именно этим объясняется вся сложность календарной проблемы и вся та путаница, которая в течение многих тысячелетий царила в вопросе вычисления больших промежутков времени. Вольтер зло высмеял неточность древнеримского календаря, заметив, что римские полководцы всегда побеждали на поле боя, но никогда не знали, когда это произошло. Русский поэт Ф. Тютчев метко сказал о медлительном юлианском календаре:

Как бестолковы числа эти,
Какой сумбур в календаре...

(Т ю т ч е в Ф. И. Лирика: В 2 т. — М.: Наука, 1966. — Т. 2. — С. 237).

Сложная задача усовершенствования и унификации исчисления больших промежутков времени еще ожидает своего решения.



Дата 1 января 1987 г. в разных эрах — системах счета времени.

64. Календарная даль веков

„Трудно себе представить более простое и вместе с тем более сложное понятие, чем время", — писал известный советский ученый А. Е. Ферсман. Естественно, что задача измерения времени и установления точки его отсчета оказалась исключительно трудной, окончательно не решенной и в наше время.

Отцом хронологии считают выдающегося древнегреческого математика, географа, астронома, философа и филолога Эратосфена Киренского (ок. 276–194 до н. э.). Ему принадлежит инициатива создания единой хронологии для западных стран по годам, а не по династиям.

По заказу римского императора Юлия Цезаря в 46 г. до н. э. александрийский астроном Созиген разработал солнечный календарь, известный под названием юлианского. В то время ученые определили, что Земля делает один оборот вокруг Солнца за 365,25 суток. Поэтому реформа предписывала считать три года по 365, а четвертый (високосный) — 366 суток.

В середине IV в. византийский император Константин провозгласил христианство государственной религией, а затем церковный собор принял юлианский календарь. Наверное, многих монахов и церковных деятелей возмущало, что счет лет и расчеты пасхалий идут по годам „Эры Диоклетиана". Ведь этот римский император был язычником, злейшим врагом и гонителем христиан. Поэтому настоятель одного римского монастыря, скиф из северного Причерноморья, Дионисий Малый рассчитал пасхалии по годам от рождения Иисуса Христа. Воспользовавшись некоторыми астрономическими данными, главным образом разными евангельскими преданиями, Дионисий рассчитал, что год рождения мифического Христа приходится на 753 год от „основания Рима". Эту дату и стали считать первым годом от „рождения Христа". Так, вместо 248 года Диоклетиана появился 532 год от „рождения Христа".

Поскольку Земля совершает один оборот вокруг Солнца за 365,24219 суток (365 суток 5 часов 48 минут и 45,5 секунды), то год в юлианском календаре оказался длиннее истинного на 11 минут 14 секунд (на 0,0078 суток). Это приводило к тому, что за 128 лет в календаре накапливались одни лишние сутки и он отставал от смены времен года.

Ошибку исправили только в 1582 г., когда был введен новый, григорианский, календарь. Реформой предписывалось после 4 октября 1582 г. считать сразу 15 октября. Одновременно следовало из каждых 400 лет выбрасывать три дня, т. е. года, у которых число сотен не делится на четыре (1700, 1800, 1900 и т. д.), считались простыми, а не високосными. При этом отставание от астрономического года составляет всего 24 секунды, т. е. ошибка в 1 сутки накопится за 3200 лет.

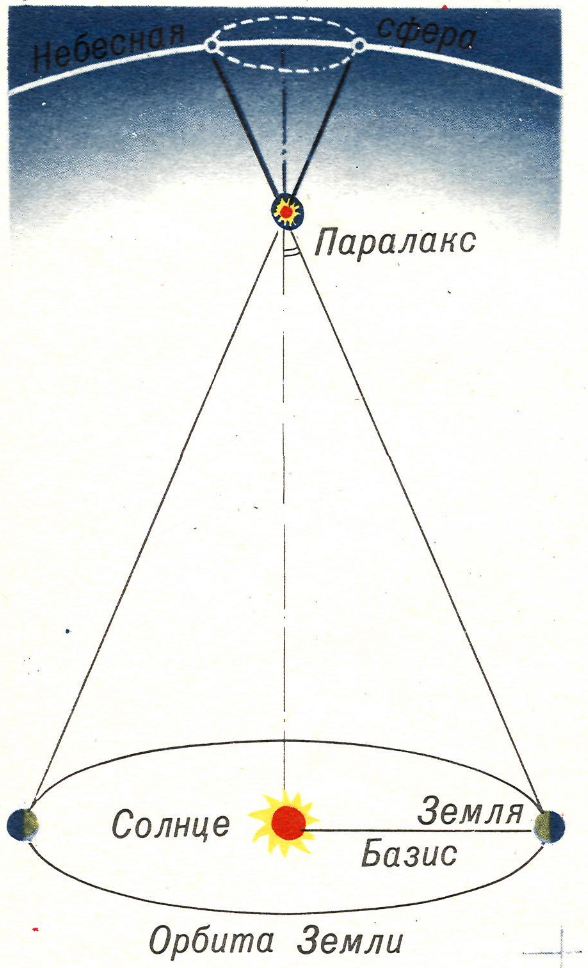
В России в 988 г. была введена византийская эра летоисчисления от „сотворения мира". Эта мифическая дата отстоит от другой мифической даты, вычисленой Дионисием, на 5508 лет.

20 января 7208 г. от „сотворения мира" на Красной площади в Москве был оглашен указ Петра I „О праздновании Нового 1700 года". Так в России был введен юлианский календарь, встреченный с нескрываемой враждебностью духовенством и боярами.

25 января 1918 г. в газете „Известия" за подписью Председателя Совета Народных Комиссаров В. Ульянова (Ленина) был опубликован „Декрет о введении в Российской Республике западноевропейского календаря". Так юлианский календарь (старый стиль) был заменен григорианским (новый стиль). К XX в. разница между старым и новым стилями составляла 13 суток. Поэтому декрет предписывал „Первый день после 31 января сего года считать не 1-м февраля, а 14-м февраля, второй день считать 15-м и так далее".

Конечно же, что этим проблема усовершенствования летоисчисления не исчерпана. Григорианский календарь, которым мы пользуемся теперь, несет в себе следы не лучших решений календарной задачи, и проблема усовершенствования его остается все такой же важной и сложной.

65. Математика в астрономии



Со времен Аристарха Самосского (ок. 320 — ок. 250 до н. э.) астрономия развивалась в тесном союзе с математикой. Много выдающихся достижений ее было связано с математическими расчетами и математической обработкой результатов наблюдений. „Пусть сюда не входит не обученный геометрии", — эти слова, согласно легенде, вырезьбленные на дверях Платоновой Академии, взял эпиграфом к своему гениальному произведению великий реформатор астрономии и всего естествознания Николай Коперник (1473—1543).

Три известных закона Кеплера — это, кроме всего, результат огромной вычислительной работы ученого и длительных математических исканий.

Огромным триумфом Иогана Кеплера явилось открытие эллиптической орбиты Марса и второго закона движения этой планеты, распространенного позднее на все планеты Солнечной системы.

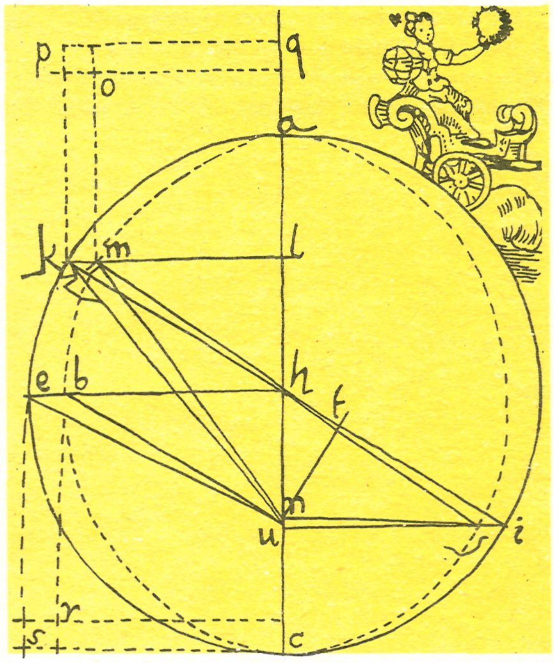
На диаграмме показано, что Марс „облетает" равные площади за равные промежутки времени. Солнце находится в точке *n*. (Из „Комментария о движении Марса").

Астрономия может развиваться только при помощи м а т е м а т и к и.

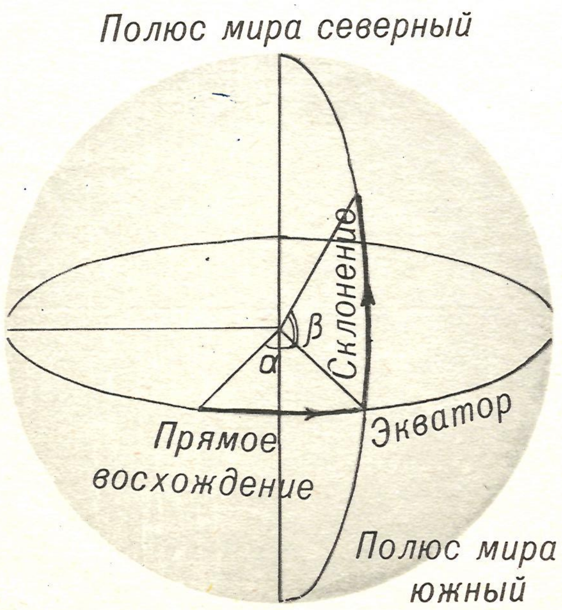
Ф. Энгельс

Сама она (астрономия) являющаяся бесспорно главой благородных наук и наиболее достойным занятием свободного человека, опирается почти на все математические науки.

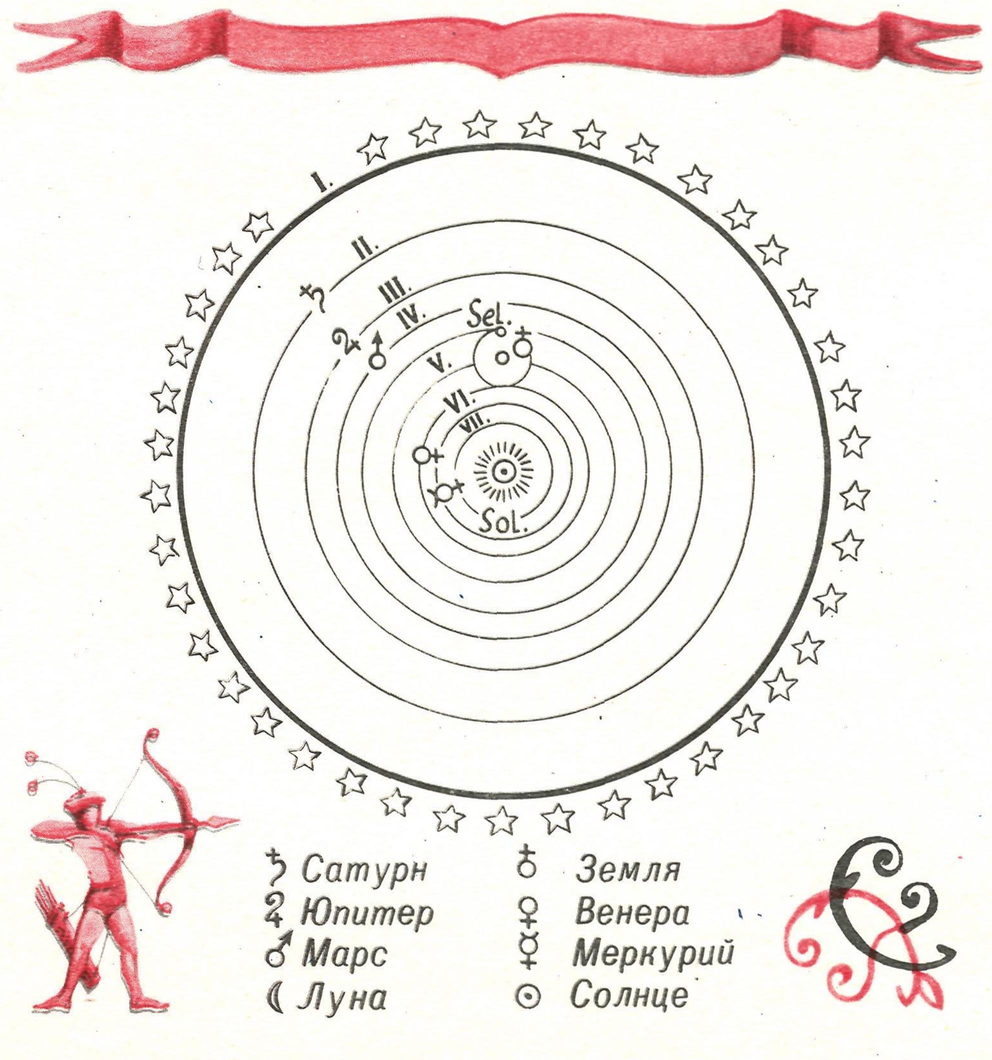
Н. Коперник



Математика дала астрономии небесные координаты. Прямое восхождение и склонение — это адреса светил на небесной сфере.

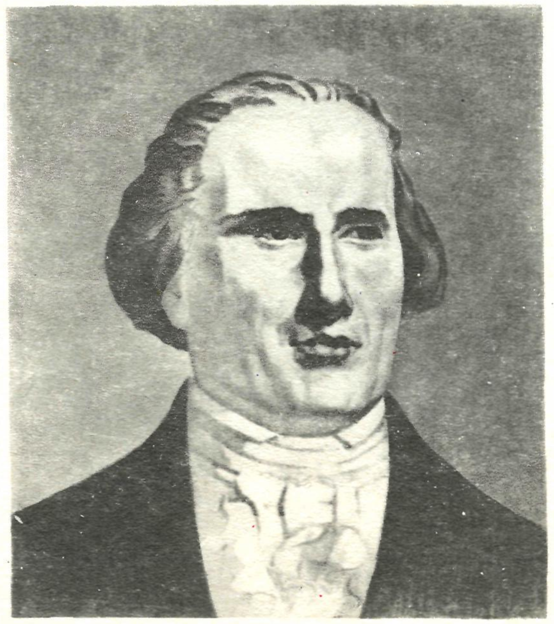


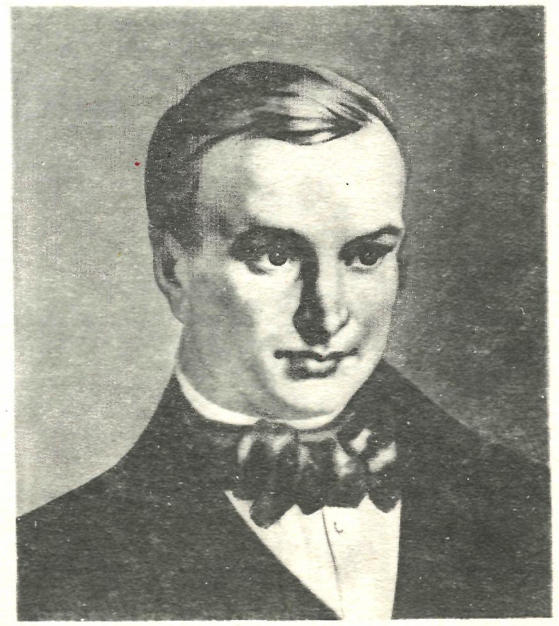
Система мира Коперника.



Урбен Жан Жозеф Леверье (1811—1877) — известный французский астроном. На основании математических расчетов пришел к выводу о существовании зауранововой планеты и вычислил ее положение на небосклоне.

Джон Кауч Адамс (1819—1892) — английский астроном; несколько ранее Леверье и независимо от него на основании теоретических расчетов установил существование зауранововой планеты Нептун.





65. Математика в астрономии

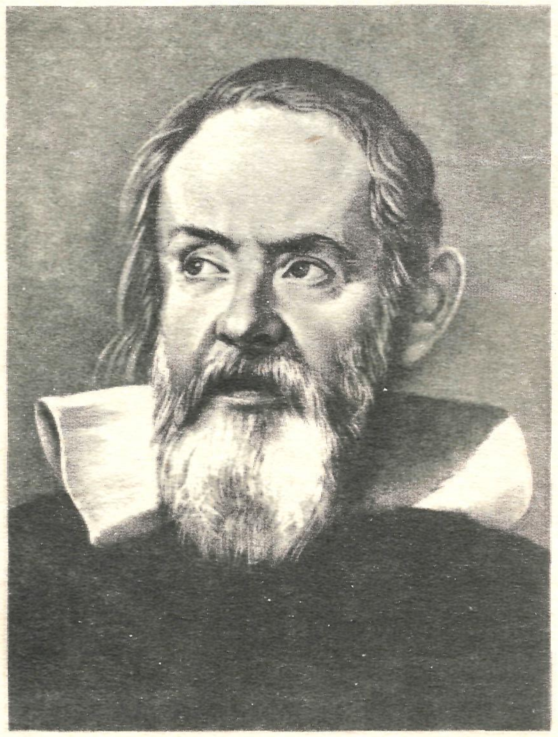
Астрономия — отрасль знания, которая широко использует математику. Союз этих наук возник еще во времена, когда астрономия не отделилась от астрологии. В дальнейшем все более полное применение математики способствовало развитию астрономии. Все астрономы, начиная от Аристарха Самосского, широко использовали в своих произведениях математический аппарат.

Математика помогает ученым проникать в глубины Вселенной, постигать тайны Мегамира. Используя методы математической статистики, ученые подсчитали, что в видимой части Вселенной имеется 10^{21} звезд и 10^{10} галактик.

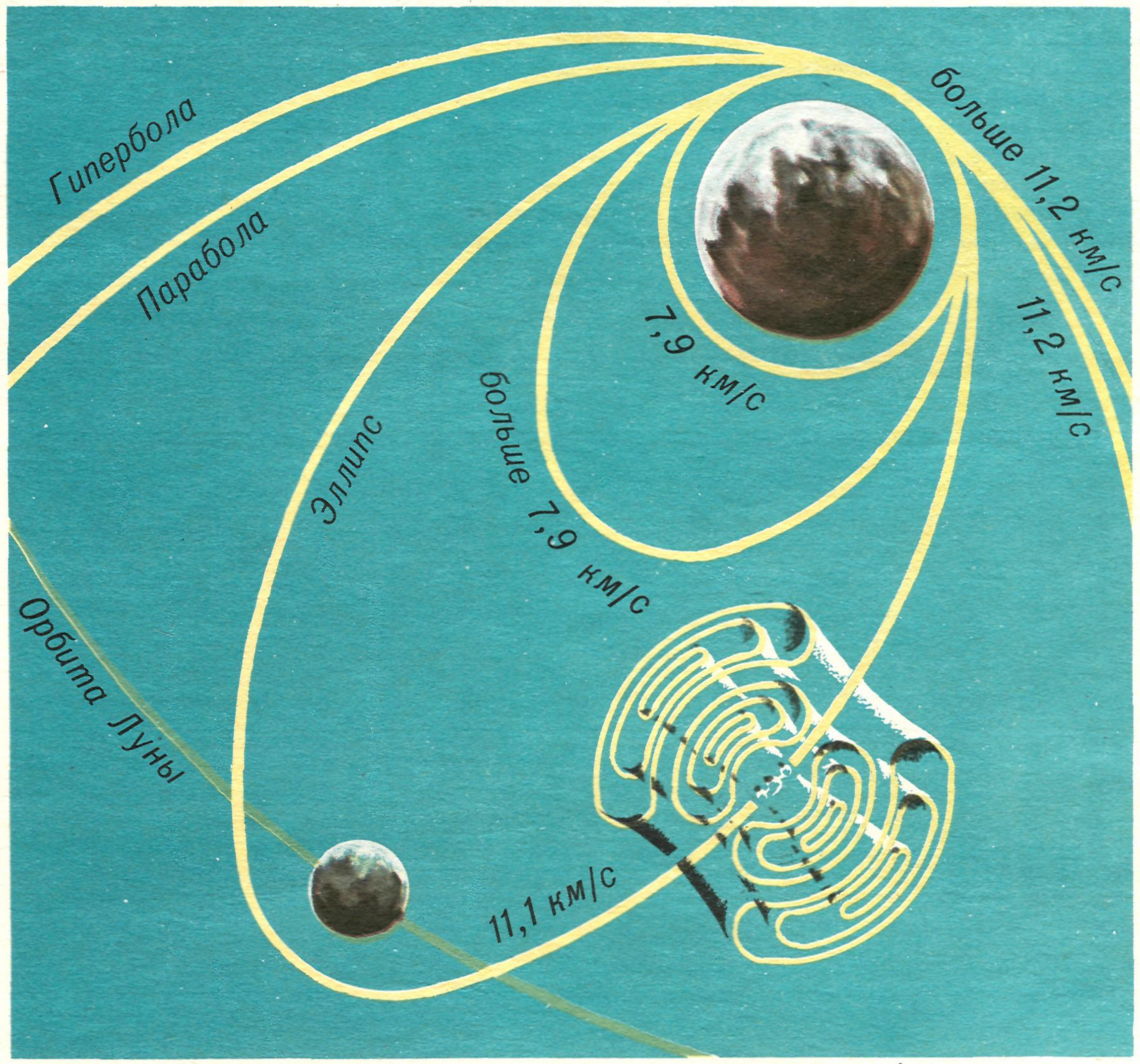
На основе математических расчетов Лаплас открыл „черные дыры". Триумфом математического естествознания являлось открытие с помощью математики Нептуна и Плутона. Загадочные объекты космоса — пульсары и квазары — также были открыты сначала математиками и лишь затем астрономами с помощью мощной современной аппаратуры.

Используя систему десяти сложнейших нелинейных дифференциальных уравнений, Эйнштейн описал замкнутую стационарную Вселенную. Советский математик А. А. Фридман решил одно из уравнений Эйнштейна, открыв тем самым одно из грандиознейших явлений природы — расширение Мегамира.

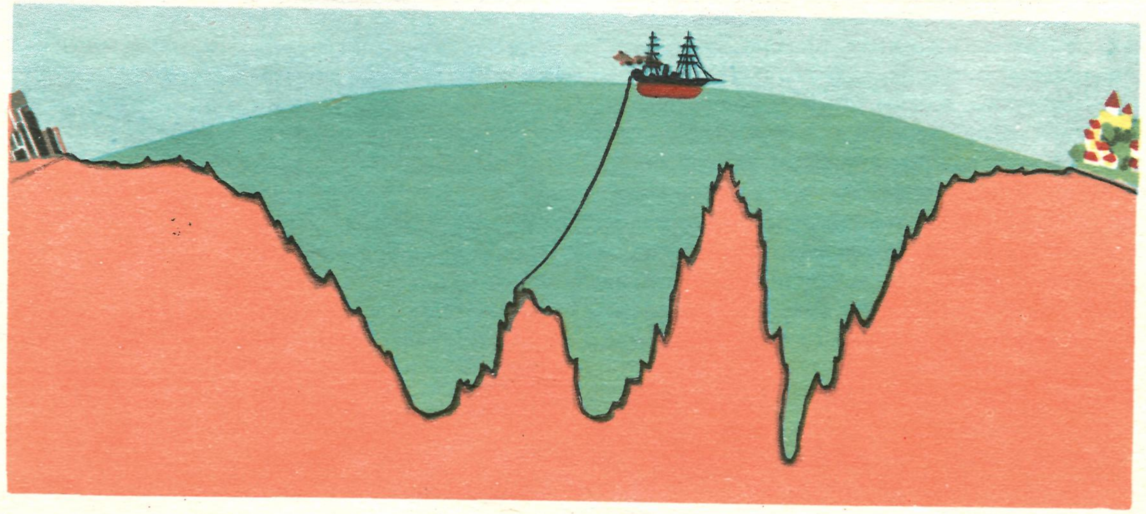
66. Математика в физических науках



Галилео Галилей (1564—1642) — выдающийся итальянский физик, астроном, механик, один из основателей научного естествознания. В условиях господства схоластики и враждебного отношения католицизма к науке осуществил смелые исследования, сделал фундаментальные открытия в астрономии и механике. Подвергался преследованиям и был осужден инквизицией.

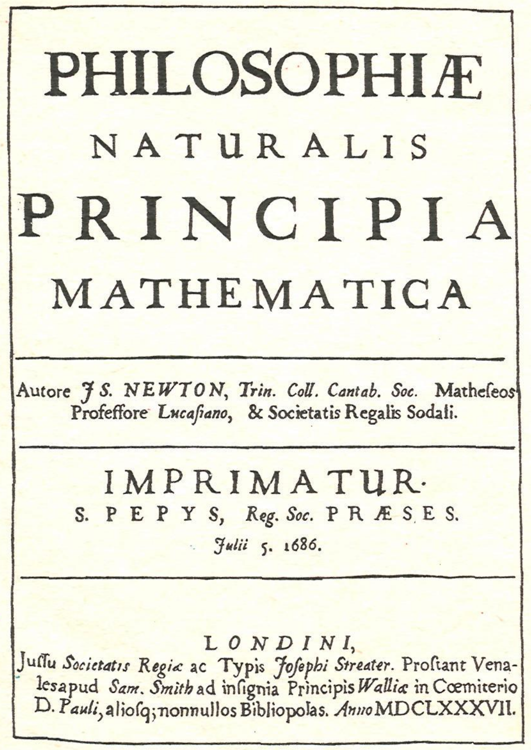


В уравнениях теплопроводимости французского математика Жозефа Фурье (1768—1830) ученые прочитали, что необходимо сделать, чтобы могло функционировать грандиозное техническое сооружение — трансатлантический кабель между Европой и Америкой.



Джеймс Клерк Максвелл (1831—1879) — выдающийся английский физик. Созданная им теория электромагнитного поля, сформулированная в виде системы дифференциальных уравнений, и сегодня является теоретической основой электро- и радиотехники.

Генрих Рудольф Герц (1857—1894) открыл радиоволны, существование и скорость распространения которых предвидел Максвелл, исследуя уравнения электромагнитного поля.

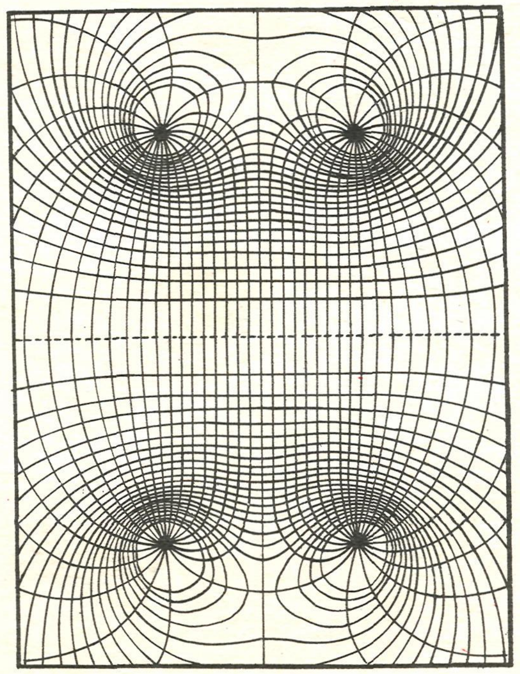

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

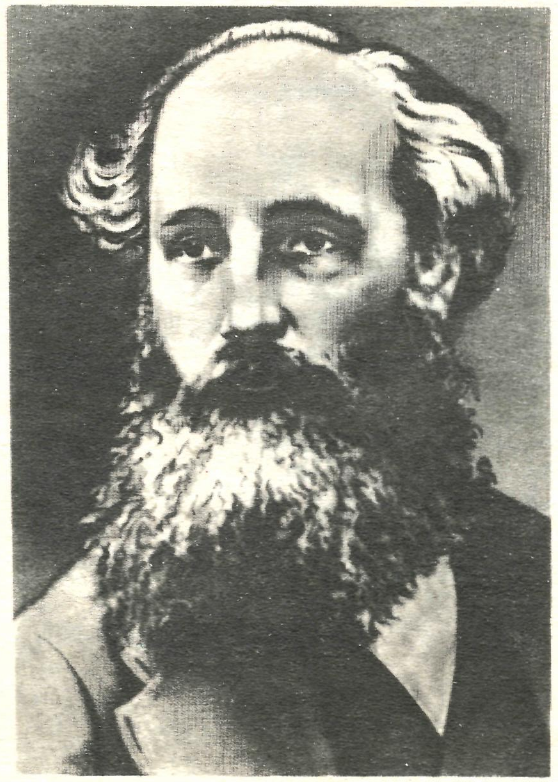
Autore J. S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR·
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostant Venales apud Sam. Smith ad insignia Principis Walliæ in Cœmiterio D. Pauli, aliosq; nonnullos Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Истинным триумфом математического естествознания стали „Математические начала натуральной философии" (1687) И. Ньютона, где на языке математических понятий и символов устанавливались законы небесной и земной механики в евклидовом абсолютном пространстве.





66, 67. Математика в физических науках

Со времен античности математические структуры были положены в основу трактовки физических явлений. Теоретическая физика на каждом этапе развития широко использовала математику и в определенной степени способствовала созданию новых математических теорий. Выдающиеся открытия физики за последние четыре столетия оказались возможными благодаря применению математики.

В наши дни практика выдвигает перед исследователями физических явлений проблемы, решение которых с учетом всех действующих факторов невозможно. Поэтому сознательно допускаются некоторые упрощения, создаются математические модели исследуемых явлений, т. е. явление переводится на язык формул и уравнений. Эти модели, с одной стороны, должны быть достаточно простыми, доступными для исследования, а с другой — должны сохранить существенные черты изучаемого явления. Именно потому, что в формуле — идеальной модели второго рода — отсутствуют второстепенные признаки явления, она описывает не одно какое-либо явление, а многие, сходные с ним по количественным или пространственным характеристикам. Например, одно и то же дифференциальное уравнение описывает радиоактивный распад вещества, изменение атмосферного давления в зависимости от изменения высоты вблизи от земной поверхности, охлаждение нагретого тела вследствие теплообмена с окружающей средой, изменение силы тока при разрыве электрической цепи с индуктивностью. Уравнение $y = a^x$ характеризует рост производительности труда, увеличение грузоподъемности транспорта, дрейф льда в Арктике и другие явления. Анализируя уравнения, решая их, ученый изучает существующие или логически возможные объекты реальной действительности. Область применения формул всегда шире, чем область, из описания которой они возникли. В этом сущность „мудрости формул", содержащих больше информации об исследуемом явлении, чем можно ожидать.

Именно решая или исследуя уравнения, ученые осуществляли открытия на „кончике пера". Например, исследуя формулы закона всемирного тяготения Ньютона, П. Лаплас пришел к выводу о существовании космических объектов, которые теперь называют черными дырами.

Гидрологические уравнения английского физика и математика Д. П. Стокса (1819—1903) способствовали открытию ударных волн, которые лишь через несколько десятилетий удалось получить экспериментально. В современной науке и технике их значение чрезвычайно велико.

Существование радиоволн и скорость их распространения были открыты в результате исследований уравнений Максвелла, которые описывали закономерности электромагнитных явлений. Генрих Герц с восхищением писал о них: „Трудно избавиться от чувства, что эти математические формулы живут независимой жизнью и обладают своим собственным интеллектом, что они мудрее, чем мы сами, мудрее даже, чем их первооткрыватели, и что мы извлекаем из них больше, чем было заложено в них первоначально".

В релятивистское уравнение движения электрона, полученное в 1928 г. Полем Дираком, было заложено существование античастиц. Оно упорно „выдавало" первую из них — позитрон. Это было настолько неожиданно, что лишь после экспериментального открытия этой античастицы в 1932 г. был признан триумф теории ученого.

Каскадом открытий, связанных с движением микрочастиц, увенчались исследования известного уравнения Эрвина Шредингера.

Ярким примером эффективности математического моделирования в физических науках является открытие советскими учеными нового физического эффекта — Т-слоя (теплового слоя). Суть этого эффекта состоит в том, что в плазме, взаимодействующей с магнитным полем, при определенных условиях возникают зоны высокой температуры. В этих зонах — Т-слоях — сосредоточиваются электрические токи, которые разогревают плазму и поддерживают высокую температуру.

Эффект Т-слоя может быть использован в различных устройствах, например в МГД-генераторах.

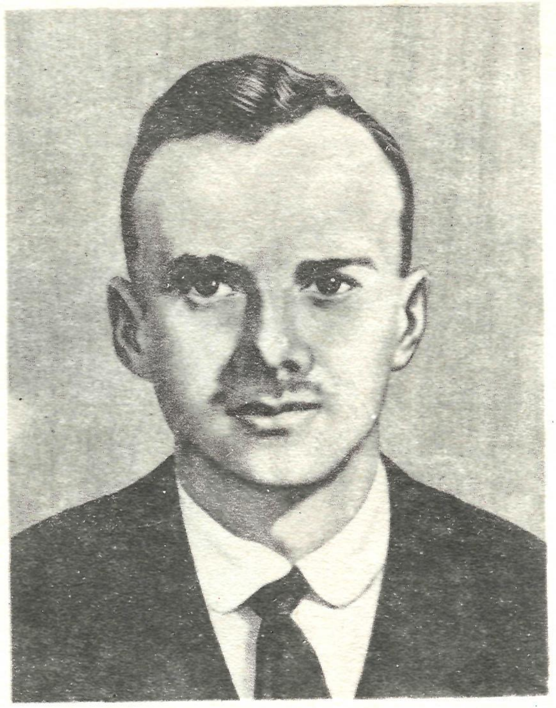
Т-слой был открыт и с высокой точностью описан при помощи вычислительного эксперимента. Необычность нового физического явления, осуществленного математиками, вызвала недоверие к нему со стороны некоторых ученых, к тому же экспериментальная проверка истинности его требовала дорогостоящего оборудования. Три различных научных коллектива Москвы, Новосибирска и Сухуми независимо друг от друга провели на разных установках экспериментальную проверку физического открытия математиков и все три зарегестрировали наличие Т-слоя.

67. Математика в физических науках

Эрвин Шредингер (1887—1961) — выдающийся австрийский физик-теоретик. На основании замечательного волнового уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{d\varphi}{dt} = H\varphi$$

ученые сделали целый ряд важных открытий о свойствах и природе элементарных частиц и закономерностях их взаимодействия.



Поль Адриен Морис Дирак (род. в 1902 г.) — известный английский физик-теоретик, один из творцов квантовой механики, для которой он разработал математический аппарат. Решение релятивистского уравнения Дирака давало два значения полной энергии электрона:

$$E_{1,2} = \pm\sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2}.$$

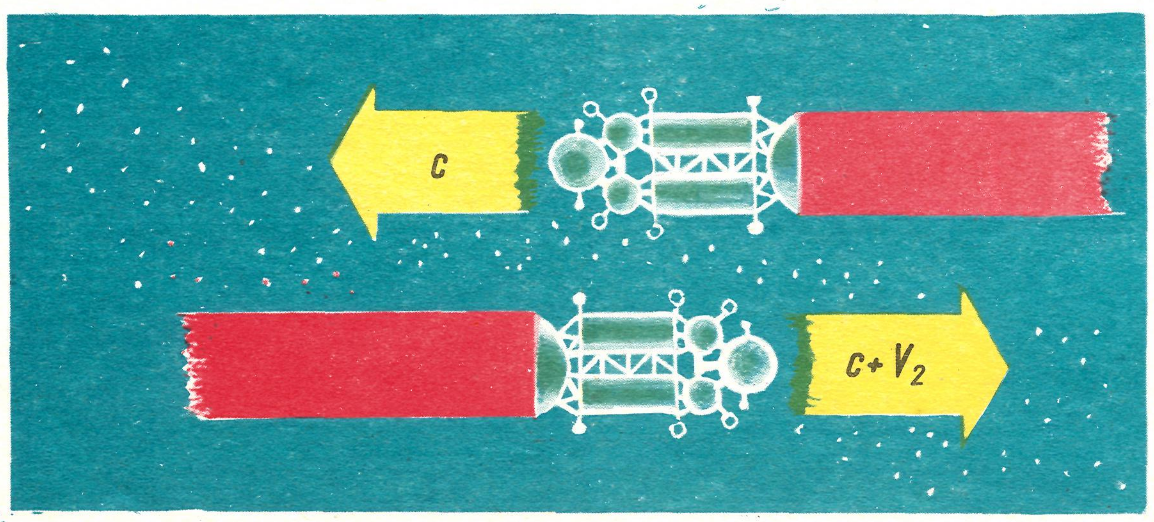
Успешное применение теории групп в физике элементарных частиц привело к открытию в начале 1964 г. новой элементарной частицы омега-минус (Ω^-) бариона.

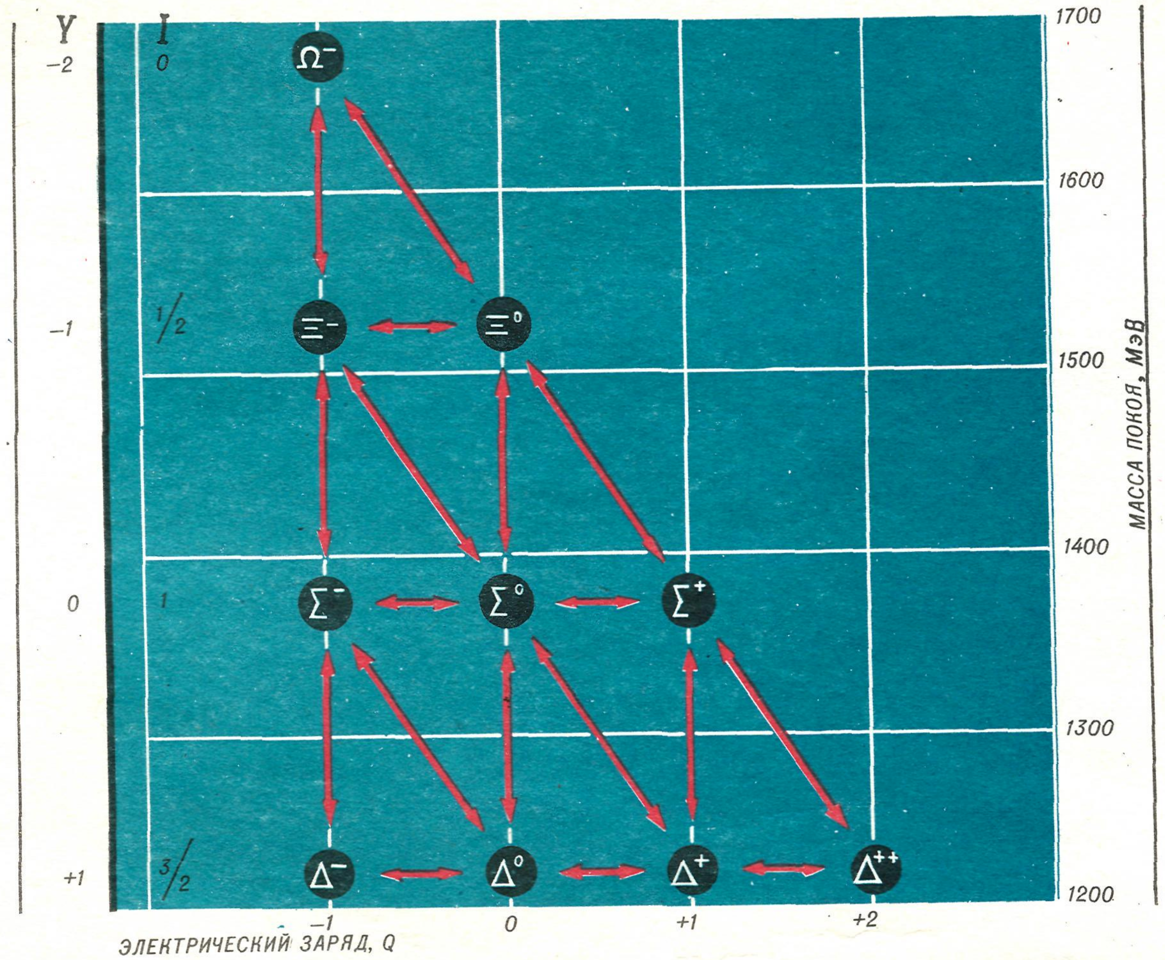
Бесстрастная логика математических расчетов — релятивистский закон сложения скоростей:

$$v = (v_1 + v_2) / (1 + \frac{v_1 v_2}{c^2})$$

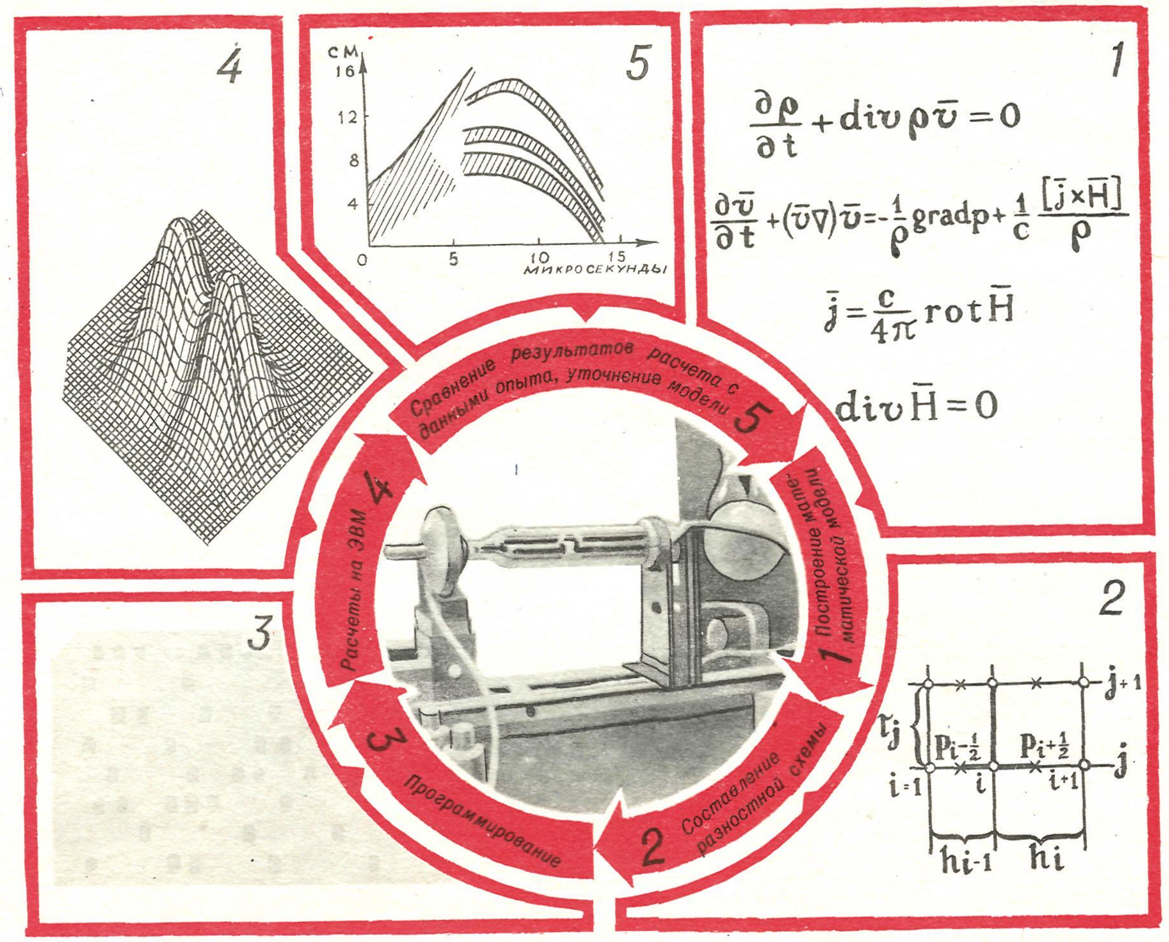
показывает, что относительная скорость двух тел, каждое из которых мчится навстречу друг другу, например, со скоростью света (c) и сверхсветовой скоростью $c + v_2$, равняется только c:

$$v = (c + (c + v_2)) / (1 + \frac{c(c + v_2)}{c^2}) = c.$$



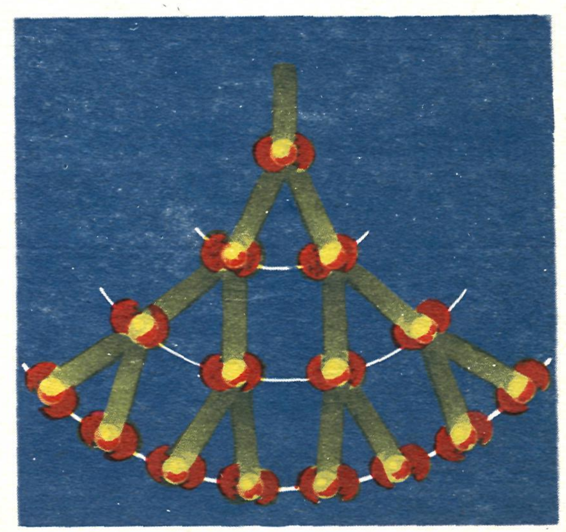


Игорь Васильевич Курчатов (1903—1960) — выдающийся советский физик-теоретик, организатор советской атомной науки и техники, трижды Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской и Государственных премий.

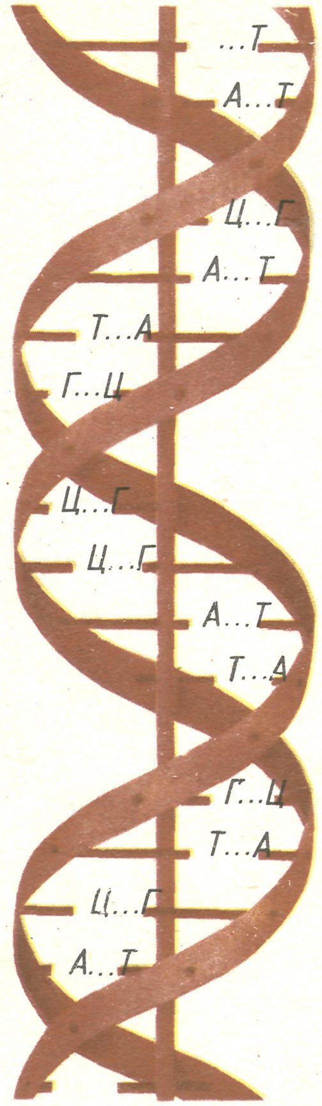


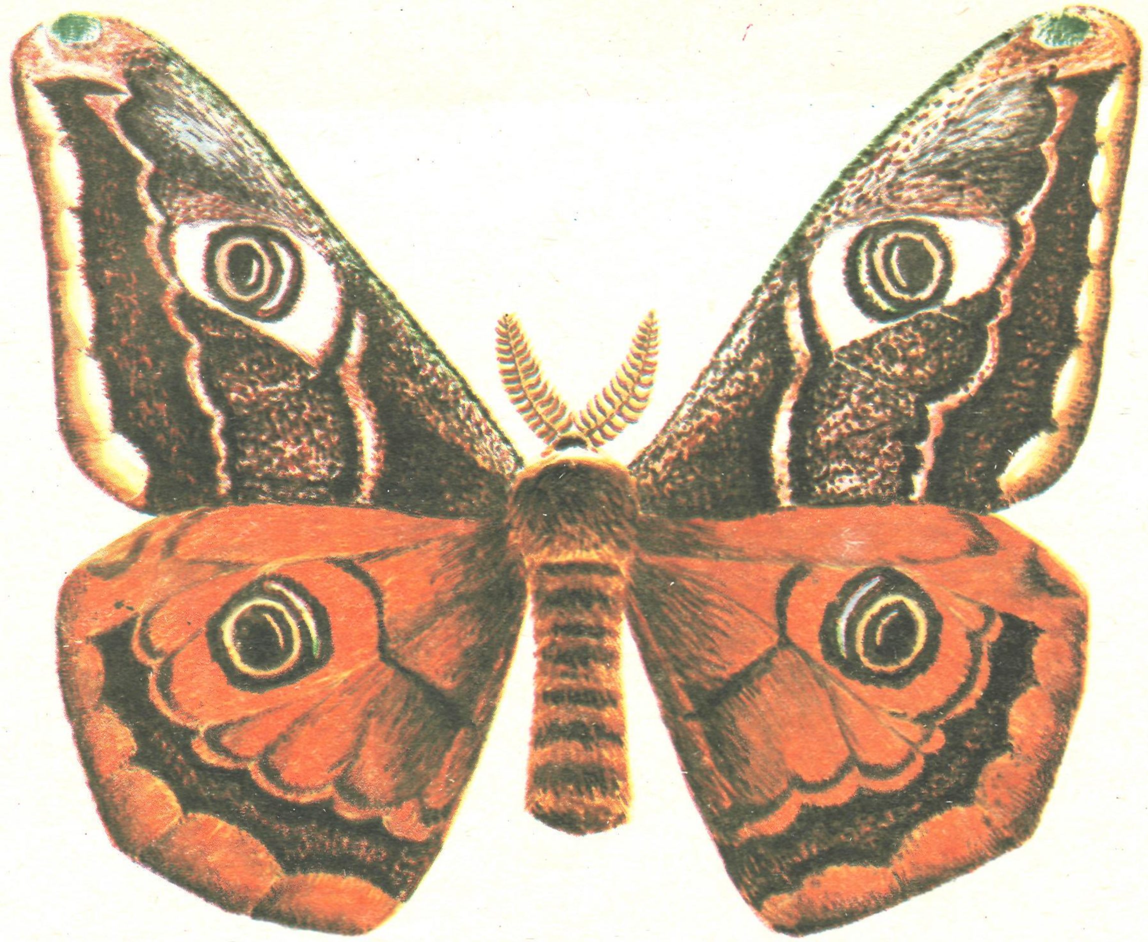
Этапы открытия советскими учеными методом математического моделирования нового физического явления — Т-слоя.

Такой вид имеют первые четыре поколения нейтронов при цепной реакции.



68. Математические закономерности живой природы

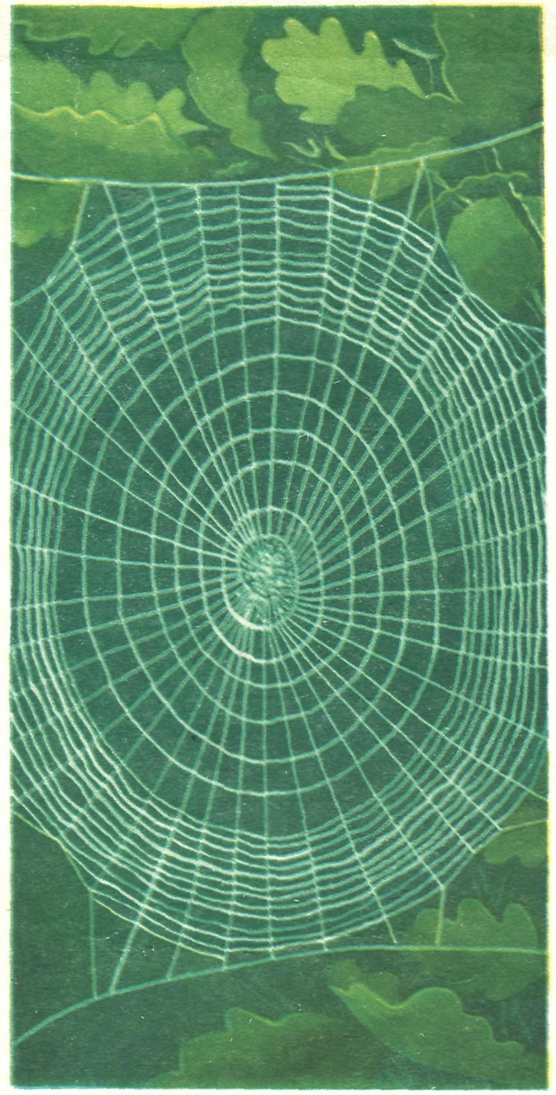




Ярким примером асимметрии живого на субмолекулярном уровне является вторичная форма материальных носителей наследственной информации — двойная спираль молекулы-гиганта ДНК. Но ДНК — уже спираль, накрученная на нуклеосому, она — спираль вдвойне. Жизнь возникает в трудноуловимом, поразительно точном процессе реализации планов природы-архитектора, согласно которым строятся молекулы белка.

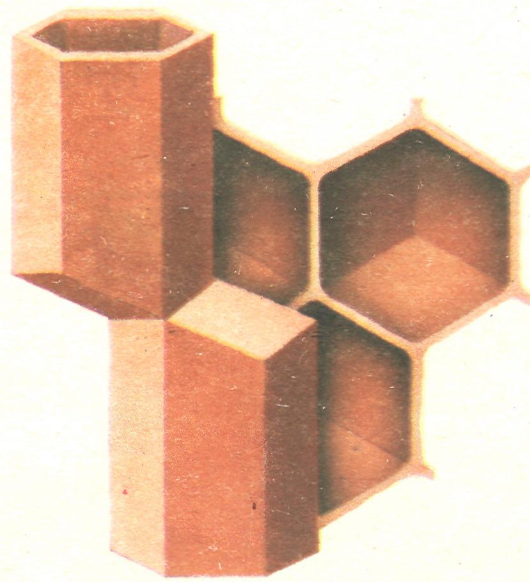
Живая природа демонстрирует также многочисленные симметричные формы организмов. Во многих случаях симметричная форма организма дополняется красочной симметричной расцветкой.

Маленький, едва достигающий 4 мм березовый долгоносик, конечно же, не знает высшей математики. Но, изготовляя колыбельку для своего потомства, он „вычерчивает'', вернее вырезает на листке дерева эволюту — кривую, представляющую собой множество центров кривизны листка. Сам же край листка будет эвольвентой по отношению к кривой, прорезаемой долгоносиком.



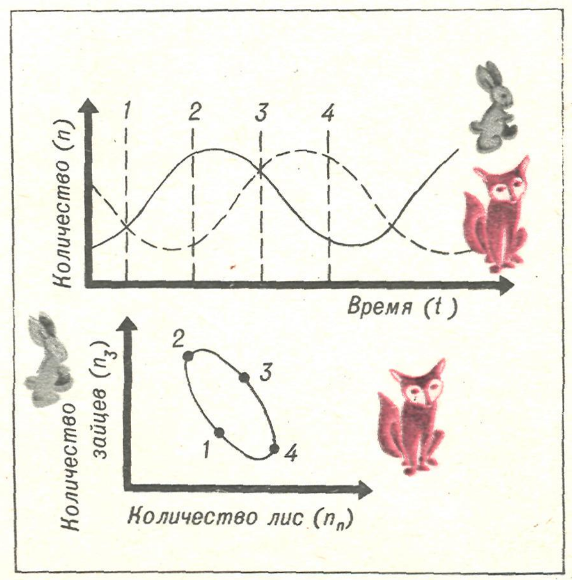
Паук плетет свою западню в форме сложной трансцендентной кривой — логарифмической спирали $\rho = ae^{b\varphi}$.

Сложным геометрическим закономерностям подчинена архитектура ячейки пчелиных сот.



Вито Вольтерра (1860—1940) — выдающийся итальянский математик. Построил теорию динамики численности биологических популяций, в которой применил метод дифференциальных уравнений. Как и большинство математических моделей биологических явлений, она исходит из многих упрощающих предположений.

Теоретические кривые и фазовая кривая колебаний численности популяций в совокупности двух взаимодействующих видов (биоценоза) „хищник — жертва''.



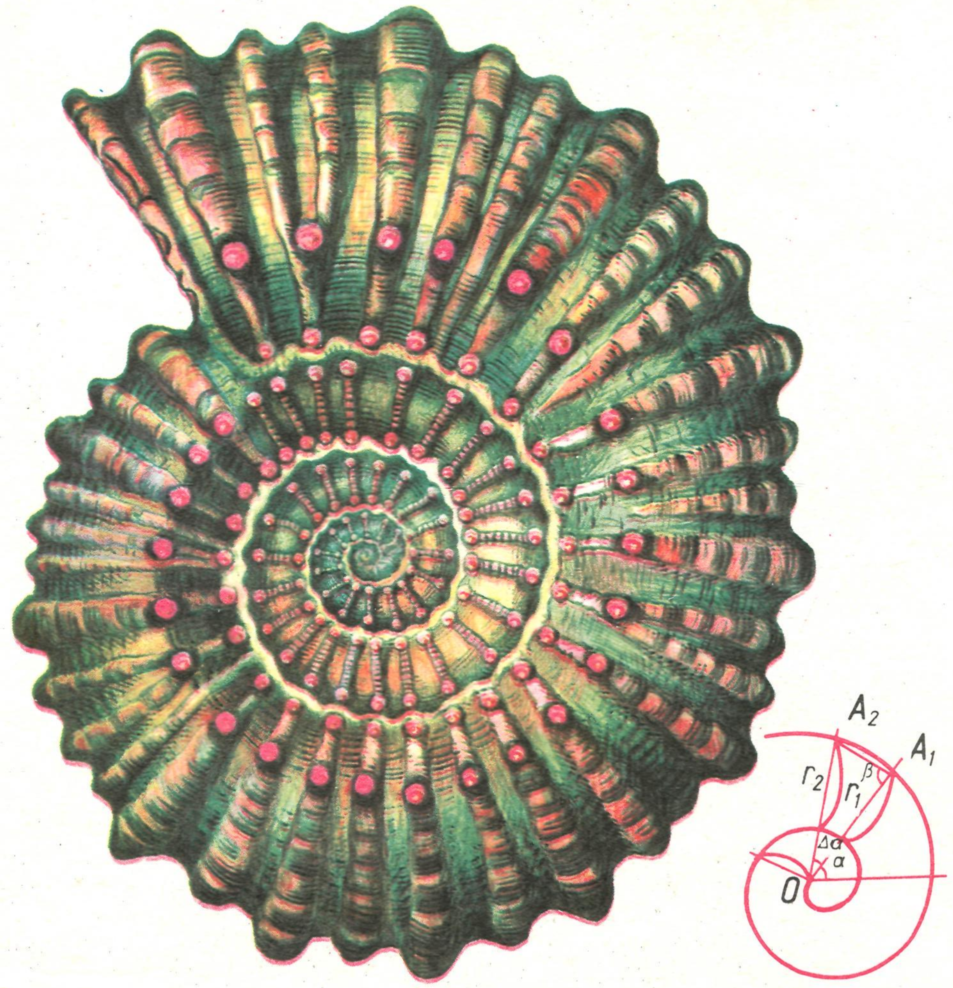
68, 69. Математические закономерности живой природы

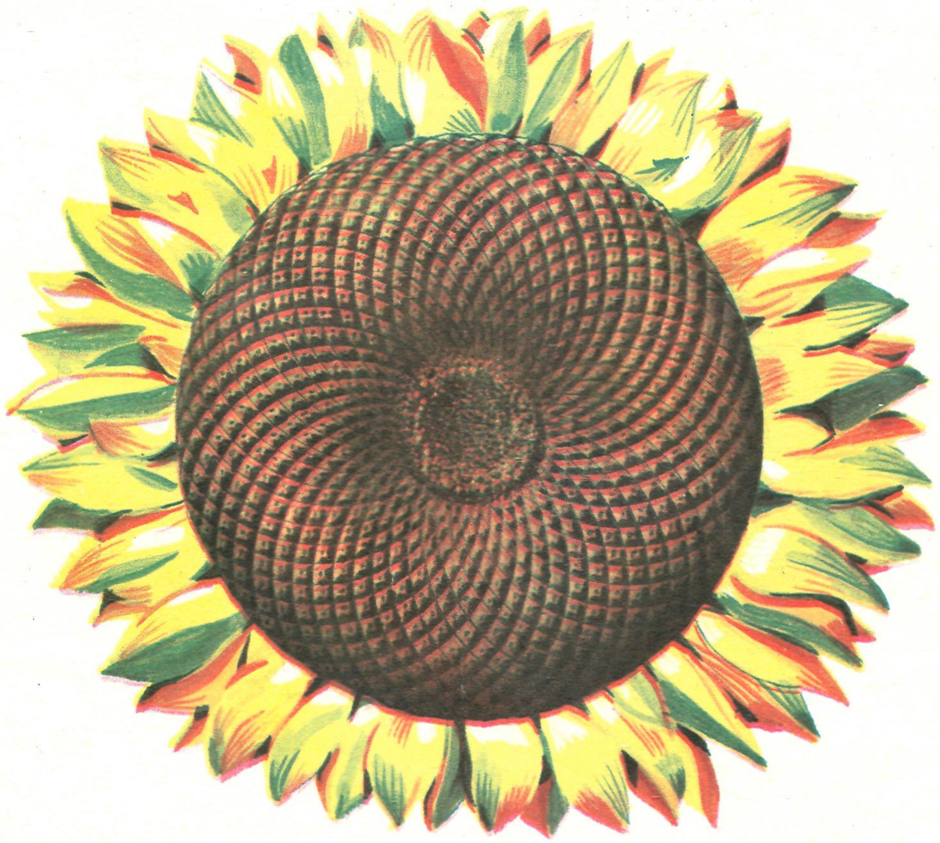
Ф. Энгельс, оценивая проникновение математики в различные области знаний, в фрагментах и заметках к книге „Диалектика природы" писал: „Применение математики: в механике твердых тел абсолютное, в механике газов приблизительное, в механике жидкостей уже труднее; в физике больше в виде попыток и относительно; в химии простейшие уравнения первой степени; в биологии = 0" [1, с. 587]. Несмотря на огромную сложность структуры и функционирования живой материи, математизация знаний проникла и в биологию.

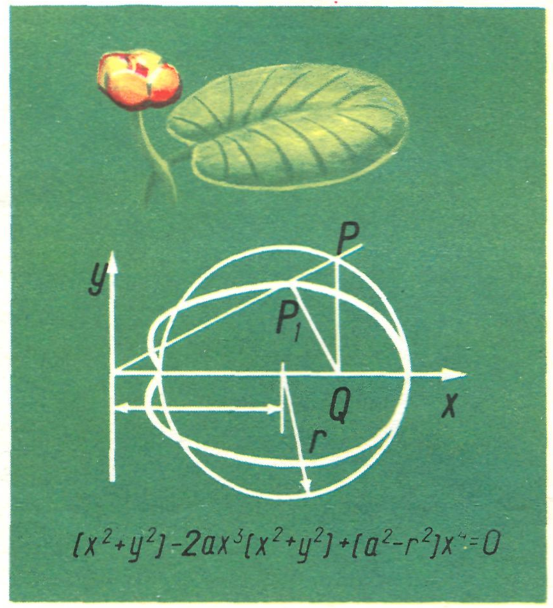
Математическая биология, биологическая математика, биологическая, физиологическая, медицинская, психологическая кибернетика, нейрокибернетика, прикладная биокибернетика и другие отрасли математики исследуют сегодня биологические системы, которые являются завершением определенного этапа развития и самой сложной формой в эволюции материи. Теоретическая биология использует сложный математический аппарат теории вероятностей, интегро-дифференциальных уравнений, математической статистики, теории массового обслуживания и других математических дисциплин.

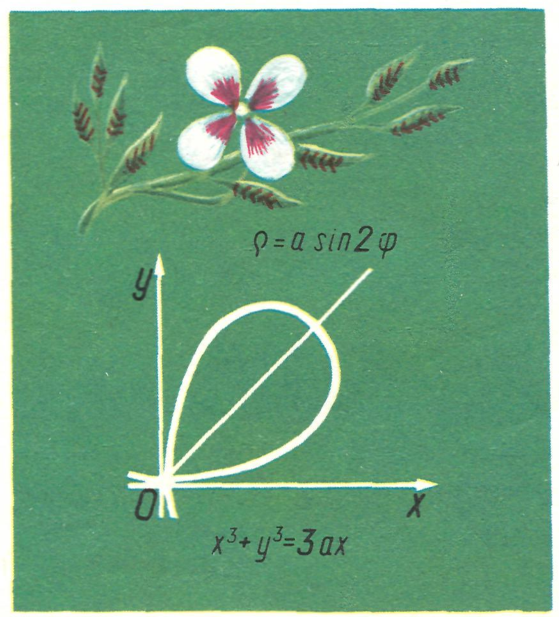
На плакатах представлены примеры математических закономерностей форм живых организмов и своеобразного „решения" ими сложных математических задач, отработанного рефлекторной деятельностью в процессе естественного отбора и борьбы за существование.

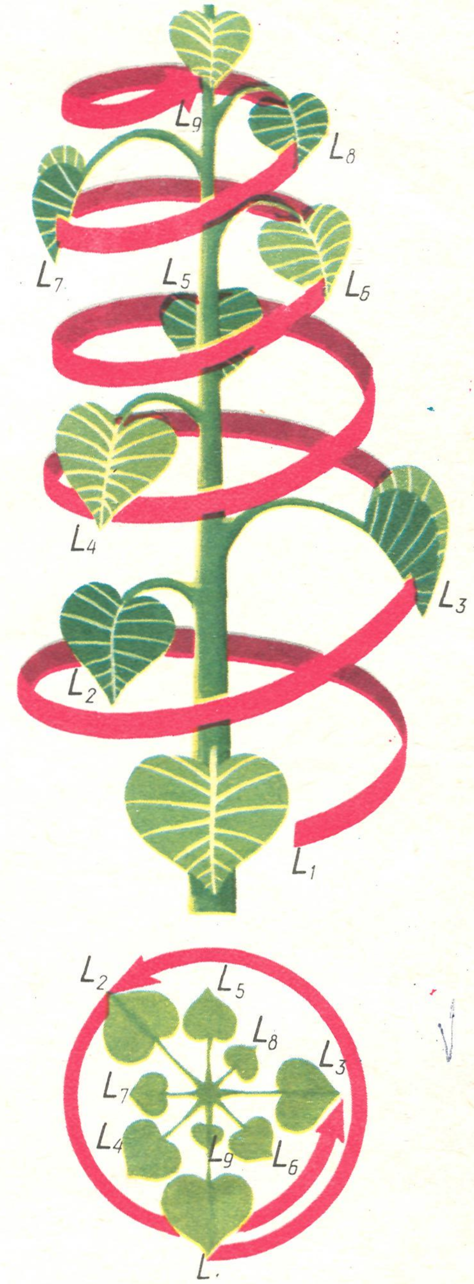
69. Математические закономерности живой природы











В прыжках центр массы животных описывает хорошо известную фигуру — квадратную параболу, ветви которой обращены вниз:

$y=ax^2$, $a>1$, $a<0$.

Раковины моллюсков Nautilus, Haliotis и других формируются в форме логарифмической спирали:

$\rho=ae^{b\varphi}$.

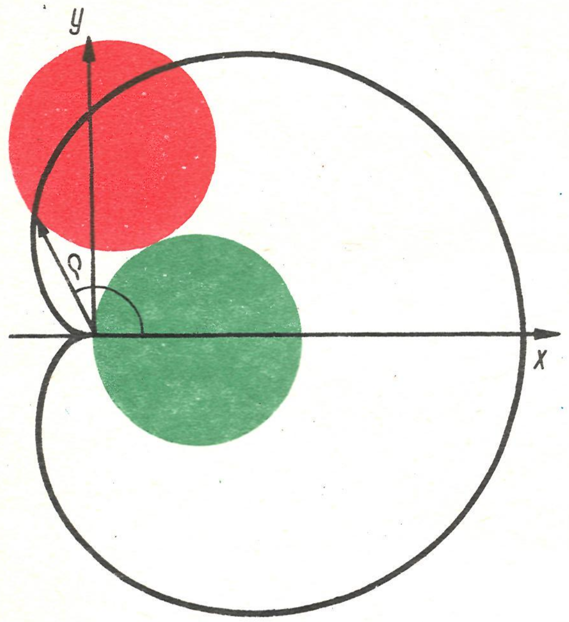
В подсолнухе семечки расположены по характерным дугам, близким к двум семействам логарифмических спиралей.

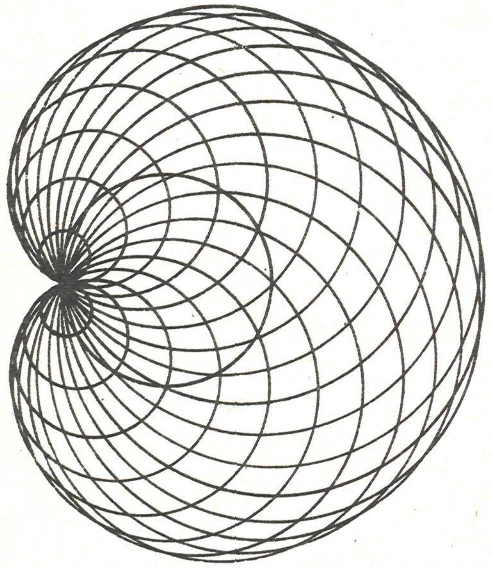
Природа предпочла логарифмическую спираль благодаря многим замечательным свойствам этой кривой. Например, она не изменяется при преобразовании подобия. Следовательно, организму нет надобности перестраивать архитектуру своего тела в процессе роста.

Красивы контуры листьев многих растений. С большой точностью формы их описываются изящными уравнениями в полярной или декартовой системе координат.

Листья на молодых побегах растений располагаются по пространственной спирали. А рассматривая их сверху, обнаружим вторую спираль, поскольку они располагаются еще так, чтобы не мешать друг другу воспринимать солнечный свет. Расстояния между отдельными листьями характеризуются числами ряда Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8,..., u_n, u_{n+1},..., где $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$.

70. Математика и красота





Категория прекрасного имеет исторический характер. При этом понимание эстетической ценности математики отличается исключительным постоянством критериев, являющихся общепринятыми для математиков разных эпох и народов.

Те, кто углублялся в сущность математических отношений, открывали для себя удивительный мир романтики и гармонии. Этот мир был подлинным храмом для Пифагора и его последователей, им восторгался великий философ и естествоиспытатель древности Аристотель (384—322 до н. э.). Только познавший красоту математики мог написать, как Аристотель: „Мы с наслаждением познаем математику... она привлекает нас, как цветок лотоса".

Если одна из равных окружностей без скольжения катится по другой, то точка движущейся окружности опишет кривую, называемую кардиоидой, или улиткой Паскаля (названа она в честь отца гениального французского математика Блеза Паскаля — Этьена Паскаля):

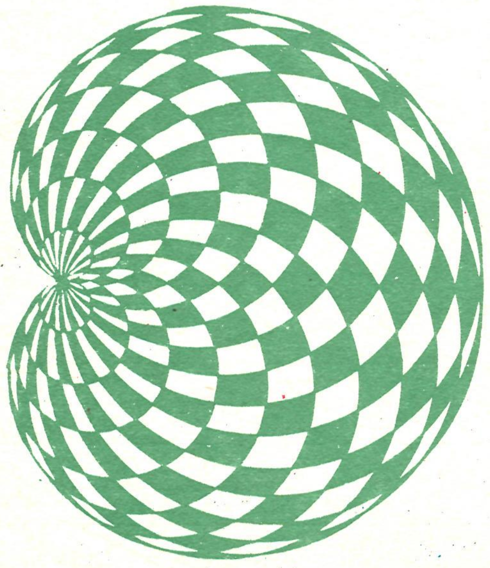
$(x^2+y^2+2rx)^2 = 4r^2\ (x^2+y^2)$

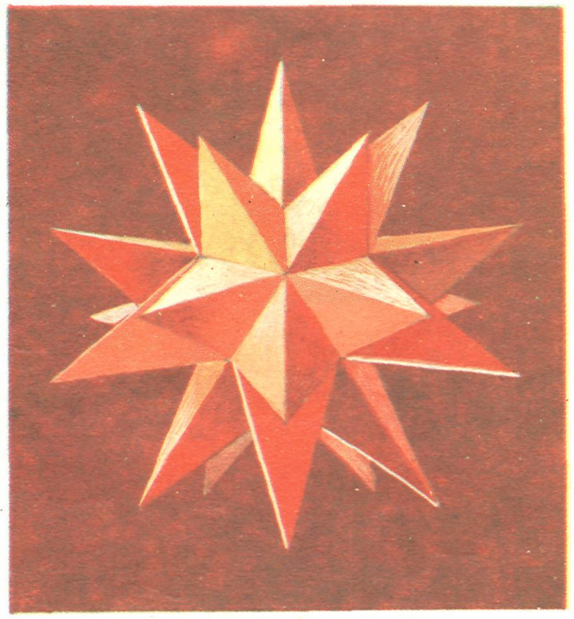
или $\rho = b + a\cos\varphi$

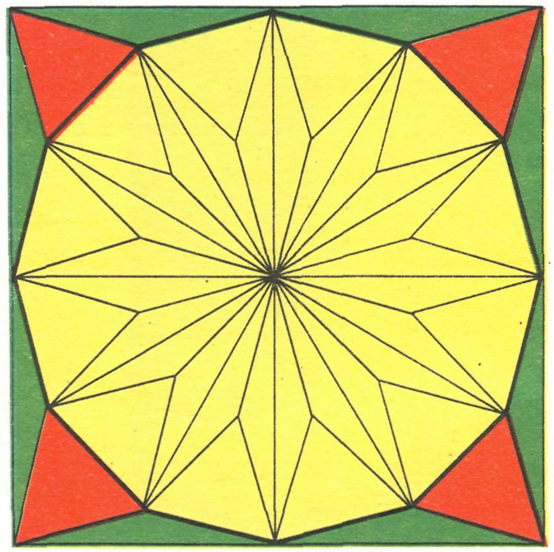
Выберем на данной окружности произвольную точку и проведем через нее множество окружностей так, чтобы центры их лежали на данной окружности. Тогда огибающая множества этих окружностей опять будет кардиоидой. Можно лишь немного дополнить полученный чертеж, и математические зависимости оживают и свидетельствуют об индивидуальной завершенности.

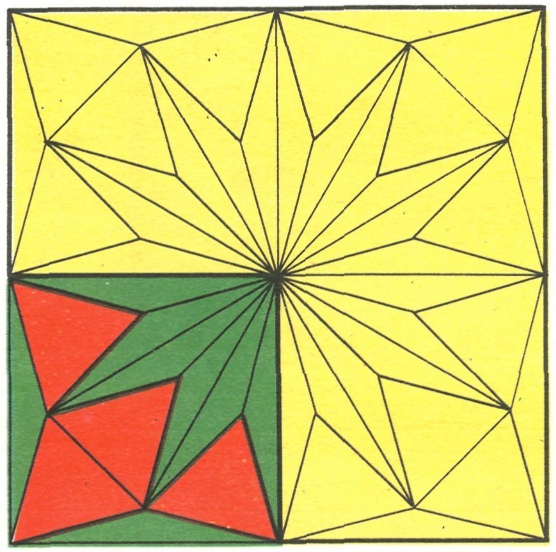
Сколько требовалось фантазии, чтобы в бесконечном, несчетном множестве пространственных форм увидеть шедевры геометрической гармонии, например звездчатые многогранники.

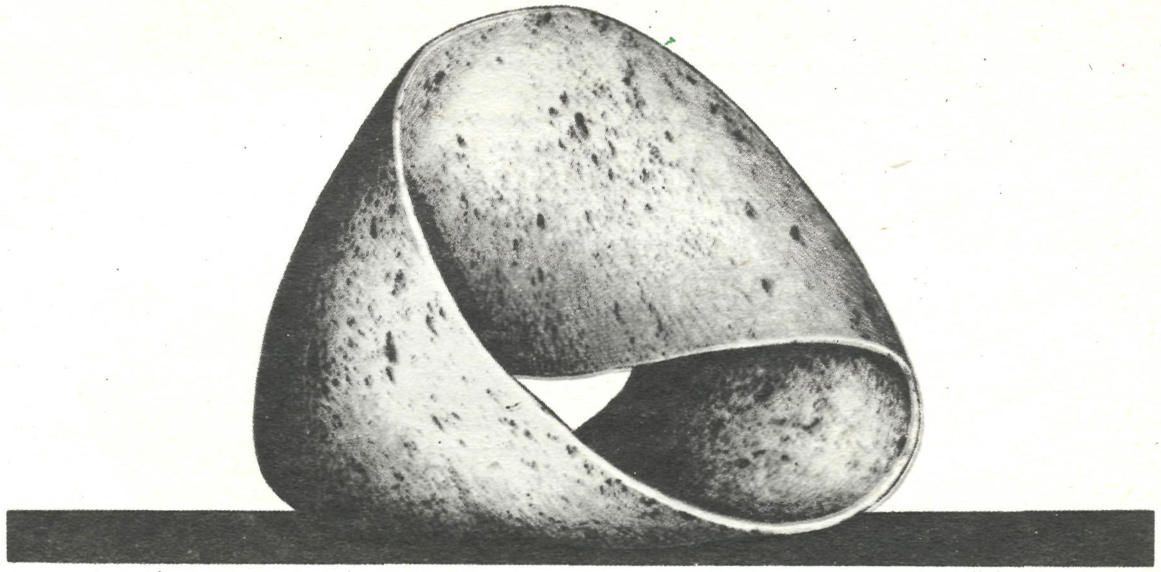
Только мгновения высшего вдохновения могут подарить такие сокровища, как эта теорема венгерского математика И. Кюршака (1864—1933) о том, что площадь правильного двенадцатиугольника, вписанного в единичную окружность, равна трем.



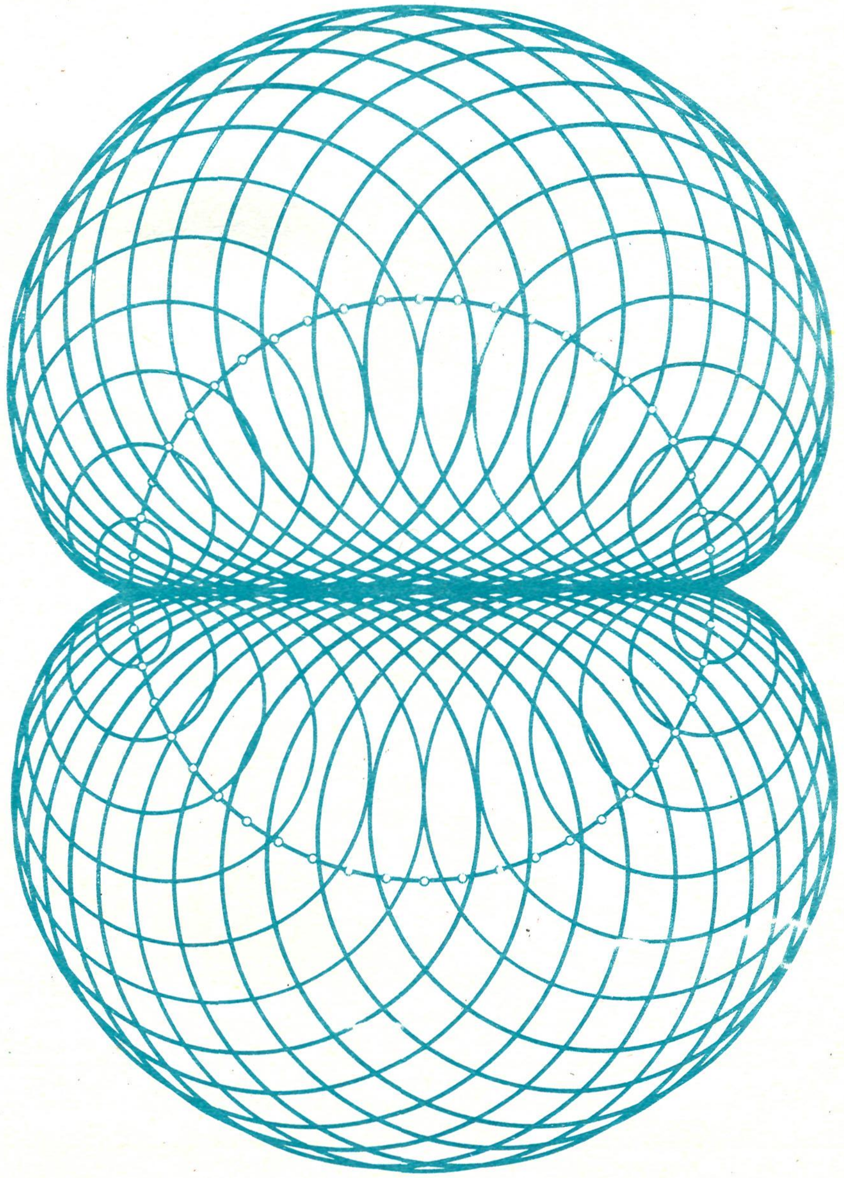








Самой популярной односторонней поверхностью является лист Мёбиуса. К нему не раз прибегали художники и скульпторы. „Узел без конца" — один из серии вариантов листа Мёбиуса скульптора Макса Билла.



Нефроида (от греч. νεφρος — почка) — траектория фиксированной точки движущейся окружности радиуса r, которая катится без скольжения по неподвижной окружности радиуса $2r$.

70, 71. Математика и красота

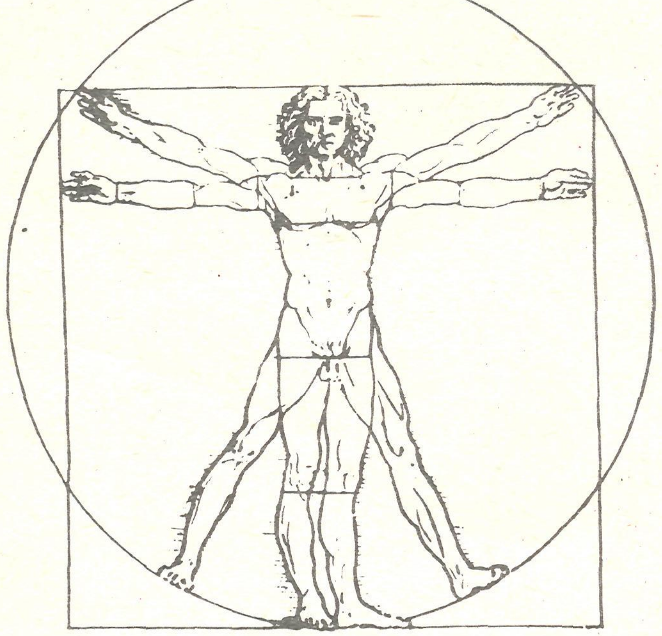
При поверхностном знакомстве с математикой она может показаться непостижимым лабиринтом формул, числовых зависимостей и логических тропинок. Случайных посетителей, не познавших подлинной ценности математических сокровищ, страшит сухая схема математических абстракций, сквозь которую математик видит живое многоцветье реальности.

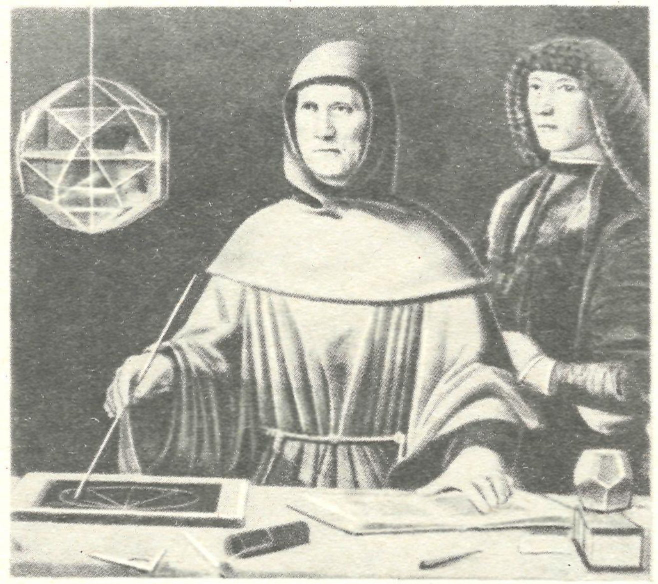
Тот же, кто постиг удивительный мир математики, не остается только восторженным созерцателем ее сокровищ. Он сам стремится создавать новые математические объекты, ищет пути решения новых задач, или новые, более совершенные, решения уже решенных задач. Уже найдено и опубликовано более трехсот доказательств теоремы Пифагора, десятки неклассических квадратур круга, трисекций угла и удвоений куба. Но неспокойная пытливая мысль влечет к новым поискам. При этом даже более чем сам результат привлекает поиск его. Это закономерно. Ведь путь к решению каждой достаточно содержательной задачи — всегда изумительная цепь умозаключений, сцементированная законами логики. Математическое творчество — подлинное пиршество ума. Вот что писал о нем советский математик, чл.-кор. АН УССР Г. Д. Суворов: „Теорема, записанная логически безупречно, действительно представляется лишенной какого-либо поэтического начала и кажется не плодом пламенной фантазии, а хмурым ребенком унылой мамы-логики. Но никто не знает, кроме ученого, какой вихрь фантазии и поэтических взлетов породил в действительности эту теорему. Ведь она была крылатой, экзотической бабочкой, прежде чем ее пленили, усыпили логикой и прикололи к бумаге булавками доказательств!". Закономерно, что в своих воспоминаниях К. Ф. Гаусс, А. Пуанкаре, Ж. Адамар, А. Н. Колмогоров и другие выдающиеся математики рассказали о великой радости, подлинном эстетическом наслаждении, которое они пережили, ища ответы на нерешенные задачи, которые для них были дорогами в незнаемое, поскольку они шли к этим решениям впервые, и математика подарила им полную меру радости первооткрывателей.

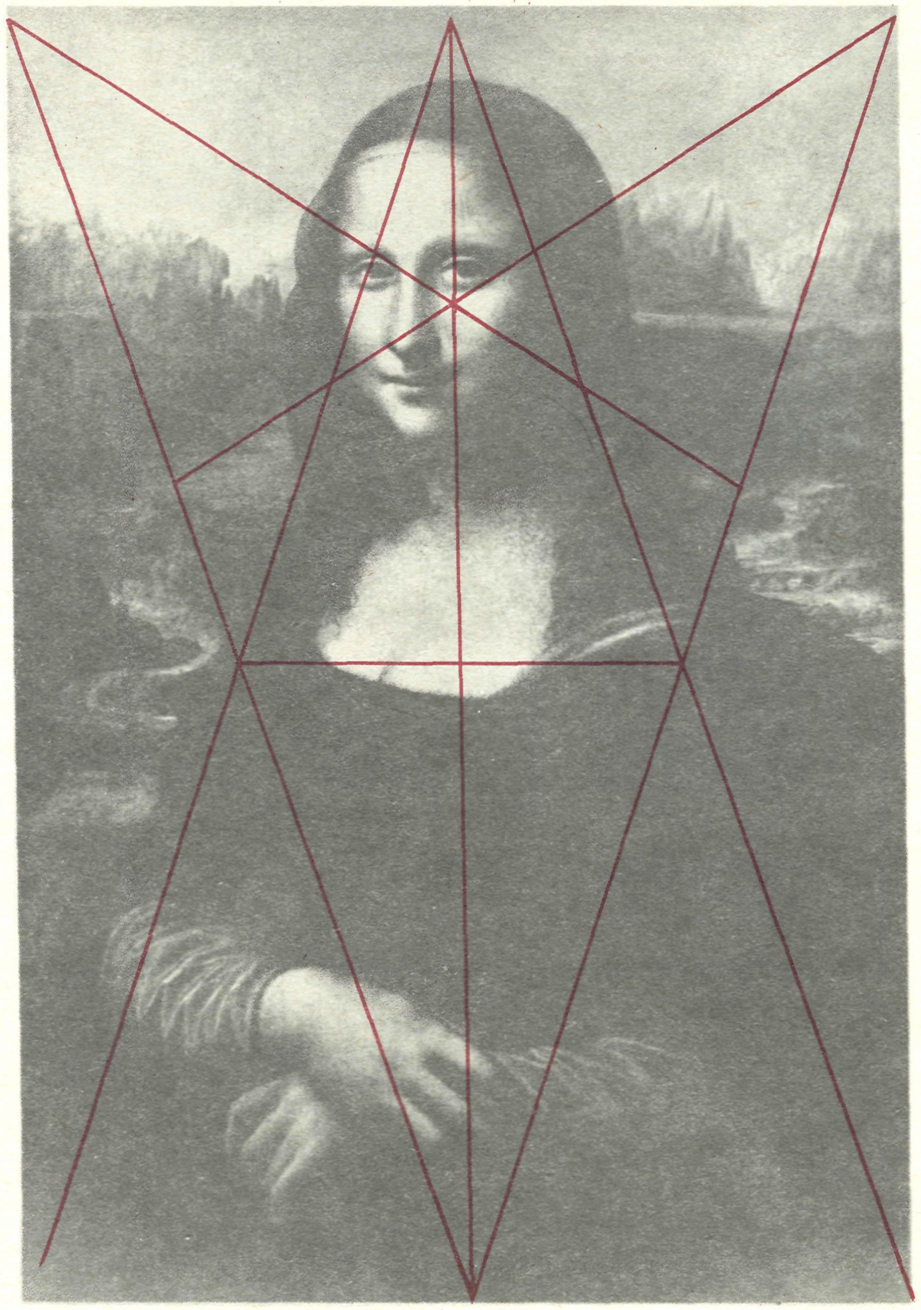
В некоторых задачах среди многих дорог к ответу есть одна, самая неожиданная, часто тщательно „замаскированная" и, как правило, самая красивая и желанная. Большое счастье найти ее и по ней пройти. Поиск таких решений, умение выйти за пределы возможностей уже известных алгоритмов и является подлинной эстетикой математического творчества.

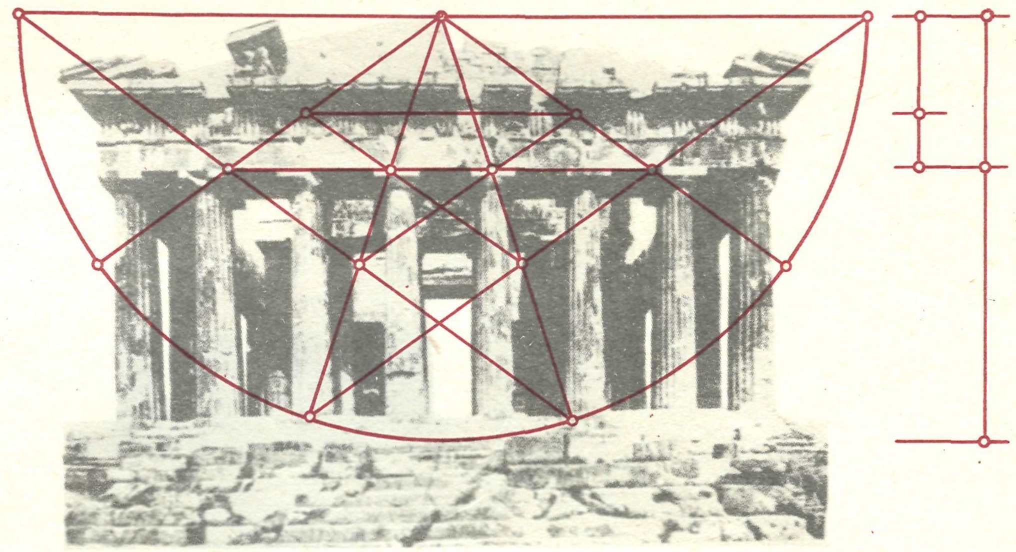
Сами объекты математики, если постичь их содержание, оказываются исполненные особой, высокой, хотя и требовательной, красоты.

71. Математика и красота







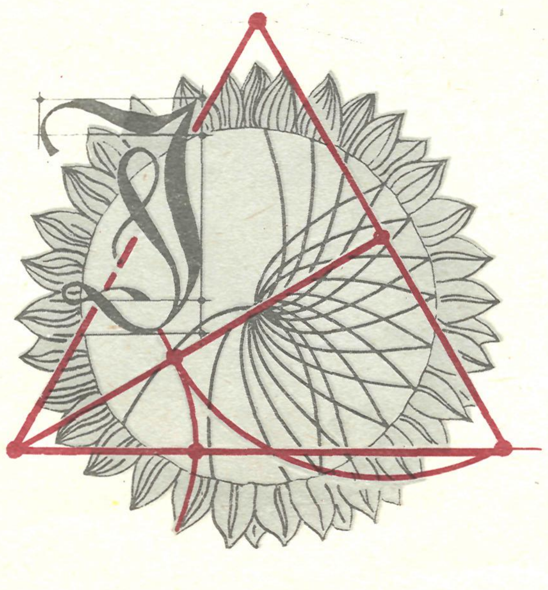


Выдающиеся художники, скульпторы, архитекторы, инженеры широко используют математику и красоту математических зависимостей в своем творчестве.

Итальянский математик Лука Пачоли (ок. 1445 – ок. 1509) написал вдохновенный трактат „Божественная пропорция". Иллюстрации к книге Пачоли выполнил гениальный Леонардо да Винчи (1452–1519), которому и принадлежит термин „золотое сечение".

„Золотое сечение" имеет много интересных свойств и столь часто проявляется в природе, что многие ученые склонны были усматривать в нем универсальную основу прекрасного вообще. И хотя известны многие прекрасные вещи, не связанные с „золотым сечением", ученые и сейчас присматриваются к нему, обнаруживая его свойства в неожиданных областях техники, производства, науки и быта.

Изучая бессмертное творение Леонардо да Винчи – портрет Монны Лизы (Джоконды), исследователи выявили, что вся композиция рисунка основана на треугольниках, являющихся частями правильного звездчатого пятиугольника, т. е. связана с „золотыми треугольниками".



Парфенон (V в. до н. э.) – храм богини Афины. Конструктивно и композиционно построен на связанных между собой строгих математических пропорциях. Ученые обнаружили в размерах его конструкций отношения подобия, „золотого сечения", динамические прямоугольные треугольники, расчлененные в определенных отношениях окружности, отношения 1 : 2 и 1 : 5. Такие пропорции обусловили неповторимое совершенство этого шедевра архитектуры.

Красоту математических зависимостей широко используют и в современной архитектуре.

72. Л. Ф. Магницкий и его «Арифметика»

Аріѳмєтіка, практіка или дѣятелная.

Что єсть аріѳмєтіка;

Аріѳмєтіка или числителница, єсть художество честное, независтное, и всѣмъ удобопонятное, многополезнѣйшее, и многохвалнѣйшее, от древнѣйшихъ же и новѣйшихъ, въ разная времена явлшихся изряднѣйшихъ аріѳмєтіковъ, изобрѣтенное, и изложенное.

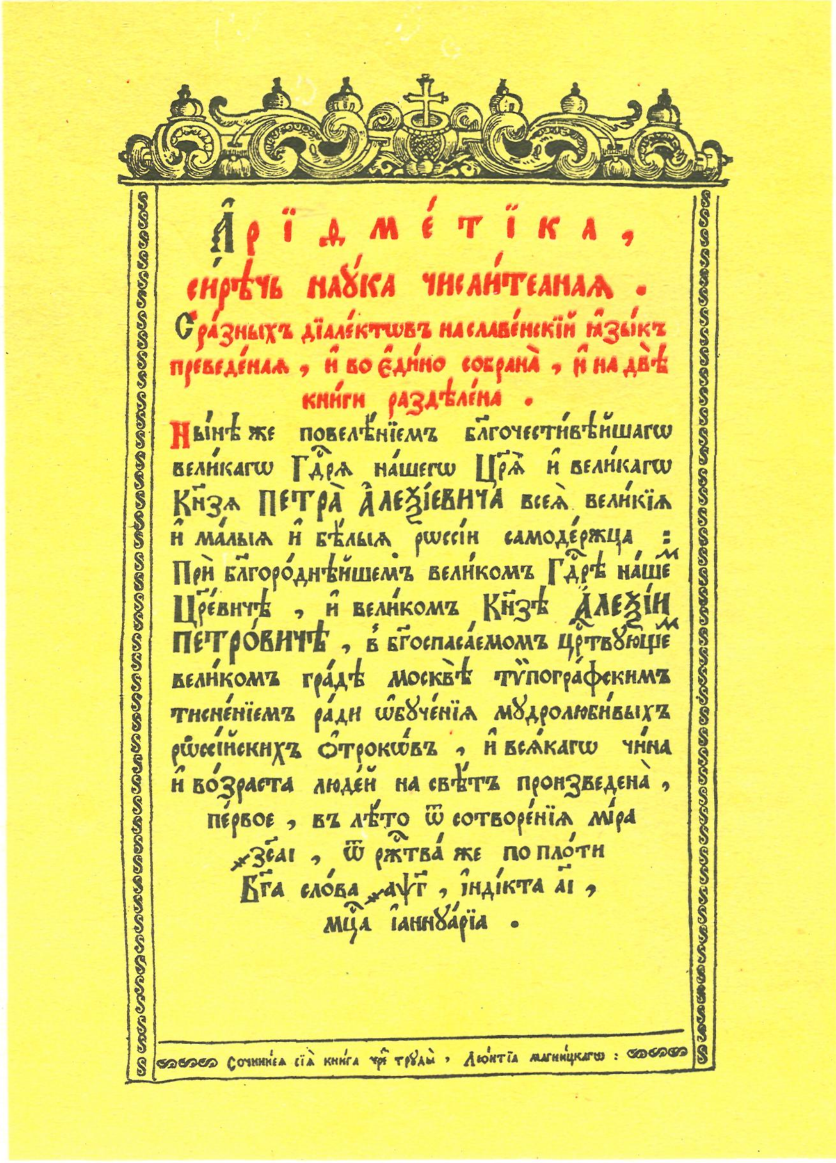
Колико губъ єсть аріѳмєтіка практіка;

Єсть сугуба.

1 Аріѳмєтіка політіка, или гражданская.

2 Аріѳмєтіка логістіка, не ко гражданству токмо, но и к движенію небесныхъ круговъ принадлежащая.

Страница из „Арифметики" Л. Ф. Магницкого.



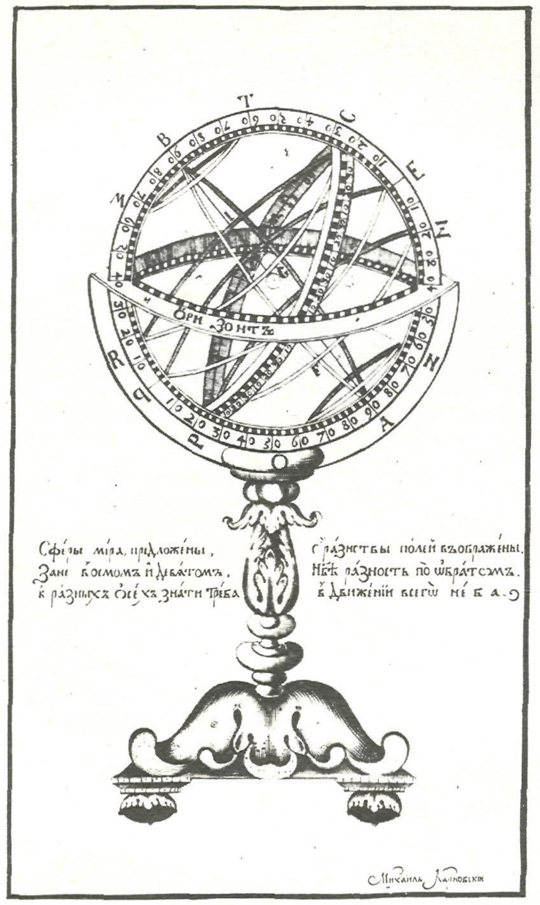
Аріѳмєтіка, сирѣчь наука числителная.

С разныхъ діалектовъ на славенскій языкъ преведеная, и во едино собрана, и на двѣ книги раздѣлена.

Нынѣ же повелѣніемъ благочестивѣйшаго великаго Г͠дря нашего Ц͠ря и великаго К͠нзя Петра Алексіевича всея великія и малыя и бѣлыя россіи самодержца: При благороднѣйшемъ великомъ Г͠дрѣ нашемъ Царевичѣ, и великомъ Кн͠зѣ Алексіи Петровичѣ, в богоспасаемомъ царствующемъ великомъ градѣ Москвѣ типографскимъ тисненіемъ ради обученія мудролюбивыхъ россійскихъ отроковъ, и всякаго чина и возраста людей на свѣтъ произведена, первое, въ лѣто от сотворенія міра ЗСАІ, от рж͠тва же по плоти Б͠га слова АΨГ, індікта АІ, м͠ца іаннуаріа.

Сочиненіе сія книги чрез труды Леонтія Магницкаго.

Титульная страница „Арифметики" Л. Ф. Магницкого



. Гравюра Карновского из книги Л. Ф. Магницкого с изображением армилярной сферы.

В 1703 г. вместе с Фархварсоном и Гвином Магницкий опубликовал в Москве „Таблицы логарифмов и синусов, тангенсов и секансов", „Во употребление и знание математико-навигацким ученикам". Титульная страница второго издания этих таблиц (1716).

Леонтий Филиппович Магницкий (1669—1739) — выдающийся представитель отечественной науки и культуры, русский педагог-математик, преподаватель и руководитель Навигацкой школы, организатор математического образования в военных учебных заведениях. Автор знаменитой книги „Арифметика сиречь наука числительная. С разных диалектов на славянский язык переведенная и воедино собрана и на две книги разделена". Большой том „Арифметики" (662 с.) в количестве 2400 экземпляров был напечатан в Москве в январе 1703 г. Это был первый печатный русский курс математики и кораблевождения. Он пользовался необыкновенной популярностью и около 50 лет не имел конкурентов. М. В. Ломоносов назвал „Арифметику" Магницкого и „Грамматику" Смотрицкого „вратами своей учености". „Арифметика" Магницкого оказала огромную услугу математическому образованию в нашей стране.

Некто нанял работника на год, обещая ему дать 12 руб. и кафтан. Однако работник, проработав 7 месяцев, захотел оставить работу и попросил расчет. Ему было выплачено 5 руб. и кафтан. Сколько стоит кафтан?

* * *

Один человек выпьет бочонок пива за 14 дней, а вместе с женой — за 10 дней. За сколько дней одна жена выпьет тот же бочонок пива?

Сухаревская, или Сретинская, башня, в которой размещалась школа математических и навигацких наук, организована в 1701 г. В ней Л. Ф. Магницкий проработал 39 лет. Он преподавал математику и другие науки, заведовал учебной частью, а потом был ее руководителем. Для учеников этой школы Л. Ф. Магницкий и написал учебник „Арифметика".

72. Л. Ф. Магницкий и его «Арифметика»

„Вратами своей учености" назвал М. В. Ломоносов книги, взятые у соседей и принесенные с далекого севера в Москву. Первой среди них была „Арифметика" Л. Ф. Магницкого (1669—1739), которую ученый знал наизусть. Эта книга, принадлежащая первому русскому учителю математики, многим открыла путь в мир чисел и фигур. На протяжении первой половины XVIII в. „Арифметика" Магницкого не знала равных и была в России основным учебником математики.

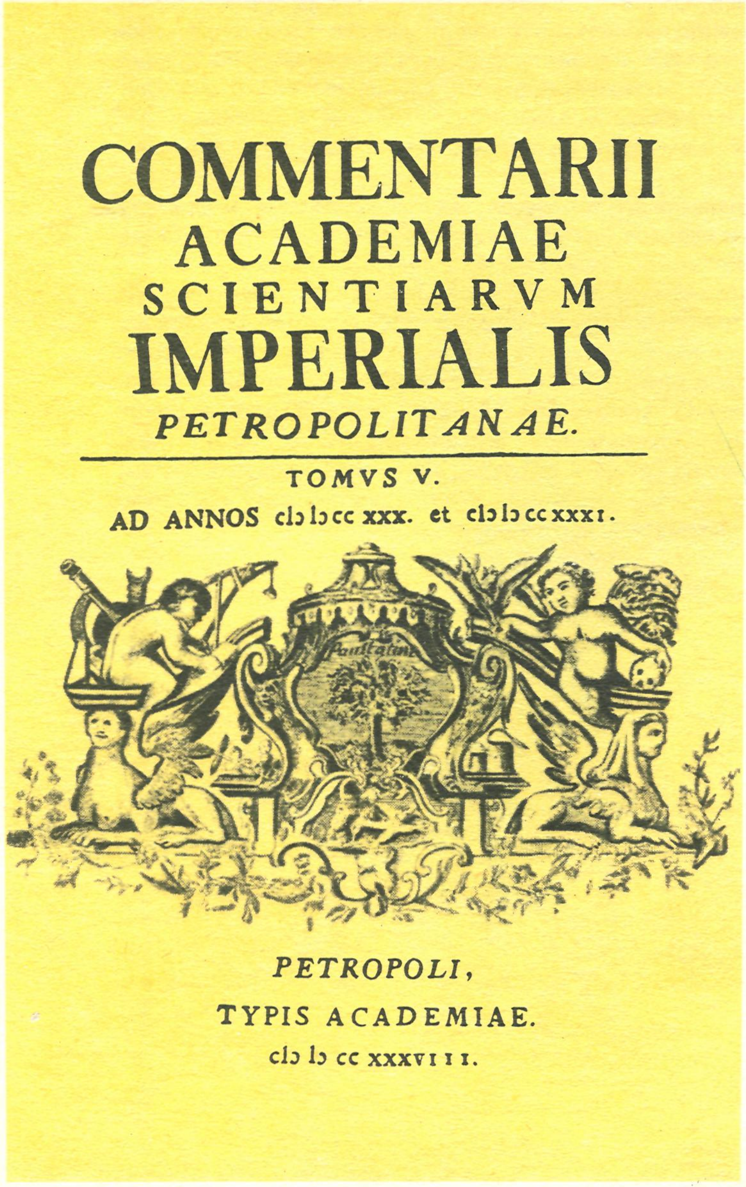
Задачи из его „Арифметики" могут послужить прекрасным материалом для пробуждения интереса к математике и патриотического воспитания.

73. Леонард Эйлер

Леонард Эйлер (1707–1783) — величайший математик, физик, астроном. Работал во всех разделах современной ему математики, физики, астрономии, баллистики, картографии, навигации, кораблестроения, математической биологии, математической теории музыки. Отдал много сил работам по методике преподавания математических дисциплин, подготовке педагогических и научных кадров для молодой Петербургской Академии наук.

Ученый представил в виде единой научной теории и обосновал важнейшие дисциплины классической высшей математики. Он заложил основы целого ряда новых математических дисциплин. Его творчество имело огромное влияние на развитие математики и ее применений.

За успешное решение задач, предлагавшихся Парижской Академией наук, Эйлер 12 раз получал премии. Парижская АН, уставом которой предусматривалось лишь 40 академиков, учитывая исключительные заслуги ученого перед наукой, избрала его (в мае 1755 г.) „сверх штата" своим иностранным членом.



COMMENTARII
ACADEMIAE
SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE.

TOMVS V.
AD ANNOS cIↄIↄcc xxx. et cIↄIↄccxxxi.

PETROPOLI,
TYPIS ACADEMIAE.
cIↄIↄ cc xxxviii.

...Эйлер увлек за собой последующие поколения и научил их думать и писать так, как думал и писал он сам. Чтение его работ является самым легким и самым полезным делом. Он соединил в своем лице славу великого преобразователя со славой очень ясного и очень изящного писателя.

М. В. Остроградский

Научный журнал „Записки Императорской Петербургской Академии наук" с первых же номеров завоевал мировой авторитет. В журнале была опубликована бо́льшая часть научных работ Леонарда Эйлера.

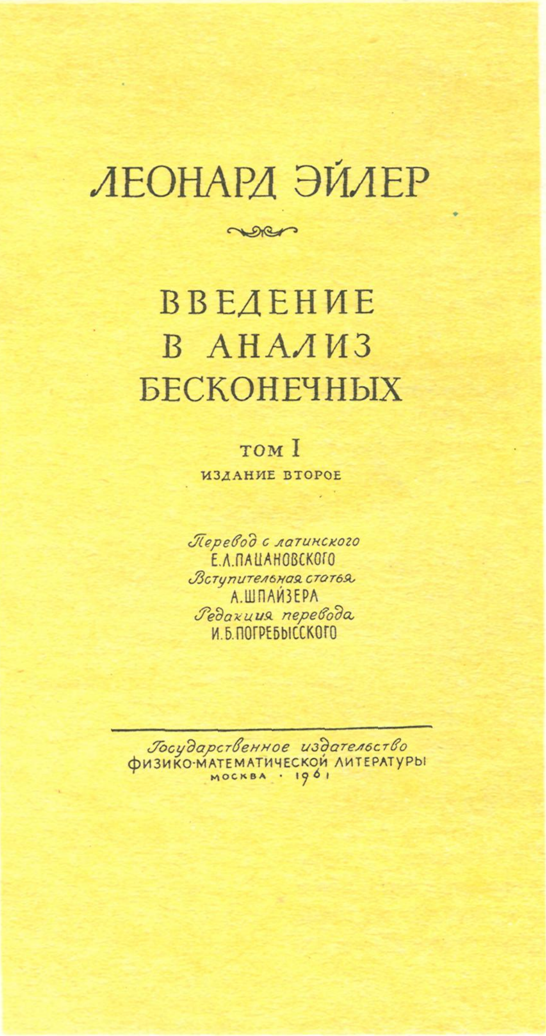
В 1740 г. Эйлер открыл одну из замечательнейших математических формул: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Из нее, как частный случай при $x = \pi$, он получил подлинный шедевр — концентрированное представление глубочайших теоретико-числовых отношений: $e^{\pi i} = -1$.

Эйлер — автор целого ряда интересных формул для выражения числа π бесконечными суммами и произведениями:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{2^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{3^2-1} \cdot \frac{5^2}{5^2-1} \dots;$$

$$\frac{\pi^2}{2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \dots .$$

В 1756 г. Эйлер доказал важную теорему теории многогранников, ставшую позднее первой теоремой комбинаторной топологии. Если B — число вершин, Γ — число граней, P — число ребер выпуклого многогранника, то всегда $B + \Gamma - P = 2$.



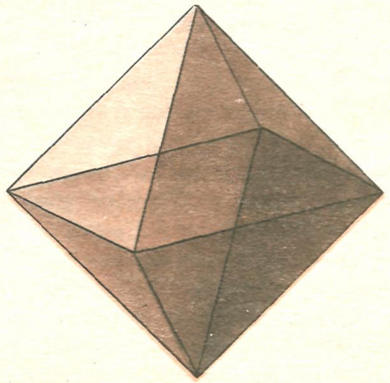
ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

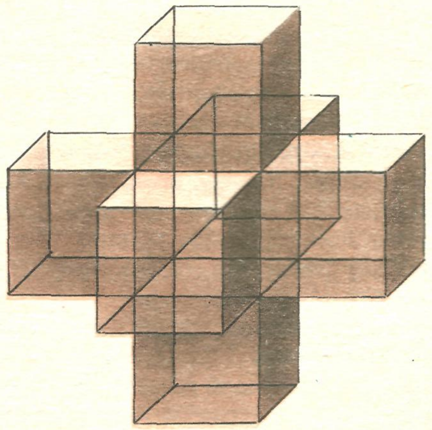
ВВЕДЕНИЕ
В АНАЛИЗ
БЕСКОНЕЧНЫХ

ТОМ I
ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

Перевод с латинского
Е. Л. ПАЦАНОВСКОГО
Вступительная статья
А. ШПАЙЗЕРА
Редакция перевода
И. Б. ПОГРЕБЫССКОГО

Государственное издательство
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА · 1961





73. Леонард Эйлер

Маленькая горная Швейцария дала миру много известных ученых. Достаточно назвать замечательную династию Бернулли. Вблизи швейцарского города Базеля в селе Рихен родился и Леонард Эйлер — выдающийся математик, физик, механик и астроном. Отец Леонарда был сельским пастором и хотел, чтобы сын наследовал его профессию. Поэтому в Базельском университете молодому Эйлеру пришлось изучать схоластические премудрости и только втайне от родителей посещать лекции по математике. На его математическое дарование обратил внимание профессор математики Иоганн I Бернулли (1667—1748) и начал проводить дополнительные занятия с талантливым студентом. Он познакомил Леонарда со своими сыновьями Николаем (1695—1726) и Даниилом (1700—1782), которые также увлекались математикой.

После окончания университета в Швейцарии не нашли работы ни братья Бернулли, ни Л. Эйлер. Бернулли вскоре уехали в Россию. 29 января 1724 г. Петр I обосновал Петербургскую Академию наук, работать в которой пригласили ряд зарубежных ученых. Эйлер также пожелал выехать в Петербург, и братья Бернулли сообщили, что в Академии предполагается вакансия на кафедре физиологии. Готовясь к будущей деятельности, Эйлер стал изучать медицину.

В 1727 г. в Базельском университете он успешно защитил диссертацию на тему „О природе образования и распространения звука" и подготовил на конкурс Парижской Академии сочинение о лучшем размещении мачт на корабле. У себя на родине он видел морские корабли только на картинках. Но математика помогла молодому ученому с такой глубиной разработать эту важную для навигации тему, что его работа была одобрена и напечатана в сборнике конкурсных работ.

По приглашению Петербургской Академии наук 5 апреля 1727 г. Л. Эйлер выехал в Россию. Трудными были первые шаги в Академии. Дворцовые интриги, подозрительное отношение к деятельности ученых делали нелегкой жизнь ученых того времени. Но в России Эйлер нашел то, чего не могла дать ему его родина — возможность заниматься математикой и ее приложениями. Это была его стихия. Вскоре после приезда Эйлер подал на рассмотрение конференции 13 докладов и сразу же активно включился во все виды научных и учебных работ, какие проводила Академия и где только можно было применить математику. В 1740 г. его назначили директором географического департамента. Кроме того, он занимался решением сложных задач кораблестроения и навигации, писал учебные пособия, читал лекции, организовывал и проводил экзамены в гимназии и военных учебных заведениях, популяризировал науку, рецензировал присылаемые в Академию работы, был членом многих экспертных комиссий. Эйлер был единственным академиком, который поддерживал гениального изобретателя И. П. Кулибина и помог ему в расчетах одноарочного моста через Неву.

Ученый работал самозабвенно, не щадя себя. Когда в 1738 г. Академия получила от правительства срочное задание: за несколько месяцев выполнить большую вычислительную работу, необходимую для картографов, Эйлер взялся и выполнил ее за три дня. Но огромное напряжение вызвало заболевание, вследствие которого он перестал видеть правым глазом. Ученый стойко перенес это несчастье, заметив, что теперь у него будет вдвое меньше причин отвлекаться от математики.

Во времена бироновщины жизнь стала настолько неспокойной, что ученый после 14-летнего плодотворного труда в России летом 1741 г. выехал в Берлин. Однако связь с Петербургской Академией не прерывал. Он руководил научной работой молодых русских ученых, закупал для Петербургской Академии приборы и литературу, рецензировал работы русских ученых. Особенно высоко он ценил научную деятельность М. В. Ломоносова и этим предотвратил расправу над гениальным ученым, которую пытался учинить секретарь Академии Шумахер. Научная продуктивность ученого в это время достигла таких масштабов, что обе академии (Петербургская и Берлинская) не успевали печатать его произведения.

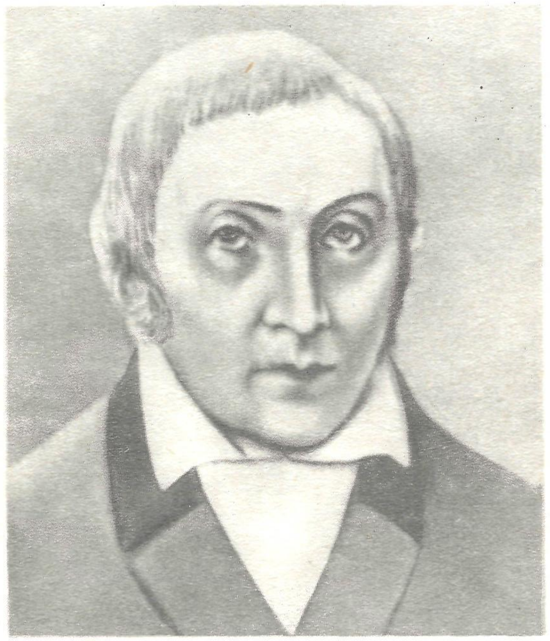
Русские ученые ходатайствовали о возвращении Эйлера в Россию. Но только 25 лет спустя, в июле 1766 г., ученый со всей семьей навсегда вернулся в Россию. Здесь полной мерой раскрылся его уникальный талант. Он составил большой план научных исследований, выполнение которого стало делом его жизни и принесло ему мировую славу.

Но огромная напряженная работа привела к полной потере зрения. Это новое несчастье не остановило научной деятельности ученого. Он диктовал свои работы секретарям, а его мозг с удивительной всевозрастающей продуктивностью генерировал новые плодотворные идеи, раскрывал еще не разгаданные тайны математики и природы. Его феноменальная память хранила огромное количество фактов, а вычислял он с легкостью, которая и сегодня вызывает удивление.

Огромным был и диапазон его интересов. Он прекрасно знал литературу, историю всех времен и народов, языки древние, восточные, народов Западной Европы, русский, ботанику, химию, физику, анатомию, медицину.

И все же только потомки смогли увидеть и полной мерой оценить все, что создал этот великий труженик науки. В 1909 г. Швейцарское естественно-научное общество начало издание полного собрания сочинений Эйлера (Opera omma . . .), которое завершено в 1975 г. 72 больших тома по 600 страниц каждый содержат более 880 научных работ, среди которых 20 больших двух-, трехтомных монографий. Эпистолярное наследие ученого составляет около 3000 писем, большинство из которых также являются законченными научными сообщениями. Его интересы простирались на всю математику и ее приложения от механики до математической теории музыки.

74. Михаил Васильевич Остроградский

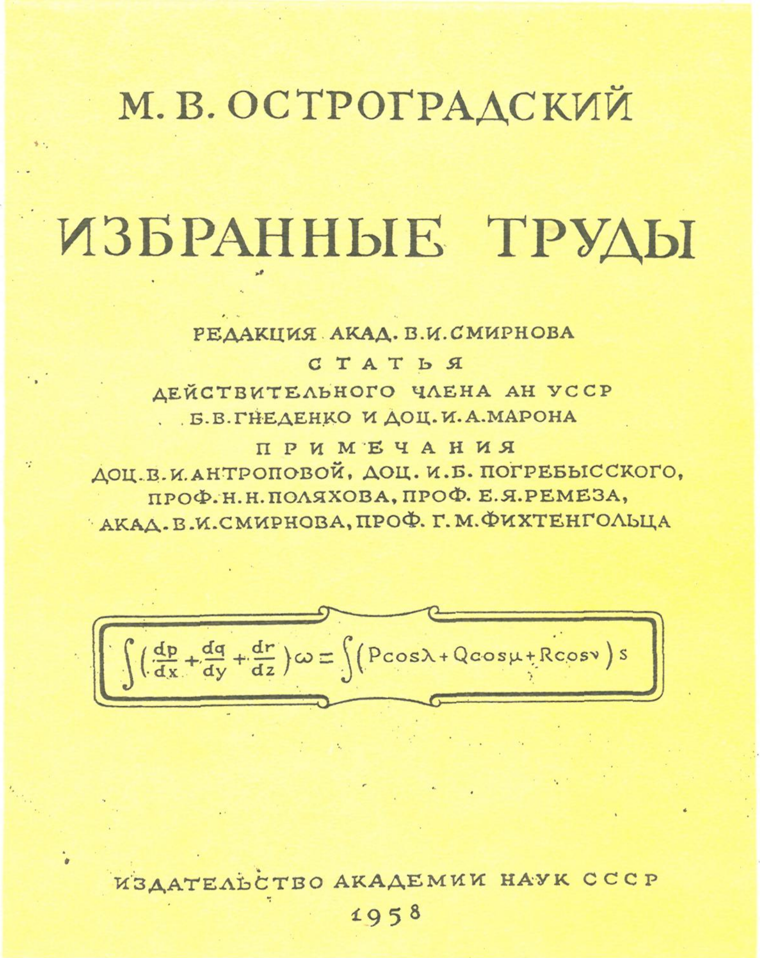


Харьковский университет — один из старейших учебных заведений нашей страны. М. В. Остроградский учился в нем и трижды блестяще сдал выпускные экзамены за полный курс обучения, а также экзамены на ученую степень кандидата наук. Однако активные действия реакционных кругов университета лишили его возможности получить диплом кандидата наук или хотя бы диплом об окончании университета.

Андрей Федорович Павловский (1789—1857) — один из лучших профессоров физико-математического факультета Харьковского университета. Первым обнаружил математическую одаренность М. В. Остроградского и руководил его научными занятиями, с восторгом наблюдал за успехами своего ученика.

Тимофей Федорович Осиповский (1765—1832) — выдающийся отечественный естествоиспытатель, деятель математического просвещения, непримиримый борец с идеализмом и религиозным мракобесием. В 1813—1820 гг. был ректором Харьковского университета. Имел большое влияние на научные интересы М. В. Остроградского. Боролся за признание таланта своего ученика, подвергался преследованиям со стороны царской администрации и в расцвете творческих сил был уволен с работы в университете.

Первый научный труд М. В. Остроградский написал в парижской долговой тюрьме Клиши. Труд ученого прорецензировал и высоко оценил выдающийся французский математик Огюстен Коши (1789—1857). На математическую общественность России большое впечатление произвели печатные отзывы О. Коши о математических успехах молодого М. В. Остроградского.



М. В. ОСТРОГРАДСКИЙ

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

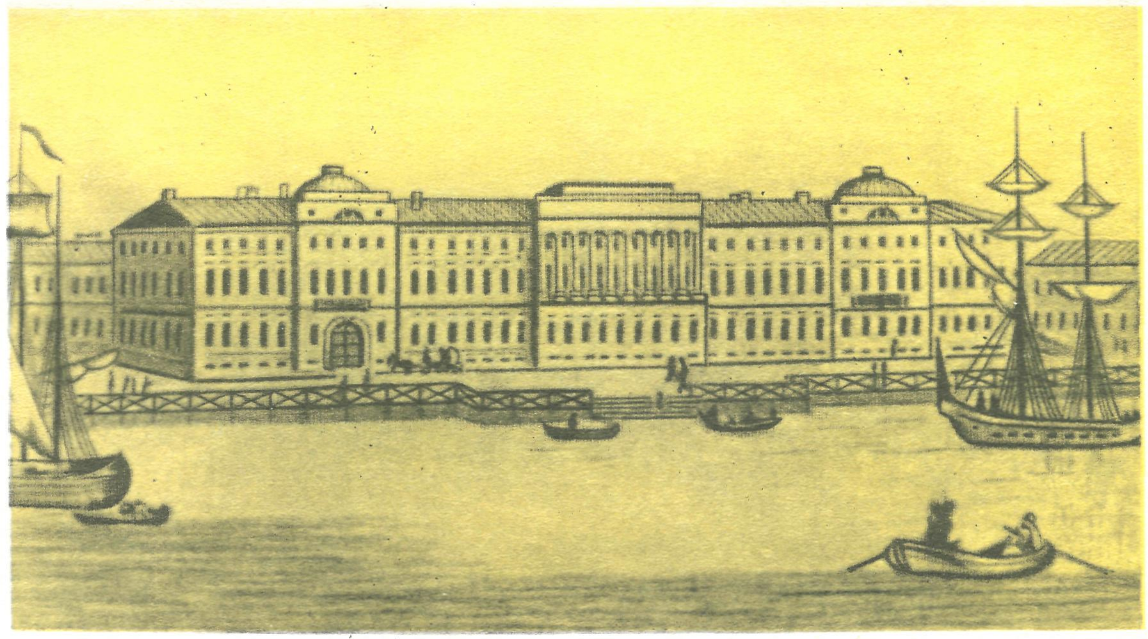
РЕДАКЦИЯ АКАД. В. И. СМИРНОВА
СТАТЬЯ
ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧЛЕНА АН УССР
Б. В. ГНЕДЕНКО И ДОЦ. И. А. МАРОНА
ПРИМЕЧАНИЯ
ДОЦ. В. И. АНТРОПОВОЙ, ДОЦ. И. Б. ПОГРЕБЫССКОГО,
ПРОФ. Н. Н. ПОЛЯХОВА, ПРОФ. Е. Я. РЕМЕЗА,
АКАД. В. И. СМИРНОВА, ПРОФ. Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦА

$$\int\left(\frac{dp}{dx}+\frac{dq}{dy}+\frac{dr}{dz}\right)\omega=\int\left(P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu\right)s$$

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
1958

Михаил Васильевич Остроградский (1801—1862) — выдающийся отечественный математик и механик, активный деятель математического образования в средних и высших учебных заведениях страны. Важным этапом в становлении М. В. Остроградского как ученого были годы, проведенные им в Париже, где он непосредственно общался с выдающимися учеными П. С. Лапласом, О. Коши, Ж. Фурье и др. Работал в Морском кадетском корпусе, Институте инженеров путей сообщения, Главном педагогическом институте, Инженерной и Артиллерийской Академиях, а также был главным наблюдателем за преподаванием физико-математических наук в военно-учебных заведениях России, преподавателем математических наук в Институте инженеров путей сообщения и строительном училище.

Научные исследования М. В. Остроградского посвящены решению сложных и актуальных вопросов математического анализа, механики, гидродинамики, баллистики, небесной механики и другим применениям математических методов в естествознании и технике.

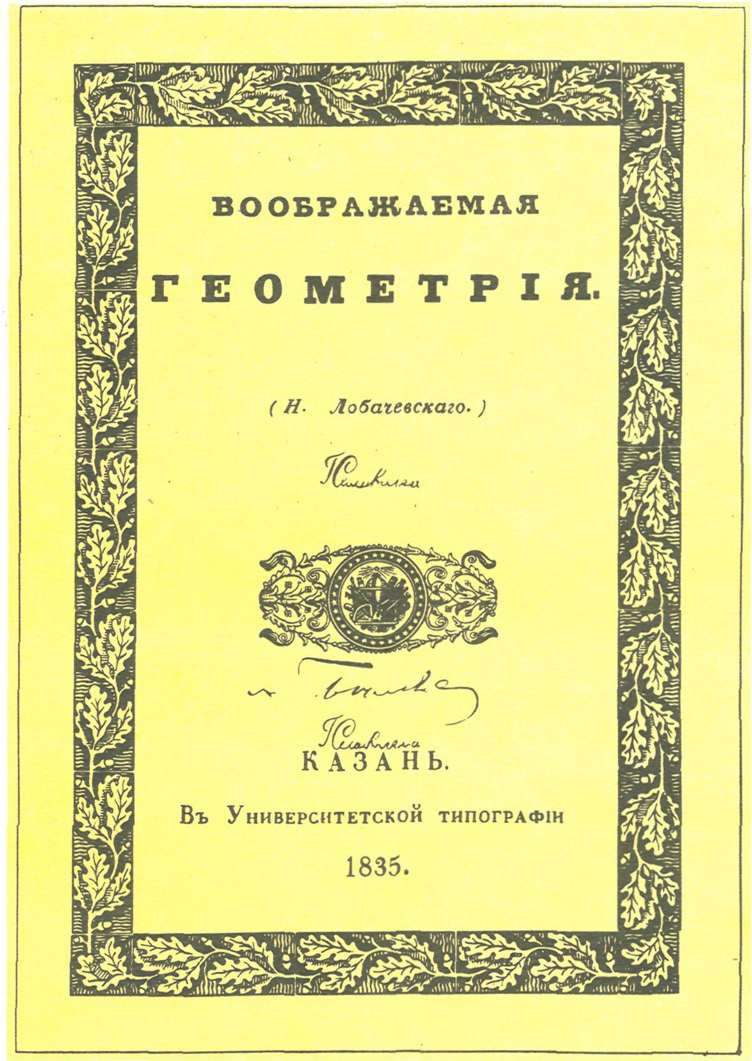


74. Михаил Васильевич Остроградский

М. В. Остроградский — выдающийся русский математик, деятель в области методики преподавания математики в высших технических и военных учебных заведениях. Несмотря на неблагоприятные условия обучения в Царской России 20-х годов XIX в. — времен жестокой политической реакции — Остроградский получил высшее образование и быстро овладел проблематикой математики. Первые его творческие шаги свидетельствовали о появлении в России нового талантливого математика, преподавателя, методиста. М. В. Остроградский был членом Петербургской Академии наук, Академии наук в Нью-Йорке, Туринской Академии, Национальной Академии деи Линчеи (Рысеглазых) в Риме, членом-корреспондентом Парижской Академии наук.

Его исследования посвящены различным отраслям математики, ее практическому применению и методике преподавания. Ученый достиг выдающихся результатов в механике, дифференциальном и интегральном исчислениях, высшей алгебре, аналитической механике, баллистике, математической физике, теории артиллерийской стрельбы. Очень плодотворной была преподавательская работа Остроградского в технических и военных учебных заведениях. Он воспитал большой отряд талантливых инженеров, уделял много внимания вопросам совершенствования методики преподавания математики в средней школе, высших технических и военных учебных заведениях.

75. Николай Иванович Лобачевский



ВООБРАЖАЕМАЯ

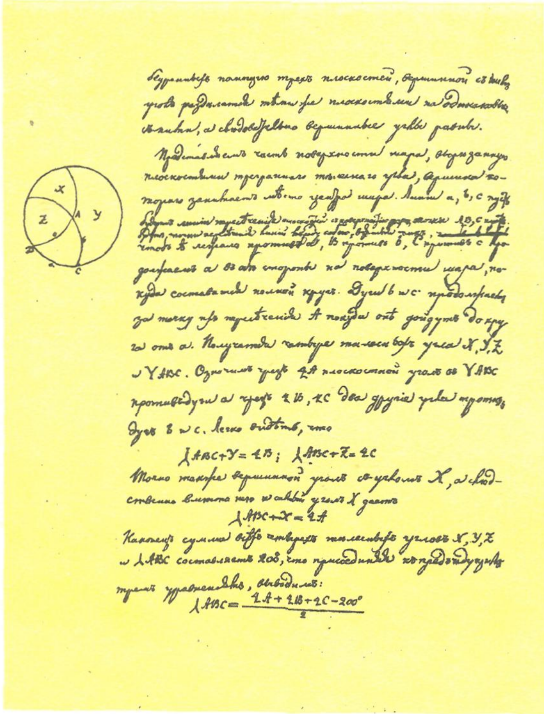
ГЕОМЕТРІЯ.

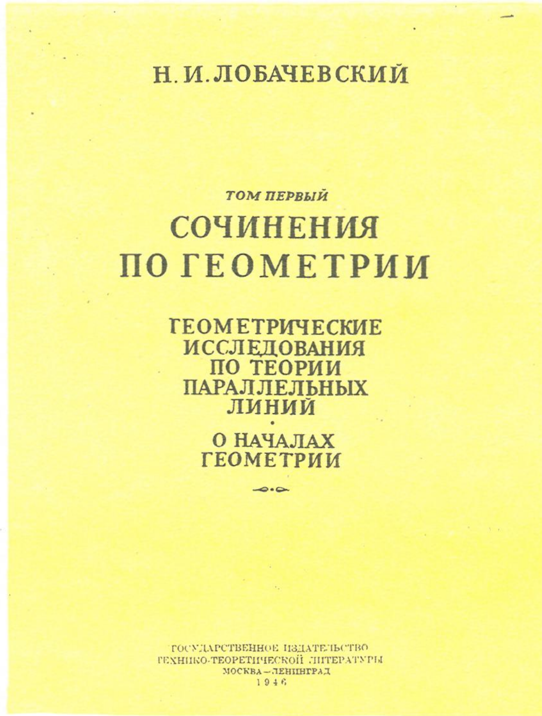
(Н. Лобачевскаго.)

КАЗАНЬ.

Въ Университетской типографіи

1835.





Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ

ТОМ ПЕРВЫЙ

СОЧИНЕНИЯ ПО ГЕОМЕТРИИ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ

О НАЧАЛАХ ГЕОМЕТРИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

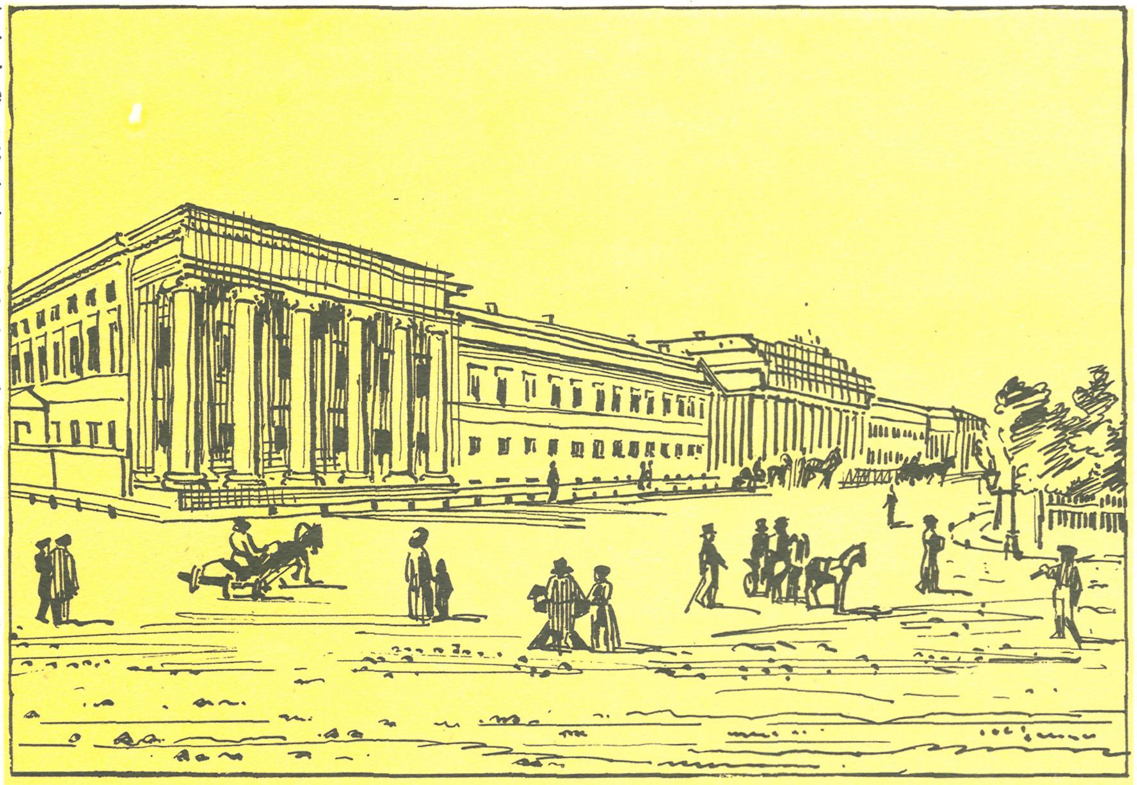
МОСКВА—ЛЕНИНГРАД

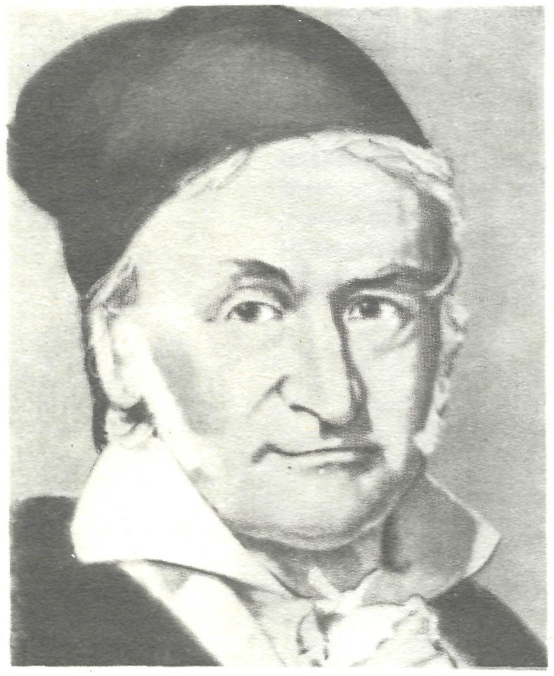
1946

Николай Иванович Лобачевский (1792–1856) — гениальный русский математик и выдающийся деятель просвещения. Обучаясь в Казанской гимназии, проявил исключительные способности, в 1807 г. поступил, а в 1811 г. блестяще окончил Казанский университет. С этим высшим учебным заведением были связаны вся жизнь, научная и педагогическая деятельность ученого.

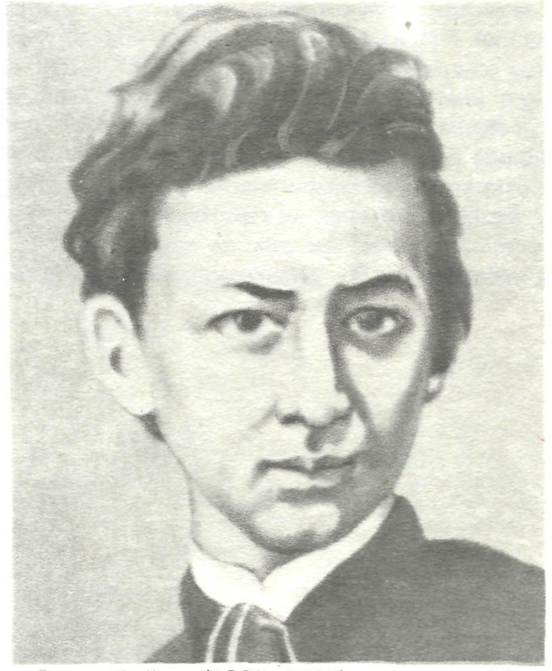
Научным подвигом ученого было преодоление тысячелетней традиционной веры в непоколебимость и единственность евклидовой модели физического пространства.

Неевклидова геометрия поражала парадоксальностью своих выводов и не была признана современниками. Многие годы Н. И. Лобачевский углублял и совершенствовал свое открытие в окружении полного непонимания, а часто и открытых издевательств. Только исключительная преданность научной истине, несгибаемая воля, мужество и подлинная честность ученого дали ему силы остаться до конца верным избранному пути и открывшейся научной истине.





Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) — выдающийся немецкий математик, астроном, геодезист. В 1818 г. пришел к мысли о возможности существования неевклидовой геометрии, но, понимая, какую бурю негодования может вызвать открытое провозглашение таких взглядов, при жизни ничего не опубликовал. Высоко ценил работы Н. И. Лобачевского и, чтобы читать их в подлиннике, в 67 лет изучал русский язык. Предложил избрать Н. И. Лобачевского „как одного из превосходнейших математиков русского государства" членом-корреспондентом Геттингенского ученого королевского общества, где Гаусс состоял директором.



Янош Бойаи (1802–1860) — выдающийся венгерский математик. Независимо от других ученых пришел к идее создания неевклидовой геометрии. Элементарное изложение ее начал опубликовал в 1832 г. в замечательном произведении „Appendix" (Приложение), которое было напечатано как приложение к первому тому учебника по математике отца Яноша—Фаркаша Бойаи. Ученый не встретил объективной оценки своего труда и поддержки со стороны К. Ф. Гаусса, который к тому же был со студенческих лет другом отца Яноша. Позже Янош Бойаи узнал, что приоритет открытия и публикации изложения неевклидовой геометрии принадлежат русскому математику.

75, 76. Николай Иванович Лобачевский

Среди выдающихся ученых, открытия которых знаменовали революционные сдвиги в науке, открывали новые горизонты ее развития, почетное место по справедливости принадлежит гениальному русскому математику Н. И. Лобачевскому. 23 февраля 1826 г. на заседании физико-математического факультета он прочитал доклад „Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных", в котором, разрывая оковы тысячелетней евклидовой традиции, изложил основы открытой им новой, неевклидовой геометрии. Однако он остался непонятым.

Сравнивая научный подвиг Н. И. Лобачевского с другими выдающимися достижениями науки, советский геометр В. Ф. Каган (1869—1953) в речи на торжественном заседании, посвященном столетию открытия Н. И. Лобачевским неевклидовой геометрии, говорил: „Я беру на себя смелость утверждать, что было легче остановить Солнце, что легче было двинуть Землю, чем уменьшить сумму углов в треугольнике, свести параллели к схождению и раздвинуть перпендикуляры к прямой на расхождение.

История науки не знает открытия, которое по исключительной неожиданности обнаруженных фактов сколько-нибудь приближалось бы к тому, столетие которого мы ныне празднуем" (К а г а н В. Ф. Очерки по геометрии. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1963. — С. 59).

В 1827 г. Н. И. Лобачевского избирают ректором Казанского университета, и в течение 19 лет ученый самоотверженно трудится на этом ответственном посту. Кипучую административную деятельность творец неевклидовой геометрии сочетал с напряженной научной работой. В журнале „Казанский вестник" за февраль—март 1829 г. он начал печатать мемуары „О началах геометрии", а затем в „Ученых записках" Казанского университета увидели свет его произведения „Воображаемая геометрия" (1835) и „Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам" (1836). С 1835 по 1838 г. Н. И. Лобачевский публикует свою наиболее обширную работу „Новые начала геометрии с полной теорией параллельных", в 1840 г. на немецком языке выходит его книга „Геометрические исследования по теории параллельных линий", содержащая предельно ясное и сжатое изложение идей новой геометрии.

Полное непонимание, а иногда и открытые издевательства над эпохальным открытием не сломили воли ученого и его глубокой веры в научную истину, верность которой он героически пронес через годы своей неспокойной, трагической жизни. Слепым, за год до смерти, он продиктовал ученикам свой последний труд — „Пангеометрию", посвятив его родному университету.

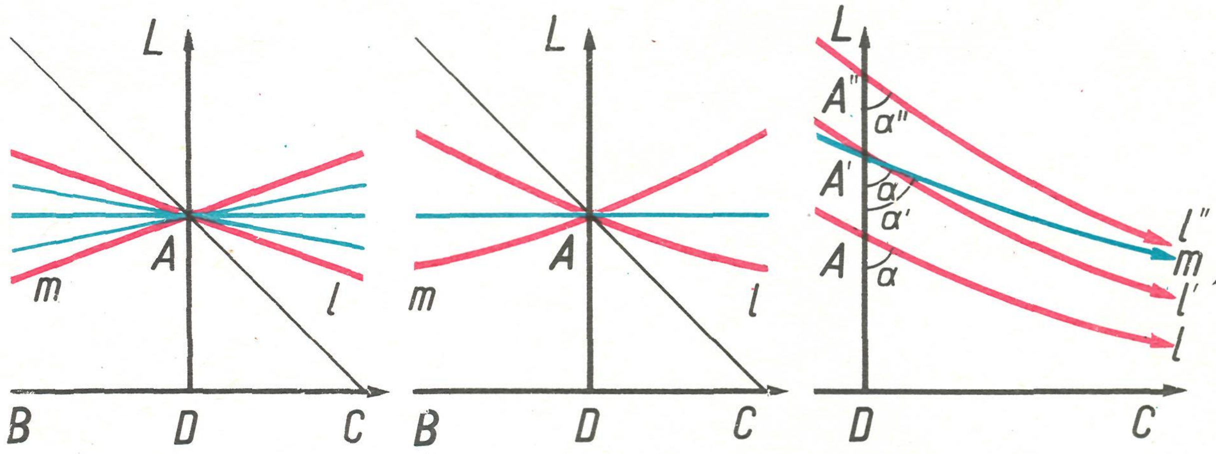
76. Николай Иванович Лобачевский

Прямые l и m — первые прямые пучка, не пересекающие прямую BC. Лобачевский назвал их параллельными BC. Таким образом, из точки $A \notin BC$ в плоскости Лобачевского можно провести две прямые, параллельные BC, бесконечное множество прямых, не пересекающих BC (их называют расходящимися с BC, или сверхпараллельными), и бесконечное множество прямых, пересекающих BC.

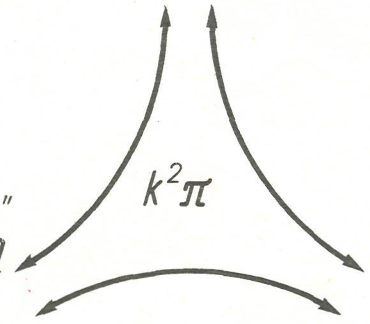
Чтобы проиллюстрировать в евклидовой плоскости параллельность прямых l и m прямой BC, первые целесообразно представить в виде искривленных линий. Тогда легче вообразить, что они действительно нигде не встретятся с BC.

Зависимость между AD и углом параллельности $\Pi\ (\alpha)$:

$$\lim_{AD\to 0} \Pi\ (\alpha) \to 90°, \quad \lim_{AD\to 0} \Pi\ (\alpha) \to 0°.$$

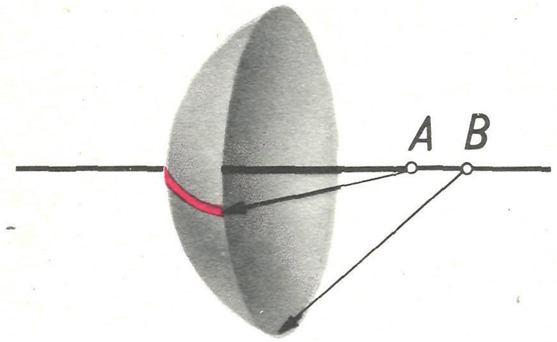


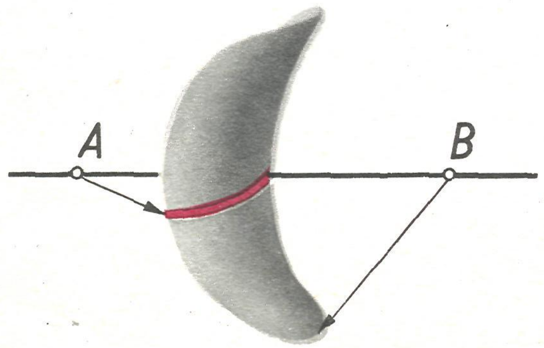
Предельный случай — так называемый „нулевой" треугольник. Все три стороны его имеют бесконечные длины, поэтому сумма всех внутренних углов равна 0°. Площадь любого треугольника в плоскости Лобачевского всегда ограничена. Наибольшую площадь имеет нулевой треугольник $k^2\pi$, где k — радиус кривизны пространства Лобачевского.

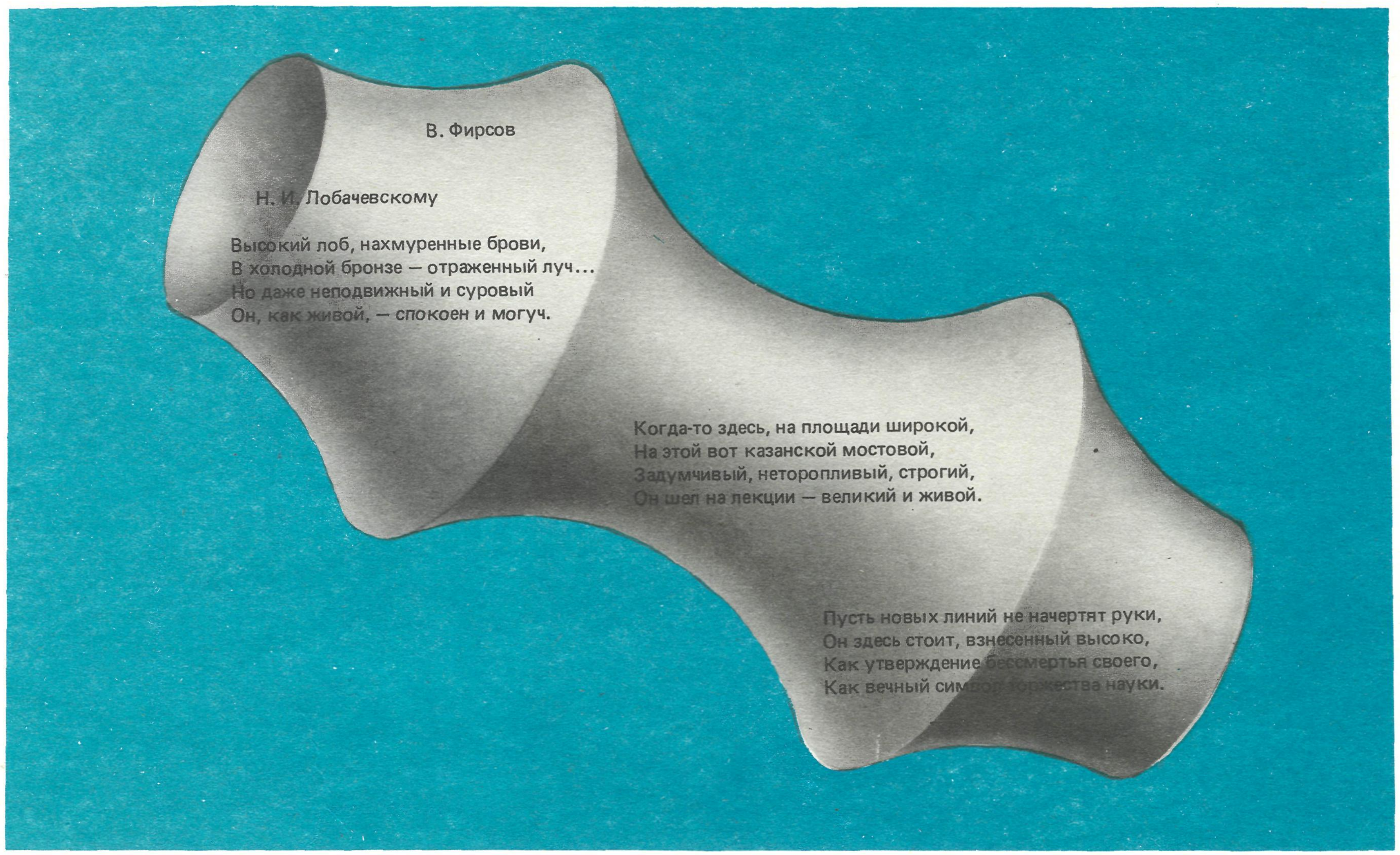


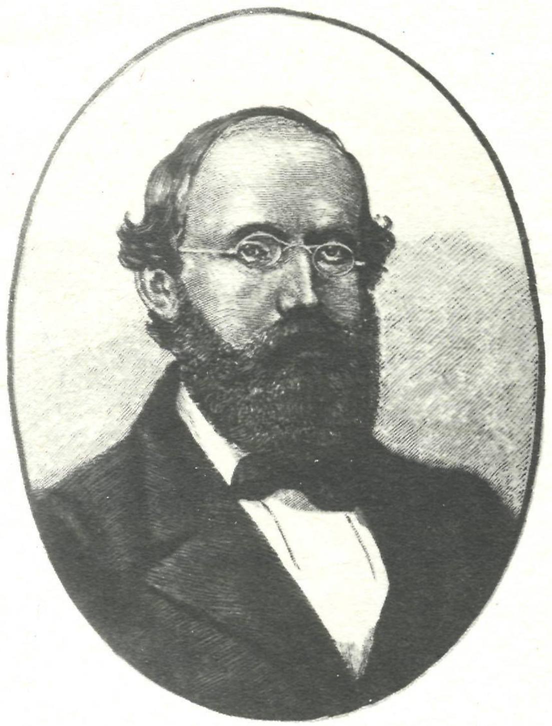
Памятник Н. И. Лобачевскому воздвигнутый в Казани на Университетской площади 1 сентября 1896 г.

Геометрия Лобачевского реализуется локально на псевдосфере и других поверхностях постоянной отрицательной кривизны, т. е. все линии и фигуры, начерченные на такой поверхности, будут вести себя точно так же, как если бы они располагались в плоскости Лобачевского. Однако на таких поверхностях можно воссоздать лишь конечную часть плоскости Лобачевского, Линии и точки перегиба псевдосферических поверхностей нарушают однородность непрерывной и бесконечной плоскости Лобачевского.



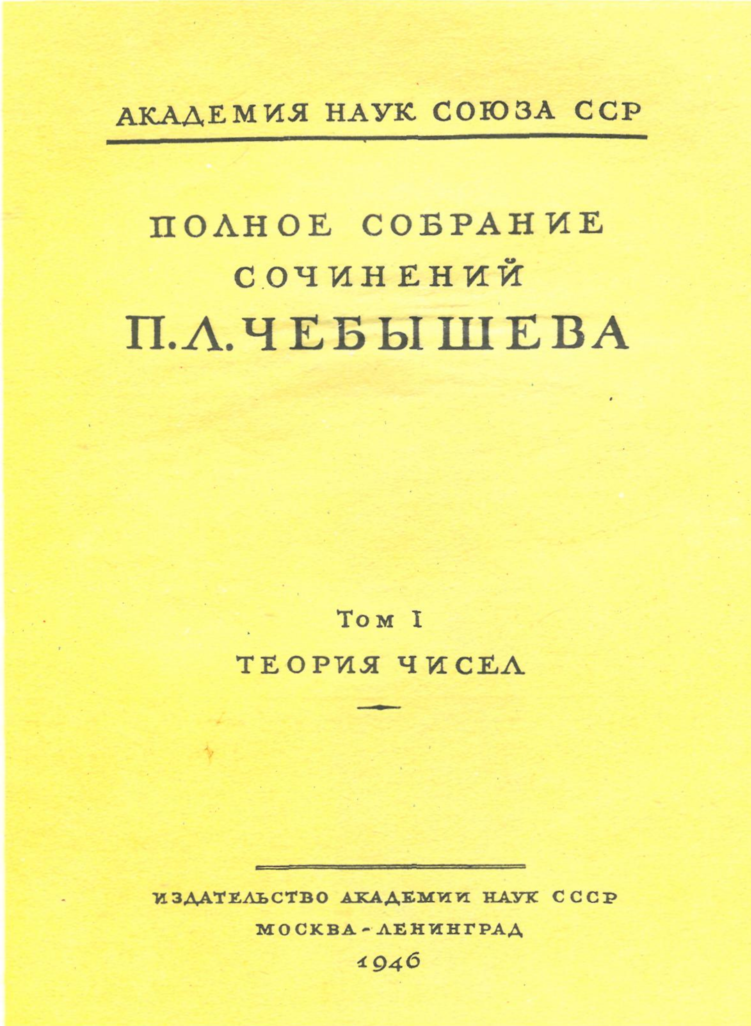






Бернхард Риман (1826—1866) — выдающийся немецкий математик. В своей знаменитой университетской лекции „О гипотезах, лежащих в основании геометрии" (1854) ввел пространство как топологическое многообразие произвольного числа измерений, классифицировал все известные в то время виды геометрий и открыл путь к созданию произвольного числа новых математических пространств.

77. Пафнутий Львович Чебышев



АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

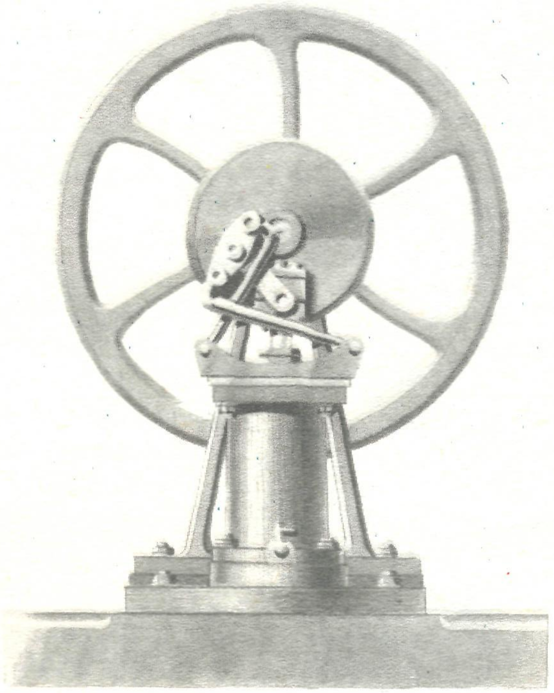
ПОЛНОЕ СОБРАНИЕ
СОЧИНЕНИЙ
П.Л.ЧЕБЫШЕВА

Том I
ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА - ЛЕНИНГРАД
1946

Сближение теории с практикой дает самые благотворные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает; сами науки развиваются под влиянием ее: она открывает им новые предметы для исследования или новые стороны в предметах, давно известных.

П. Л. Чебышев



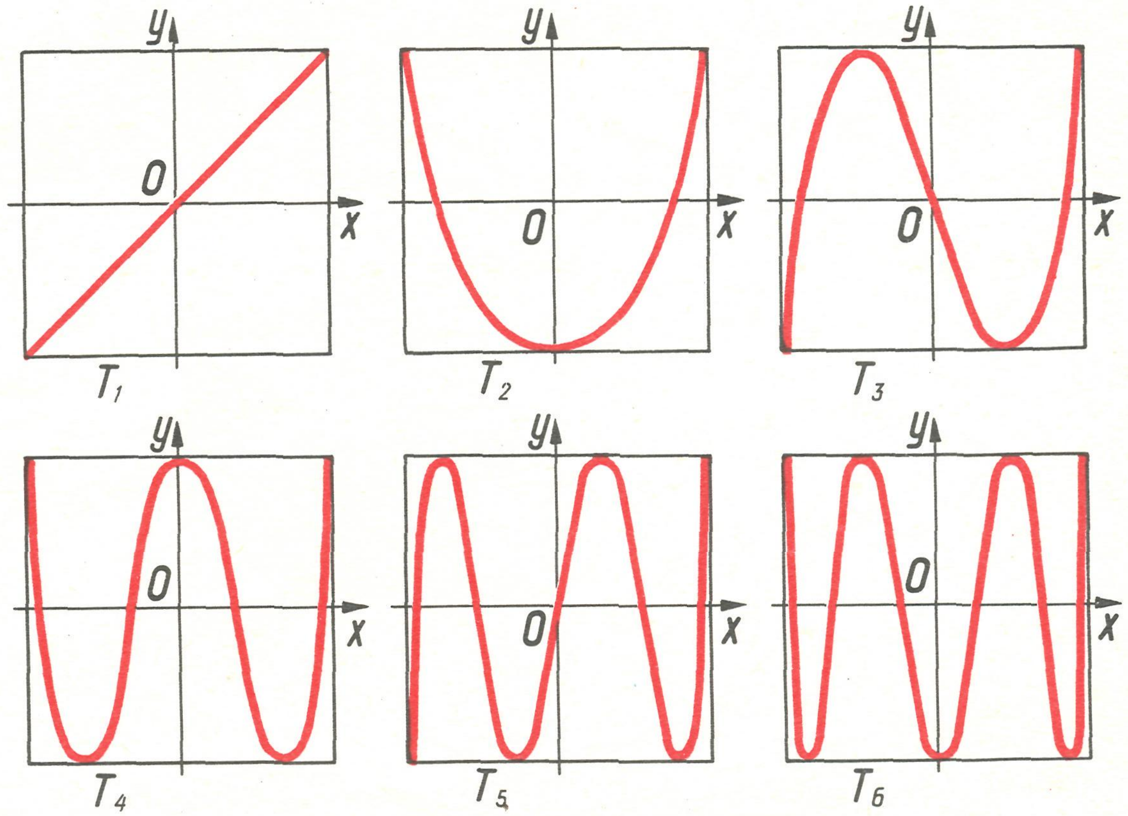
Значительное внимание Чебышев уделял исследованиям в теории механизмов. Он создал около 40 оригинальных механизмов, в том числе и паровую машину, изображенную на рисунке, а также выполнил свыше 80 модернизаций.

В связи с исследованиями принципа действия паровой машины и других устройств П. Л. Чебышев разработал теорию полиномов, наименее отклоняющихся от нуля:

$$T_n(x) = x^n - C_n^2 x^{n-2}(1-x^2) +$$
$$+ C_n^4 x^{n-4}(1-x^2)^2 - \dots .$$

Полиномы Чебышева имеют ряд интересных арифметических и аналитических свойств. Они широко используются при составлении стандартных программ вычисления функций на ЭВМ.

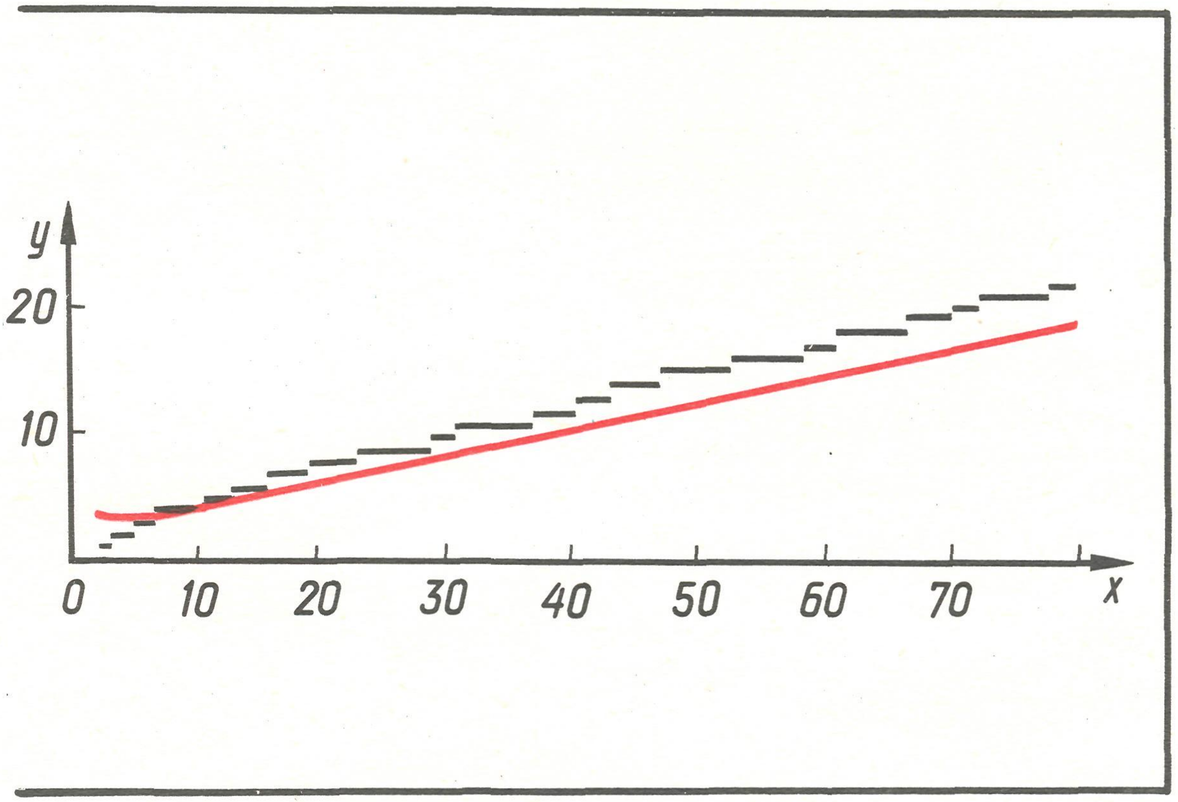
Графики шести первых полиномов Чебышева.



Пафнутий Львович Чебышев (1821–1894) — выдающийся русский математик, механик, деятель народного образования, ученый с мировым именем. Французский математик Шарль Эрмит писал ему: „...Вы являетесь гордостью науки в России, одним из первых геометров Европы, одним из величайших геометров всех времен". Среди первых работ, принесших ученому общее признание, были исследования в теории простых чисел. Он открыл важную математическую зависимость — асимптотический закон распределения простых чисел:

$$0{,}92149 \leqslant \frac{\pi(x)\ \ln(x)}{x} \leqslant 1{,}10555.$$

С помощью этого закона можно вычислить количество простых чисел $\pi(x)$ в произвольном числовом промежутке от 1 до x $(x \in N)$.



Черные ступеньки — график функции $y = \pi(x)$. Возможны как угодно длинные горизонтальные участки графика. График функции $y = \dfrac{x}{\ln x}$ изображен красной линией. П. Л. Чебышев доказал, что графики этих функций пересекаются бесконечное число раз. Впервые пересечение происходит при значении $x = n_0 \approx \approx 10^{10^{10^{34}}}$. Этот числовой гигант называют числом Скьюза.

77. Пафнутий Львович Чебышев

Творчество П. Л. Чебышева, одного из виднейших русских ученых, — выразительный пример применения абстрактных математических теорий к решению задач с практическим содержанием.

Чебышев первым после Евклида сделал ощутимый шаг в решении сложнейшей проблемы — о распределении простых чисел в натуральном ряде. В своей докторской диссертации ученый показал, что функция $\varphi(x) = \int_2^x \frac{dx}{\ln x}$ такова, что при $n \to \infty$ она как угодно много раз удовлетворяет как неравенству $\pi(x) > \varphi(x) - \frac{\alpha x}{\ln^n x}$, так и неравенству $\pi(x) < \varphi(x) + \frac{\alpha x}{\ln^n x}$ при $\alpha \to 0$ и $n \to \infty$. Отсюда следует, что если предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\varphi(x)}$ существует, то он может равняться лишь числу 1. Это означает, что если предел существует, то $\varphi(x)$ является асимптотическим изображением функции $\pi(x)$. Последняя же указывает количество простых чисел, меньших x.

Глубокие исследования выполнил Чебышев в теории вероятностей. В частности, он предложил необычайно простое и строгое доказательство общего закона больших чисел — теоремы о закономерностях, которым подчиняются случайные явления. Со времен Чебышева русская наука заняла ведущее место в этой важной для приложений отрасли знания. Выдающиеся результаты были достигнуты и на пути разработки идей, выдвинутых П. Л. Чебышевым. Особенно плодотворно работали в этой области представители Петербургской математической школы академики А. М. Ляпунов (1857—1918) и А. А. Марков (1856—1922).

Работая над созданием шарнирно-рычажного механизма, который преобразовывал бы круговое движение точки A в возможно более прямолинейное движение точки B, Чебышев пришел к важной математической проблеме — приближенному представлению функций. Он открыл многочлены, наименее отклоняющиеся от нуля; их ныне называют многочленами Чебышева. Эти многочлены имеют важное значение во многих вопросах теории и практики.

Великие заслуги П. Л. Чебышева в области артиллерии.

78. Софья Васильевна Ковалевская

В течение всей моей жизни математика привлекала меня больше философскою своею стороною и всегда представлялась мне наукою, открывающею совершенно новые горизонты.

С. В. Ковалевская

Вклад, внесенный в науку Ковалевской за ее недолгую жизнь, необычайно ценен и многозначителен. Ее фундаментальное исследование по вращению твердого тела послужило основой для дальнейшего развития важнейших вопросов механики в нашей стране и во всем мире. Ее тонкие исследования по теории дифференциальных уравнений и по некоторым вопросам математической физики и теоретической астрономии сохраняют свое значение и на сегодня.

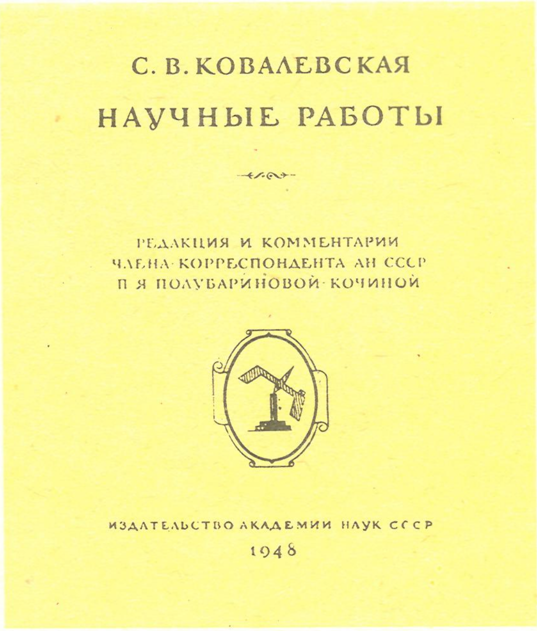
В истории человечества до Ковалевской не было женщины, равной ей по силе и своеобразию математического таланта.

С. И. Вавилов

Софья Васильевна Ковалевская (1850—1891) — доктор философии „с высшей похвалой" (1874), профессор Стокгольмского университета (1883), лауреат премий Парижской (1888) и Шведской (1889) Академий наук, член-корреспондент Петербургской Академии наук (1889).

Математическая одаренность Ковалевской обнаружилась рано. Древняя задача квадратуры круга, асимптоты, непрерывно приближающиеся к прямым и никогда не достигающие их, и многие другие зависимости, долгое время занимавшие умы математиков, пробуждали детскую фантазию, вызывали особое отношение к математике как науке загадочной, открывающей свои тайны лишь отдельным посвященным в ее удивительный мир.

Вспоминая свое детство, Софья Васильевна писала, что из-за недостатка материалов для обоев, одна стена ее комнаты была оклеена страницами литографированных лекций М. В. Остроградского по дифференциальному и интегральному исчислению, приобретенными ее отцом в молодости. Девочка часами рассматривала таинственные знаки, пытаясь постичь их смысл. Формулы так врезались в ее память, что, изучая в 15 лет высшую математику, она воспринимала доказательства основных соотношений математического анализа как уже хорошо известные.



С. В. КОВАЛЕВСКАЯ

НАУЧНЫЕ РАБОТЫ

РЕДАКЦИЯ И КОММЕНТАРИИ ЧЛЕНА-КОРРЕСПОНДЕНТА АН СССР П. Я. ПОЛУБАРИНОВОЙ-КОЧИНОЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

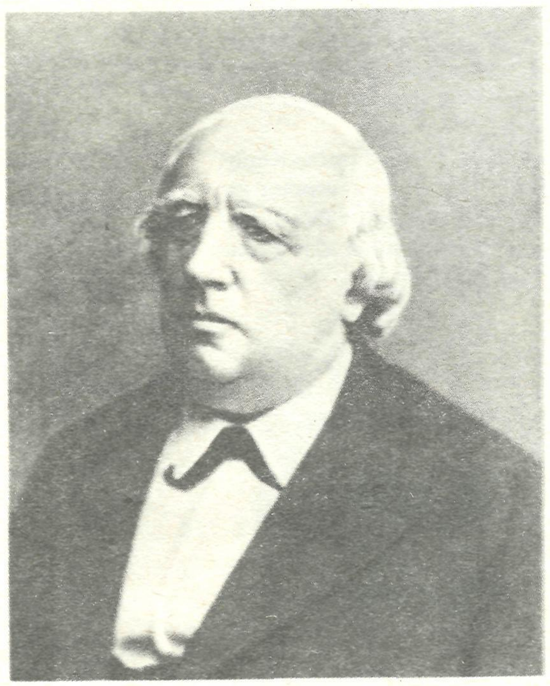
1948

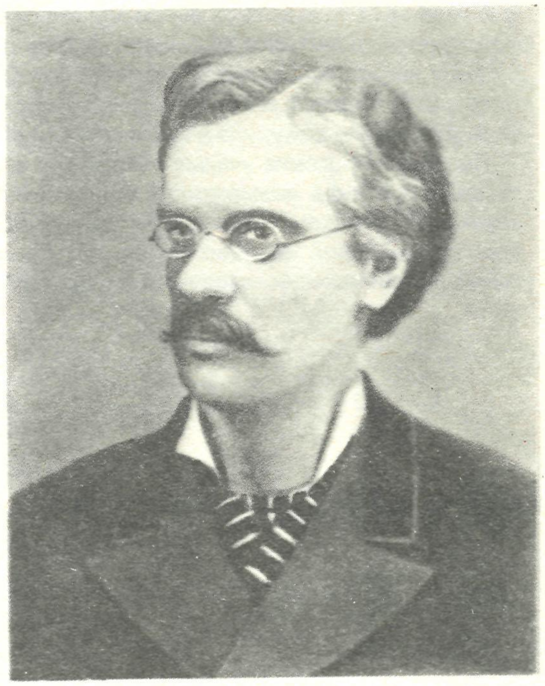
Первые уроки высшей математики Софья Васильевна брала у одного из образованнейших и благороднейших представителей блестящей плеяды педагогов 60-х годов — Александра Николаевича Страннолюбского (1839—1903).

Однако путь к получению высшего образования талантливой девушкой в царской России оказался очень сложным. Пришлось преодолеть упорное сопротивление родителей, вступить в фиктивный брак с В. А. Ковалевским, чтобы выехать для продолжения образования за границу. Там ее подстерегали новые препятствия. Но, преодолевая их, Ковалевская упорно шла к поставленной высокой цели.

Только для Ковалевской прочел ряд математических курсов выдающийся математик Карл Вейерштрасс (1815—1897). На всю жизнь он остался научным консультантом и восторженным ценителем математической одаренности своей русской ученицы.

Блестящих научных успехов Ковалевской оказалось недостаточно для выполнения ее самого заветного желания — отдать весь свой талант служению родному народу. По приглашению шведского математика М. Г. Миттаг-Леффлера (1846—1927) Софья Васильевна заняла должность доцента Стокгольмского университета.





78, 79. Софья Васильевна Ковалевская

В Пантеоне славы творцов русской науки и культуры почетное место занимает член-корреспондент Российской Академии наук, профессор Стокгольмского университета Софья Васильевна Ковалевская — выдающийся математик, талантливый писатель и активный общественный деятель.

За свою короткую жизнь она внесла большой вклад в развитие математики, механики, математической физики и теоретической астрономии.

Основной математический результат Ковалевской изложен в одном из трех ее трудов, представленных на соискание ученой степени доктора наук: „К теории дифференциальных уравнений в частных производных". Это известная теорема Ковалевской о существовании решений нормальной системы дифференциальных уравнений в частных производных, имевшая принципиальное значение для выяснения условий, при которых допустимо применение методов дифференциальных уравнений к задачам математического естествознания. Немецкий математик К. Вейерштрасс считал, что упомянутый труд Ковалевской может быть отнесен к ряду „наиболее интересных работ десятилетия", а французский математик Э. Пикар назвал этот труд классическим.

Большой научный успех выпал на долю Ковалевской в 1888 г., когда она завершила свой труд „Задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки". Л. Эйлер еще в 1758 г. рассмотрел частный случай этой задачи. Лагранж (1788) и Пуассон (1815) рассмотрели еще два случая. Дальнейшего развития решение этой задачи не получило. Принимая во внимание ее важность, Парижская Академия наук дважды объявляла конкурс на более полное исследование этой задачи. В 1888 г. такой конкурс был объявлен в третий раз.

Из пятнадцати присланных на конкурс премии была удостоена работа под девизом: „Говори, что знаешь, делай, что должен — что будет, то и будет". Результаты, изложенные в этой работе, были так значительны, что присужденную ей первую премию увеличили с 3 до 5 тыс. франков. Автором этой работы была С. В. Ковалевская.

С. В. Ковалевская принимала активное участие в общественной жизни. В апреле 1871 г. вместе со своим мужем она была в осажденном Париже, где коммунары героически защищали первое в мире государство трудящихся. В самое напряженное время Ковалевские жили в Париже. Ковалевская вместе со своей старшей сестрой — женой видного деятеля Парижской Коммуны Ш. В. Жаклара — дежурила в госпиталях на Монмартре.

Передовые русские ученые приложили много усилий к тому, чтобы Ковалевская получила возможность работать на родине. Однако их усилия не увенчались успехом — ученым не удалось победить сопротивление бюрократической царской администрации, опиравшейся на освященные церковью традиции принижения человеческого достоинства женщины.

79. Софья Васильевна Ковалевская

В 1874 г. Геттингенский университет присудил Ковалевской степень доктора философии „с высшей похвалой". Ковалевская представила две работы, каждой из которых было бы достаточно для получения искомой степени.

В первой из них „К теории дифференциальных уравнений в частных производных" Ковалевская, применив методы Вейерштрасса, разработанные им в теории функций, исследовала вопросы существования и единственности решения дифференциальных уравнений в частных производных. Результаты эти имели принципиальное значение для приложений, поскольку выясняли условия, при которых законно применение методов теории дифференциальных уравнений к задачам математического естествознания. Одна из доказанных Ковалевской теорем названа ее именем и стала классической. Теорему Ковалевской теперь изучают все студенты-математики. Во второй работе Ковалевская точнее, чем это было сделано Лапласом, решила задачу о форме поперечного сечения колец Сатурна. Третья работа относилась к вопросу о приведении абелевых интегралов к более простому виду.

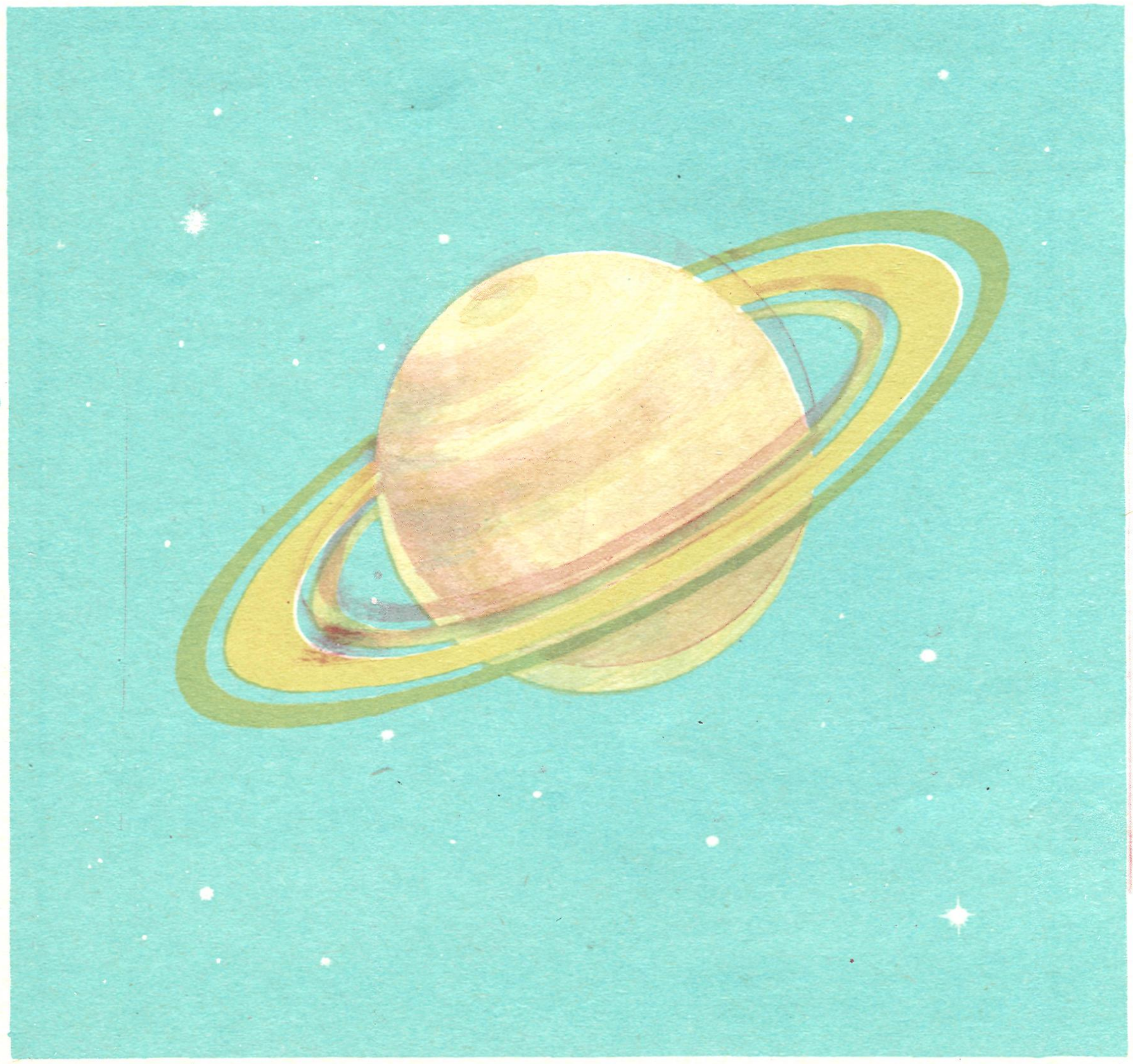
Подлинный научный триумф принесли Ковалевской исследования закономерностей вращения твердого тела вокруг неподвижной точки. На принципах такого движения построены гироскопические приборы, имеющие важное значение для определения курса движения судов, самолетов, а также для стабилизации их движения.

Ковалевская, осуществив глубокий анализ задачи, нашла возможности решения ее современными математическими методами. Кроме того, она открыла новый, прославивший ее случай, когда решение задачи быстро приводит к искомому результату.

Выдающийся советский математик и механик Н. Е. Жуковский объяснил частные случаи этой задачи тремя видами гироскопа. В первом случае гироскоп представляет собой тело произвольной формы, опирающееся на подставку так, что точка опоры совпадает с центром тяжести тела. Этот случай рассматривал Эйлер. Второй исследовали Лагранж и Пуассон. Ковалевская решила задачу, когда центр тяжести фигуры смещен относительно точки опоры.

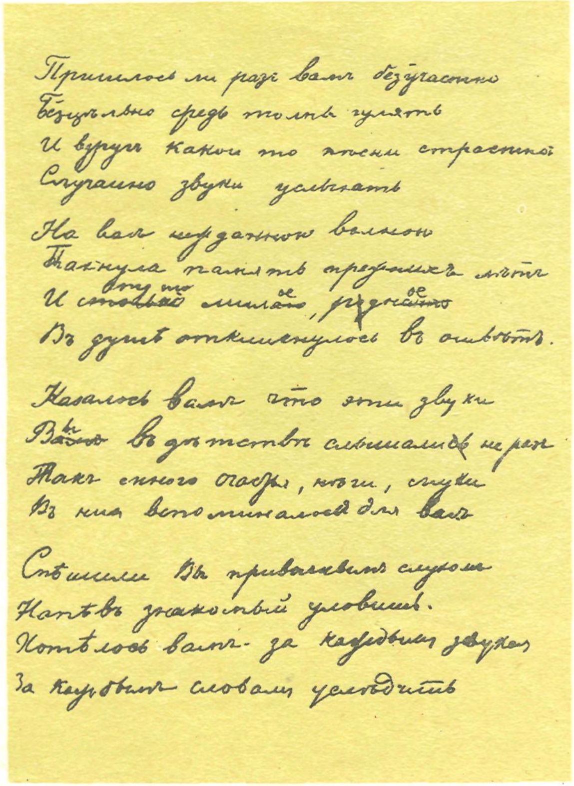
С детства Софья Васильевна увлекалась и литературой. В 12 лет была даже убеждена, что станет поэтессой. И хотя математика властно позвала Софью Васильевну в свои миры, с литературой она не расставалась никогда. Ковалевская была талантливой писательницей и популяризатором научных знаний. Опубликованные в 1890 г. „Воспоминания детства" вызвали восторженные отклики. Критика ставила их в один ряд с „Записками охотника" И. С. Тургенева, „Детством", „Отрочеством" и „Юностью" Л. Н. Толстого. Видные литераторы отмечали тонкую наблюдательность, глубину психологического анализа, образный, выразительный язык. Софья Васильевна оставила интересные воспоминания о Ф. М. Достоевском, очерк о М. Е. Салтыкове-Щедрине. Она написала повесть „Нигилистка", несколько стихотворений, а вместе со шведской писательницей А.-Ш. Леффлер — драму „Борьба за счастье". Ряд литературных произведений остался неоконченным.

19 ноября 1889 г. по предложению ряда математиков и, в частности, П. Л. Чебышева Софью Васильевну избрали членом-корреспондентом Петербургской Академии наук. Для этого пришлось сломить вековую традицию и отдельно рассмотреть вопрос о присвоении женщине этого почетного звания. Однако многое так и осталось неосуществленным. Блестящие успехи в науке и литературе, слава первоклассного математика и всеевропейская популярность не приглушили всепоглощающей тоски по родине, где был непочатый край работы, путь к которой был закрыт жестокой рукой царской администрации.



С. В. Ковалевская и шведская писательница А.-Ш. Леффлер (фото 1885 г.).

Автограф первой страницы стихотворения С. В. Ковалевской „Пришлось ли ...", впервые опубликованного в журнале „Вестник Европы", 1892, № 2.

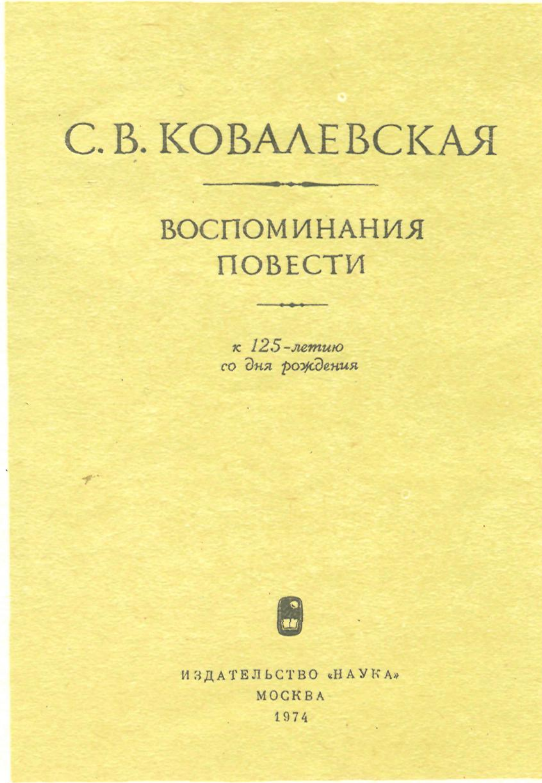


Пришлось ли разъ вамъ безучастно
Безцѣльно средь толпы гулять
И вдругъ какой-то пѣсни страстной
Случайно звуки услыхать
На васъ нежданной волной
Пахнула память прежнихъ лѣтъ
И что-то милое, родное
Въ душѣ откликнулось въ отвѣтъ.

Казалось вамъ, что эти звуки
Вы въ дѣтствѣ слышали не разъ
Такъ много счастья, нѣги, муки
Въ нихъ вспоминалось для васъ

Спѣшили вы привычнымъ слухомъ
Напѣвъ знакомый уловить.
Хотѣлось вамъ за каждымъ звукомъ
За каждымъ словомъ услѣдить

Титульная страница полного собрания литературных произведений С. В. Ковалевской, вышедшего в серии „Литературные памятники" к 125-летию со дня ее рождения.



С. В. КОВАЛЕВСКАЯ

ВОСПОМИНАНИЯ
ПОВЕСТИ

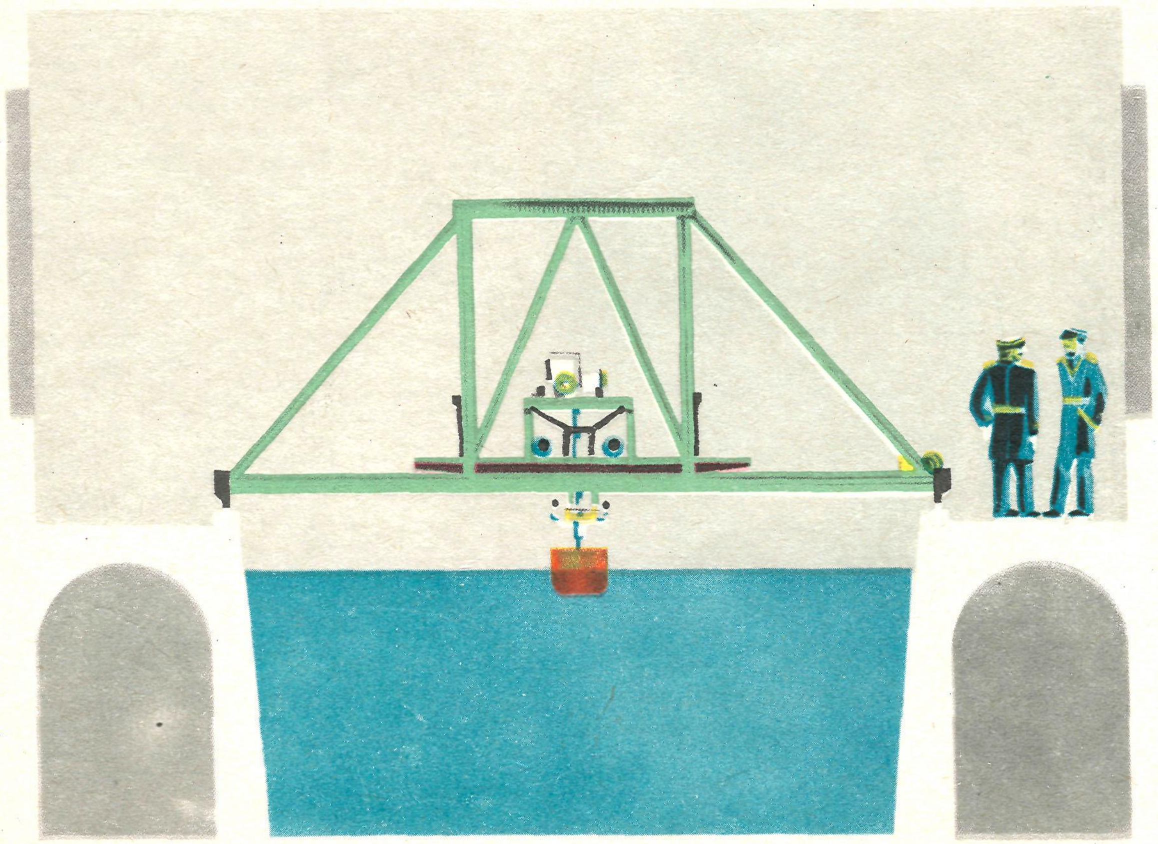
к 125-летию
со дня рождения

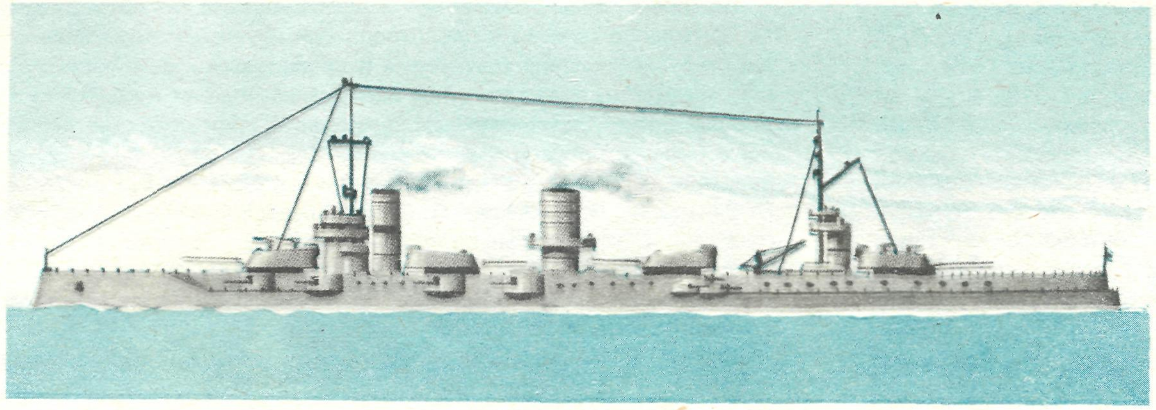
ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА
1974

80. Адмирал корабельной науки

Алексей Николаевич Крылов (1863—1945) — академик АН СССР, лауреат Государственной премии (1941), Герой Социалистического Труда (1943). С 1890 г. работал в Военно-морской Академии, в 1927—1934 гг. также в Математическом институте АН СССР (директор института).

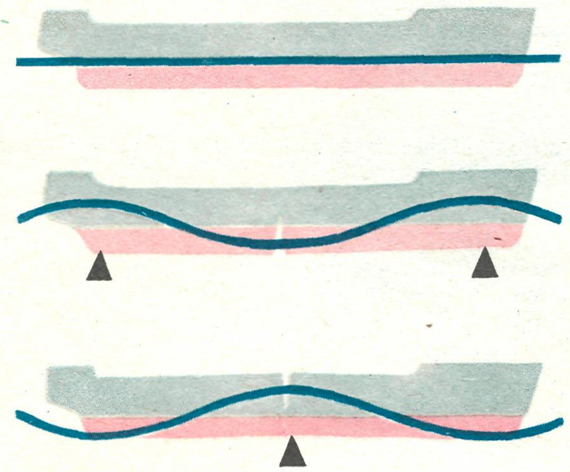
Выдающийся советский математик, механик, кораблестроитель. Научные работы посвящены приближенным и численным методам математического анализа, алгебре, дифференциальным уравнениям, прикладной математике и механике, теории кораблестроения, истории математики.

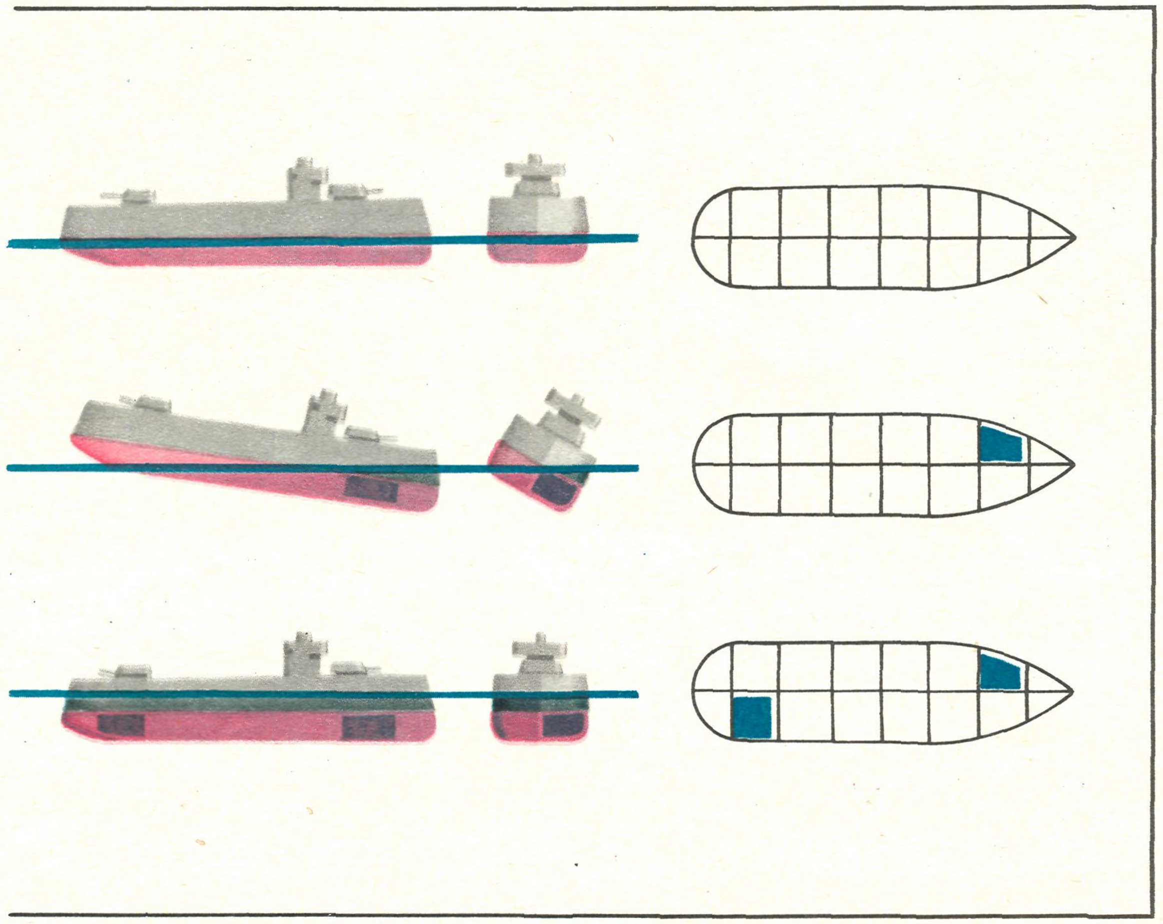


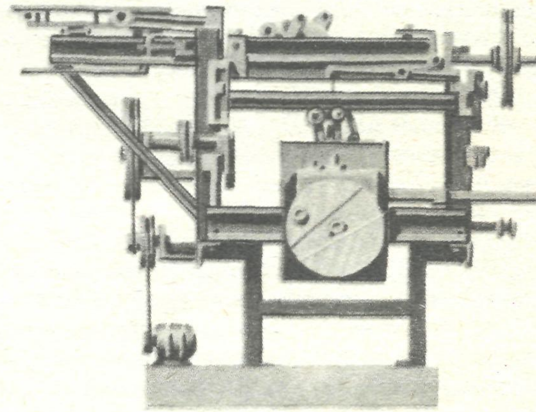


Линейный корабль типа „Севастополь". Оригинальная конструкция и расчеты проекта корабля такого типа, выполненные под руководством А. Н. Крылова, стали важной вехой в истории создания морских вооруженных сил нашей страны.

В октябре 1902 г. А. Н. Крылов провел расчеты и составил таблицы, отражающие влияние отдельных затопленных отделений корабля на крен (продольное наклонение судна) и устойчивость броненосца „Потемкин". Таким образом было положено начало созданию учеными знаменитых таблиц непотопляемости кораблей, сыгравших важную роль в сохранении российских кораблей в Цусимском бою.



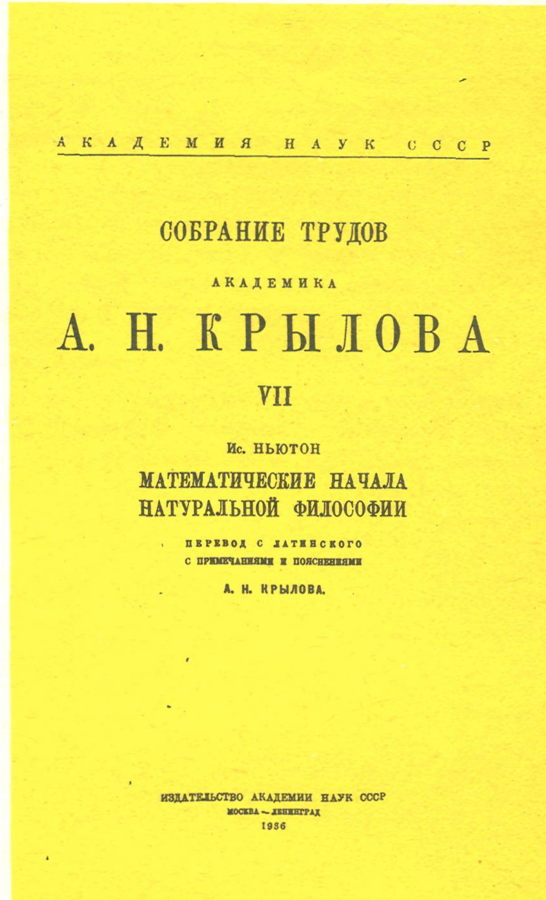




Интегратор — прибор для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, созданный А. Н. Крыловым в 1904 г.

Положения корабля на волне через промежутки времени, равные $\frac{1}{8}$ полного периода качки.

А. Н. Крылов много работал в области истории математики, механики, в морском деле. Он перевел на русский язык знаменитую книгу Ньютона „Математические начала натуральной философии".



АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СОБРАНИЕ ТРУДОВ

АКАДЕМИКА

А. Н. КРЫЛОВА

VII

Ис. НЬЮТОН

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАЧАЛА НАТУРАЛЬНОЙ ФИЛОСОФИИ

ПЕРЕВОД С ЛАТИНСКОГО С ПРИМЕЧАНИЯМИ И ПОЯСНЕНИЯМИ

А. Н. КРЫЛОВА.

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

МОСКВА — ЛЕНИНГРАД

1936

80. Адмирал корабельной науки

Выдающийся кораблестроитель, математик и педагог А. Н. Крылов прошел большой жизненный путь, отдав свой могучий талант ученого и педагога своему народу, его вооруженным силам. Он член-корреспондент Петербургской АН (1914), почетный доктор прикладной математики (1916), академик Петербургской АН (1916), заслуженный деятель науки и техники СССР (1939).

Под влиянием блестящих подвигов русских моряков в русско-турецкой войне А. Н. Крылов решает стать моряком и поступает в Петербургское морское училище. Дядя Крылова А. М. Ляпунов, ученик знаменитого П. Л. Чебышева и в будущем сам знаменитый математик, готовился в это время к сдаче магистерского экзамена и писал магистерскую диссертацию. Он руководил математическими занятиями А. Н. Крылова и знакомил его с многими идеями П. Л. Чебышева. Это оказало большое влияние на математические интересы будущего ученого. После окончания учебы А. Н. Крылов работал в Главном гидрологическом управлении с известным специалистом по компасному делу И. П. Коллонгом. Здесь он выполнил свои первые научные работы по девиации компаса, приобрел прочные навыки в вычислениях, которые потом развивал и усовершенствовал. Но ученый не захотел ограничиться этой узкой специальностью, его интересовала теория корабля и кораблестроение вообще как обширная область теоретического и практического знания, которая раскрывала большие возможности для будущей деятельности. Чтобы осуществить эти планы, А. Н. Крылов поступил на кораблестроительное отделение Морской Академии, первым закончил ее и по представлению известного математика проф. А. Н. Коркина (1837—1908) его оставили для подготовки к профессорскому званию. Вскоре он становится штатным преподавателем математики в Морском училище и Морской Академии, изучает математику и механику, слушает в Петербургском университете лекции ведущих математиков и механиков. С 1892 г. сам начинает читать в Морской Академии курс теории корабля.

Заметив, что в расчетах корабельных инженеров около 97 % вычислительной работы выполняется над неверными и ненужными для практики цифрами, ученый разработал рациональные приемы кораблестроительных расчетов. Эпохальной в истории кораблестроения была работа „Новый метод вычисления элементов корабля" (1893). В ней он изложил приемы и схемы для вычисления основных характеристик — плавучести и устойчивости корабля, которые стали классическими.

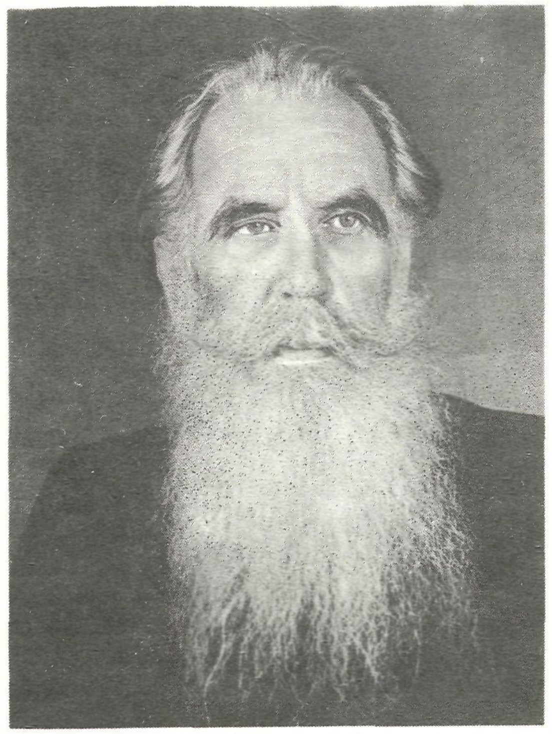
Ученый разработал наиболее сложные и важные проблемы кораблестроения и обеспечения безопасности корабля в море: учение о качке корабля, явление резонанса при плавании судов, обеспечение непотопляемости судов. Большое влияние на формирование научно-морских идей молодого ученого оказал выдающийся флотоводец адмирал С. О. Макаров. Выполненные А. Н. Крыловым исследования по проблемам кораблестроения принесли ему мировую известность, а корабельная наука стала главным направлением будущей научной и практической деятельности ученого. Он горячо боролся за интересы русского морского флота. Еще до Цусимского боя он указывал на слабость отечественных броненосцев, а после Цусимской катастрофы был одним из первых борцов за постройку нового, лучшего в мире, русского флота.

После революции весь свой талант, огромные знания и опыт ученый отдал молодой Советской республике. Работая с 1919 г. начальником Морской Академии, перестроил преподавание так, что оно стало доступным новому составу слушателей.

Большую педагогическую, организационную и общественную работу А. Н. Крылов сочетал с плодотворными научными исследованиями по баллистике (вычисление траекторий и вращательных движений снарядов), теории упругости, сопротивлению материалов, теории кораблестроения, небесной механике, рационализации вычислений. Много сил он отдал исследованиям в области истории физико-математических наук. Его перу принадлежат блестяще написанные очерки о жизни и деятельности Г. Галилея, И. Ньютона, Л. Эйлера, Ж. Л. Лагранжа, П. Л. Чебышева. Им осуществлен перевод на русский язык замечательных произведений математического естествознания: „Математические начала натуральной философии" И. Ньютона и „Новая теория движения Луны" Л. Эйлера. Незаконченной осталась работа „История открытия планеты Нептуна".

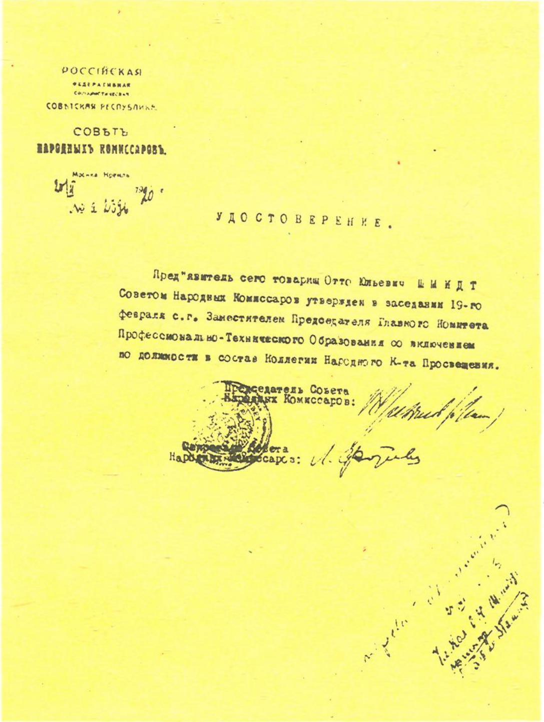
Идеи А. Н. Крылова о рационализации вычислений нашли широкое применение в школьном преподавании математики и оказали большое влияние на усовершенствование методики изучения приближенных вычислений в школе.

81. Ученый, организатор, политический деятель



Отто Юлиевич Шмидт (1891–1956) — известный советский математик, астроном и геофизик, общественный деятель и полярный исследователь, профессор (1920), академик АН УССР (1934), академик АН СССР (1935), вице-президент АН СССР (1939–1942), Герой Советского Союза (1937).

Монография „Абстрактная теория групп", написанная, когда ее автору было 22–24 года, оказала большое влияние на развитие теоретико-групповых исследований в нашей стране и долгое время была настольной книгой для советских математиков. Второе издание книги, вышедшее в 1933 г., Шмидт готовил на борту ледокола „Челюскин".



РОССІЙСКАЯ
ФЕДЕРАТИВНАЯ
СОЦИАЛИСТИЧЕСКАЯ
СОВЕТСКАЯ РЕСПУБЛИКА.

СОВѢТЪ
НАРОДНЫХЪ КОМИССАРОВЪ.

Москва Кремль

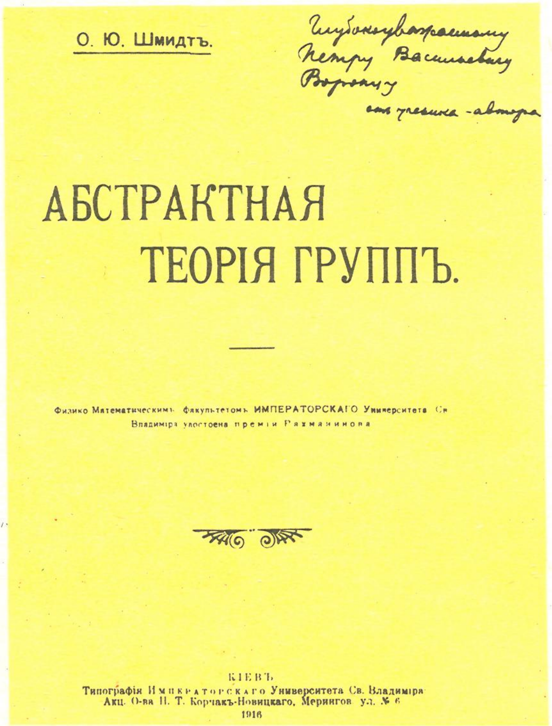
№ 2 2234 1920 г.

УДОСТОВЕРЕНИЕ.

Пред"явитель сего товарищ Отто Юльевич ШМИДТ Советом Народных Комиссаров утвержден в заседании 19-го февраля с.г. Заместителем Председателя Главного Комитета Профессионально-Технического Образования со включением по должности в состав Коллегии Народного К-та Просвещения.

Председатель Совета Народных Комиссаров:

Секретарь Совета Народных Комиссаров:



О. Ю. Шмидтъ.

Глубокоуважаемому Петру Васильевичу Воронцу от ученика-автора

АБСТРАКТНАЯ ТЕОРІЯ ГРУППЪ.

Физико Математическимъ факультетомъ ИМПЕРАТОРСКАГО Университета Св. Владиміра удостоена премiи Рахманинова

КІЕВЪ.
Типографія Императорскаго Университета Св. Владиміра
Акц. О-ва Н. Т. Корчакъ-Новицкаго, Мерингов ул. № 6
1916

Легендарна своей многогранностью и целеустремленностью жизнь ученого-коммуниста. В насыщенные до предела послереволюционные годы он занимал крупные государственные посты в Наркомпроде, Наркомфине, Наркомпросе, принимал непосредственное участие в создании новых форм общественной и экономической жизни. Особенно велики заслуги ученого в организации культурного строительства в нашей стране.

Классические результаты получил О. Ю. Шмидт в теории групп. Теорема Шмидта в теории групп — большое, фундаментальное открытие, одна из основных в современной алгебре.

Множество G некоторых математических объектов называется группой, если на нем задана бинарная операция (*), удовлетворяющая аксиомам (аксиомам группы):

1. Существует элемент $e \in G$ такой, что

$e * a = a * e = a$.

2. Для каждого $a \in G$ существует единственный элемент $a^{-1} \in G$ такой, что

$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

3. Для произвольных $a, b, c \in G$

$a * (b * c) = (a * b) * c$.

О. Ю. Шмидт руководил небывалой в истории освоения Арктики экспедицией по высадке на Северном полюсе дрейфующей полярной станции „Северный полюс", возглавляемой И. Д. Папаниным. Эта знаменательная победа явилась важным этапом на пути всестороннего и систематического исследования Арктики советскими учеными.

О. Ю. Шмидт и И. Т. Спирин на Северном полюсе во время высадки папанинцев.

Ледокол „Сибиряков" под парусами. 1932 г., завершение Великого Северного морского пути за 2 месяца и 5 дней.

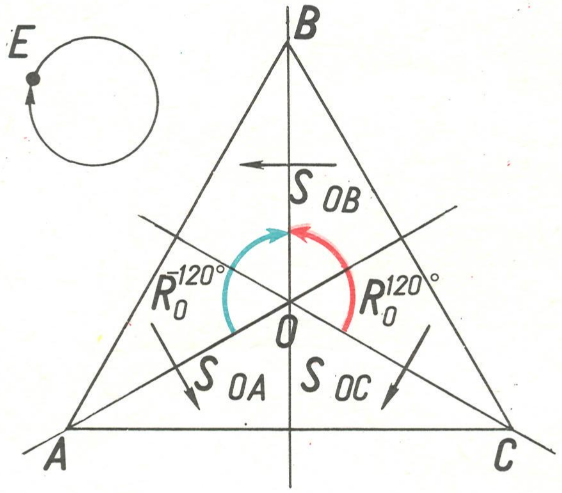
Аксиоматика структуры группы пренебрегла многими индивидуальными чертами реальных объектов действительного мира, но сохранила черты, характерные для целого класса явлений, причем эти черты таковы, что без них упомянутые явления просто не существуют.

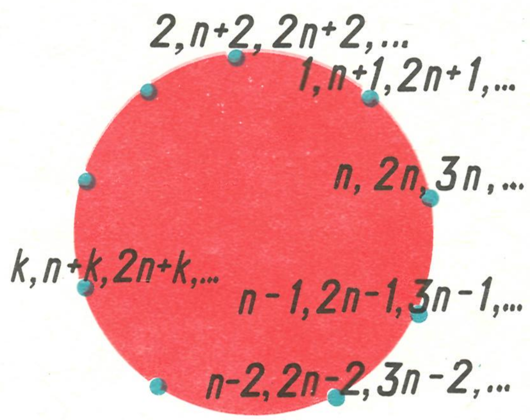
Понятие группы прежде всего нашло применение в самой математике. Только из трех аксиом были получены многочисленные результаты, которые помогли решить ряд сложных проблем в различных областях математики.

Позднее оказалось, что структура группы является исключительно удобной, экономичной и точной математической моделью широкого класса объектов реальной действительности. Благодаря этому понятие группы и стало эффективным инструментом научных исследований в физике, кристаллографии, химии, биологии, экономике, лингвистике и многих других естественных и гуманитарных науках.

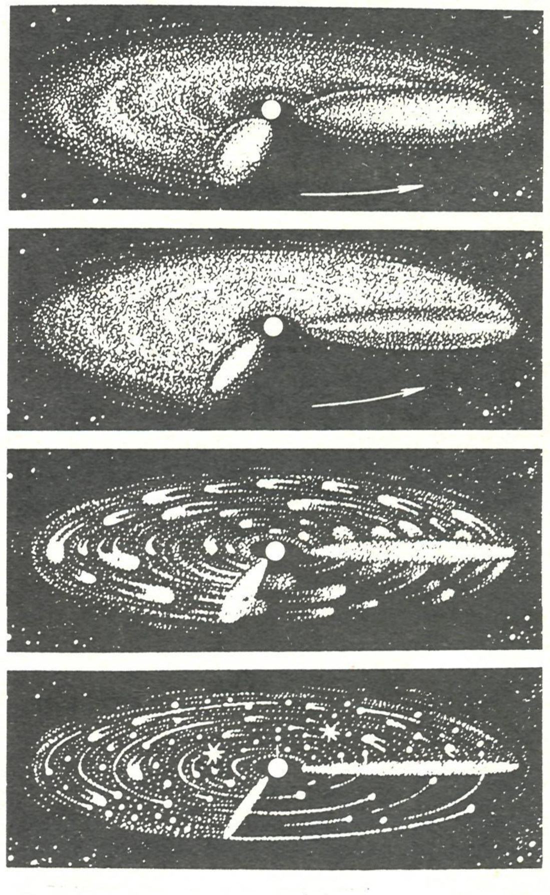
	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4
a_2	a_2	a_1	a_4	a_3
a_3	a_3	a_4	a_1	a_2
a_4	a_4	a_3	a_2	a_1

Клейнова группа G четвертого порядка из четырех абстрактных элементов a_1, a_2, a_3, a_4. Группа G замкнута относительно операции умножения.





Группу составляет множество всех перемещений, которые отображают на себя некоторую фигуру F. Эта группа является характеристикой симметричности F и называется группой симметрии фигуры F.



Космогоническая гипотеза О. Ю. Шмидта.

81. Ученый, организатор, политический деятель

О. Ю. Шмидт — выдающийся математик и геофизик, исследователь Арктики, видный государственный и общественный деятель. Сквозь всю жизнь пронес он неутолимую жажду познания и несокрушимую волю к исполнению долга. Окончил Киевский университет и был оставлен при нем для подготовки к профессорскому званию.

В 1916—1920 гг. работал в Киевском университете, 1920—1923 гг. — в Московском лесотехническом институте, 1923—1926 гг. — во Втором Московском университете, 1926 — 1956 гг. — в Московском университете, с 1949 г. — в Институте теоретической геофизики АН СССР (директор).

За каждой ступенью этих крутых дорог стоял каждодневный упорный труд и беспощадная самодисциплина. Работать он умел уже в университете. Поняв, что программные курсы его не удовлетворяют, О. Ю. Шмидт составил список литературы из различных областей знания, которые считал необходимыми изучить. Потом подсчитал, что для чтения такого количества научной литературы понадобится 1000 лет. После всех возможных сокращений осталось еще литературы на 250 лет. Но резервы сокращений были исчерпаны, и он начал уплотнять время, сократив сон до 4—5 часов в сутки, все остальное было отдано науке. Перенапряжение вызвало заболевание и врачи рекомендовали беспощадному к себе студенту умеренный распорядок жизни. Но эти пожелания скоро начисто были забыты. Ведь профессор Д. А. Граве, под руководством которого начал работать О. Ю. Шмидт, предлагал сразу браться за трудные задачи, а они требовали всех сил.

Внимание О. Ю. Шмидта привлекли нерешенные задачи новой отрасли алгебры — теории групп. Говорят, что на множестве некоторых математических объектов (чисел, геометрических преобразований и т. д.) задана структура группы, если для всех элементов этого множества выполняются определенные свойства — аксиомы группы. Понятие группы возникло в связи с задачей решения в радикалах алгебраических уравнений высших степеней. Впервые его ввел французский математик Э. Галуа (1811—1832). Понятие группы оказалось исключительно плодотворной идеей в самой математике и ее приложениях, а теория групп быстро стала содержательной математической дисциплиной, богатой сложными, еще нерешенными проблемами. На некоторых из них и сосредоточил свое внимание О. Ю. Шмидт. Им он посвятил три работы и за одну из них был награжден факультетом университета золотой медалью. Вместе с подготовкой к магистерским экзаменам он опубликовал в 1914 г. написанную в студенческие годы монографию „Абстрактная теория групп", которая стала классической и оказала большое влияние на алгебраические исследования в нашей стране.

В начале 1917 г. приват-доцент О. Ю. Шмидт приступил к чтению лекций по математике в Киевском университете. Но начавшаяся скоро Великая Октябрьская социалистическая революция переключила его талант и энергию из абстрактной области математики на решение трудных задач развития хозяйства и культурного строительства, связанных с созданием и укреплением Советского государства. Он заведует отделом Министерства продовольствия, много раз встречается с В. И. Лениным и в 1918 г. вступает в Коммунистическую партию. Его талант организатора был нужен многим, и он щедро делился своими идеями как член коллегий Народных комиссариатов продовольствия, финансов, просвещения, как член Президиума Госплана. Потом руководил Государственным издательством, организовал и до 1941 г. был главным редактором первого издания Большой Советской Энциклопедии. При всем этом не прекращал научных исследований, вел преподавательскую работу, заведовал кафедрой алгебры в Институте математики и механики.

В 1923 г. О. Ю. Шмидт принимает участие в исследовании Курской магнитной аномалии и публикует работу по геофизике об определении формы и глубины залегания рудных тел. Научная командировка в Геттинген дала новый импульс исследованиям по теории групп. Он удивил европейских математиков, стремительно войдя в проблематику новейших исследований и доказав теорему, которая теперь носит его имя и считается одной из основных в абстрактной теории групп.

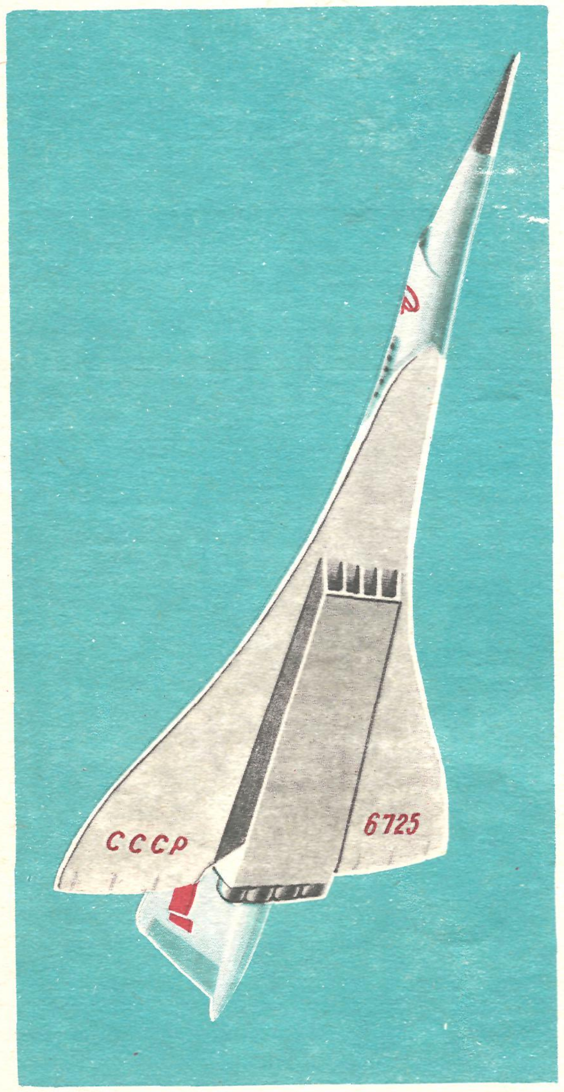
Возглавляемая О. Ю. Шмидтом Памирская экспедиция стала началом географической деятельности ученого. Задачи народного хозяйства, промышленного и культурного развития обширных северных территорий страны потребовали широкого и планомерного наступления на Арктику. И именно математик О. Ю. Шмидт возглавляет многие важные мероприятия этого плана. В 1929 г. он возглавляет научно-дипломатическую экспедицию на ледокольном пароходе „Седов" на Землю Франца-Иосифа. Экспедиция водрузила советский флаг на этих островах и организовала там первую полярную станцию. Вторая экспедиция на „Седове" достигла рекордной широты 82° 14′ и организовала научную станцию на Северной Земле. В 1932 г. экспедиция на „Сибирякове" впервые в истории Арктики в одну навигацию прошла без зимовки Северным морским путем и доказала возможность практического использования этого огромного, но исключительно трудного водного пути.

Челюскинская эпопея принесла ученому мировую известность, и ему было присвоено звание Героя Советского Союза.

Все эти годы Шмидт не прекращал и научную работу, которая протекала в сложных условиях арктических исследований. Например, предисловие ко второму изданию „Абстрактной теории групп" (1933) было написано на борту „Челюскина". Научные исследования теперь он проводил в области геофизики, а с 1943 г. начинает разрабатывать проблему планетной космогонии. Происхождение Земли интересовало ученого еще в студенческие годы. В 1925 г. он уже проводил расчеты устойчивости планетных движений. Проблемы геофизики приводили к еще более сложным задачам о происхождении Земли; ведь только зная, как оформилась наша планета, можно верно определить ее строение и протекающие в ней процессы.

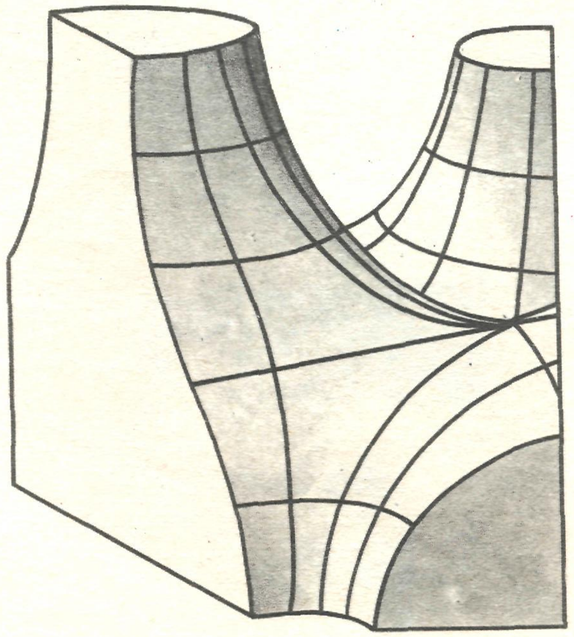
Тяжелый недуг вынудил ученого сократить масштабы деятельности, он бережливо использовал короткие промежутки отступления болезни, чтобы закончить научные статьи, выступить с докладами. О. Ю. Шмидт был одним из тех профессоров, которые прочли первые лекции студентам в новом корпусе МГУ на Ленинских горах. Последние два с половиной года своей жизни ученый был прикован к постели. Как материалист он мужественно принимал неизбежность суровой реальности. Когда в июле 1956 г. ученого посетили делегаты Третьего Всесоюзного математического съезда, он попросил остаться еще на несколько минут сокурсника по Киевскому университету члена-корреспондента АН СССР Бориса Николаевича Делоне. Последнее, что он смог сказать давнишнему другу: „Я благодарю судьбу, благодарю за ту жизнь, которую она мне дала. Сколько было хорошего и сколько интересного! Я не боюсь умирать".

82. Мстислав Всеволодович Келдыш



Мстислав Всеволодович Келдыш (1911—1978) — выдающийся советский математик, механик, организатор науки, в 1961—1975 гг.— президент АН СССР, трижды Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской и Государственных премий. Выполнил ряд фундаментальных исследований в области математики, механики, аэродинамики. Осуществил дальнейшее развитие классических результатов русских математиков и механиков П. Л. Чебышева, Н. Е. Жуковского, С. А. Чаплыгина.

М. В. Келдыш решил сложные проблемы в области теории функций действительной и комплексной переменных, дифференциальных уравнений в частных производных, в функциональном анализе, применении теории гармонических функций.



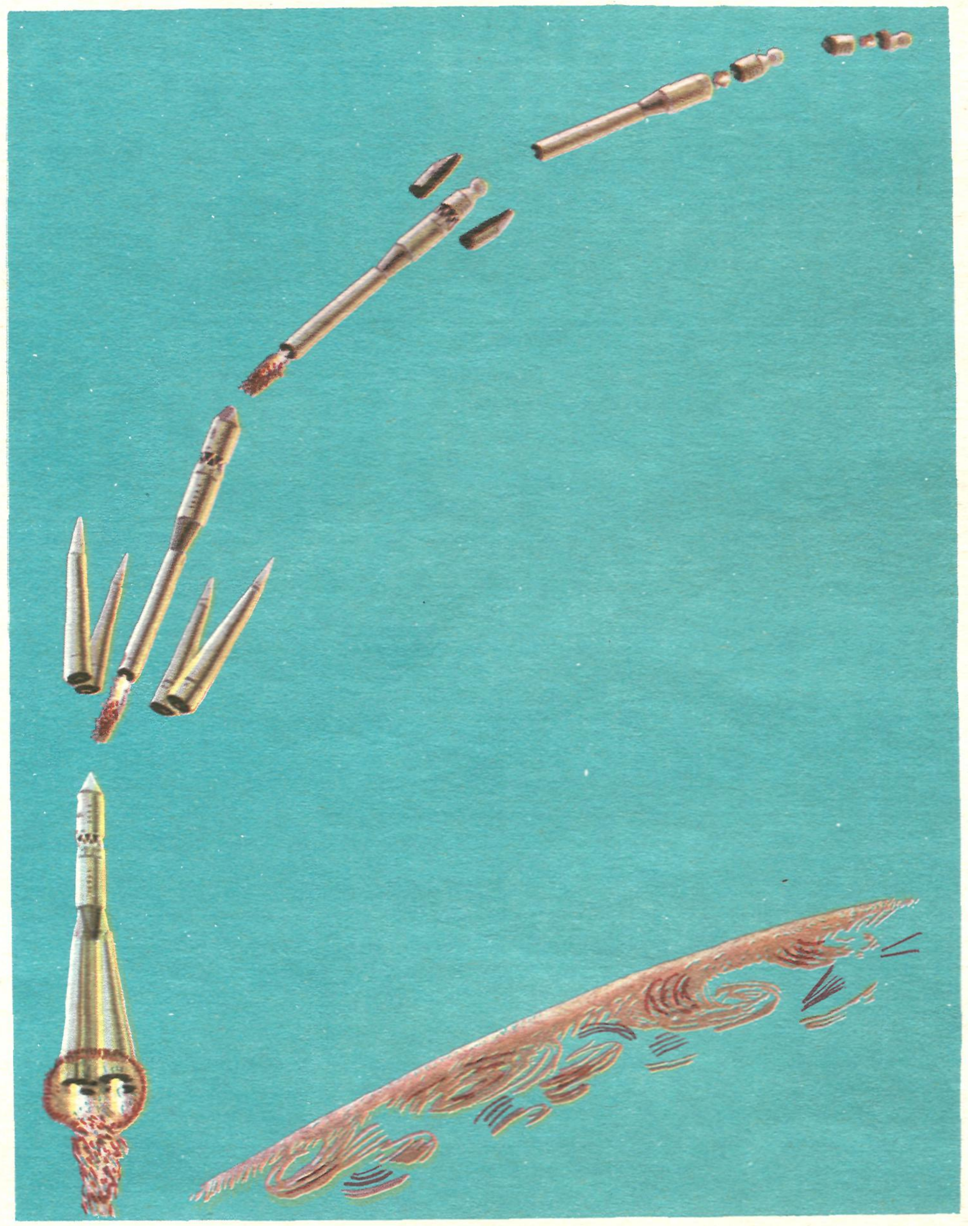
Математика, являющаяся самой древней из всех наук, вместе с тем остается вечно молодой, бурно развивающейся наукой, все время расширяющей области своего познания, все шире развивающей свои связи не только с естественными науками, но и с самыми разнообразными областями человеческой деятельности.

М. В. Келдыш

Ученый широко применял аппарат теории функций комплексной переменной к решению задач аэро- и гидродинамики, атомной энергетики и других проблем, имевших важное значение для развития советской математики и техники.

Разработка ученым математической теории самовозбуждающихся вибраций в конструкциях самолетов и открытые им методы расчета этих опасных явлений сыграли важную роль в освоении советской авиацией сверхзвуковых скоростей.

М. В. Келдыш внес большой вклад в развитие советской космической науки и техники. С его деятельностью связаны блестящие достижения нашего народа в освоении космического пространства. Ему принадлежит выдающаяся роль в становлении и развитии отечественной вычислительной техники и ее применений к решению сложных задач науки, техники и народного хозяйства.



82. Мстислав Всеволодович Келдыш

Выдающиеся достижения отечественных математиков прошлого достойно приумножают математики страны Советов. Среди них выдающийся ученый М. В. Келдыш.

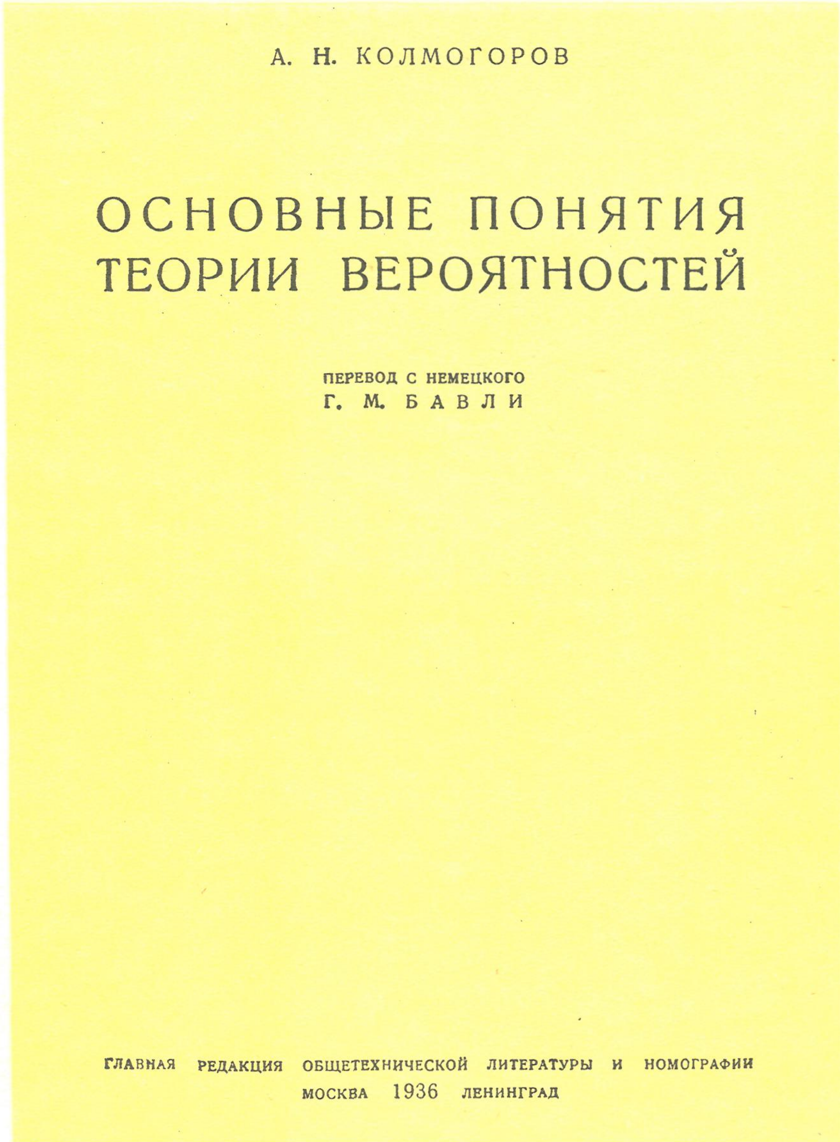
Творческий путь ученого начался в 1931 г. в Центральном аэрогидродинамическом институте им. Н. Е. Жуковского. Здесь он получил фундаментальные результаты в области аэрогидродинамики.

М. В. Келдыш и возглавленный им коллектив ученых выполнили большой цикл исследований по проблеме колебаний авиационных конструкций. Созданная им математическая теория и методы расчета закономерностей, связанных с упомянутыми опасными явлениями, дали возможность авиаконструкторам найти надежные методы их устранения.

М. В. Келдыш был одним из первых, кто в еще несмелой поступи новой отрасли знаний — кибернетике — услышал могучие шаги гиганта. С его именем связано становление отечественной вычислительной техники. Идеи Келдыша и разработанные им методы имели большое значение в решении сложнейших задач, возникших в связи с овладением атомной энергией.

В нашей стране он был одним из инициаторов стремительного освоения космоса, изучения его тайн. С именем Келдыша связаны блестящие успехи советской науки и техники, воплощенные в мощных советских ракетах, космических кораблях.

83. Андрей Николаевич Колмогоров



А. Н. КОЛМОГОРОВ

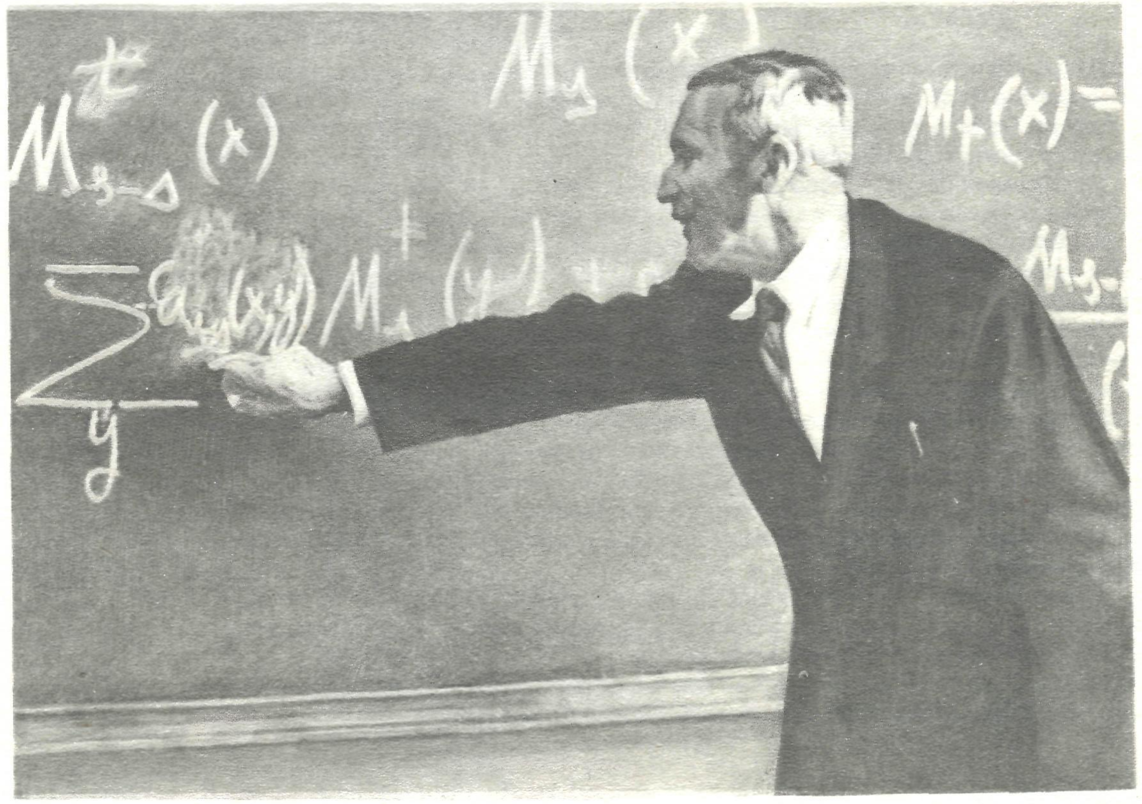
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО
Г. М. БАВЛИ

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И НОМОГРАФИИ
МОСКВА 1936 ЛЕНИНГРАД

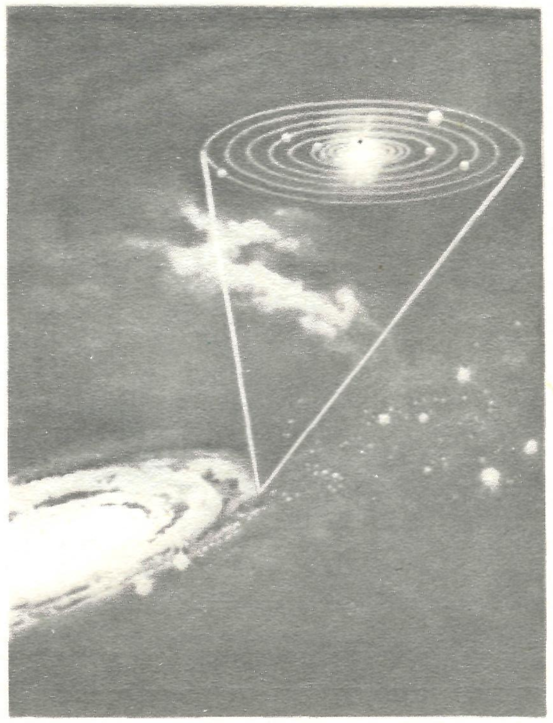
Математика — это то, посредством чего люди управляют природой и собой. Принципиально сфера применения математического метода не ограничена: все виды движения материи можно изучать математически.

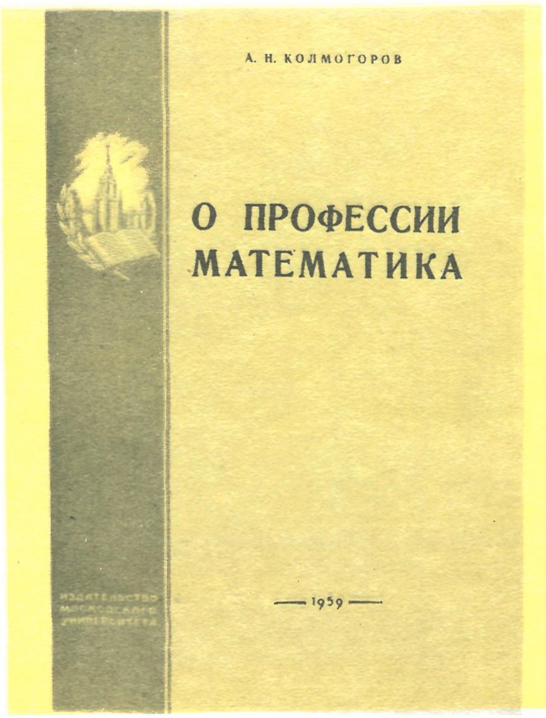
А. Н. Колмогоров



Андрей Николаевич Колмогоров (1903—1987) — выдающийся советский математик, педагог, общественный деятель, активный участник реформы математического образования в нашей стране. Создатель ряда новых направлений научных исследований в современной математике, где получил фундаментальные результаты. А. Н. Колмогоров удостоен высоких правительственных и научных наград. Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской и Государственных премий, член многих академий зарубежных стран, в том числе Парижской, Английской, Национальной Академии США, Голландской, Польской, Румынской, Венгерской и др.

В 1965 г. А. Н. Колмогорову и его ученику В. И. Арнольду присуждена Ленинская премия за фундаментальные исследования по теории устойчивости динамических систем. Из этих работ получены важные и оптимистические выводы об устойчивости Солнечной системы.

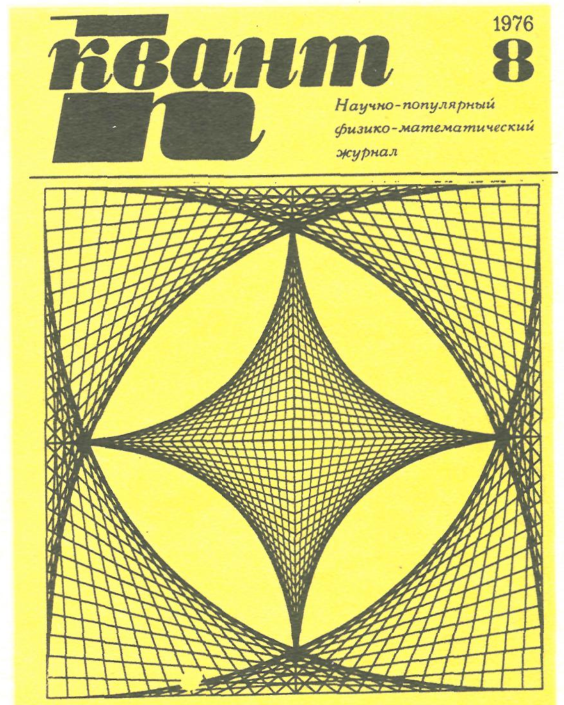




С 1925 г. развернулась плодотворная работа А. Н. Колмогорова в области теории вероятностей, где он решил ряд классических и новых задач и, используя теорию меры, а также идеи теории функций дествительной переменной, предложил аксиоматическое построение науки о закономерностях, которым подчиняются массовые случайные явления.

А. Н. Колмогоров: „Занимаясь с некоторым успехом, а иногда и с пользой довольно широким кругом практических приложений математики, я остаюсь в основном чистым математиком".

Много усилий ученый отдавал работе с молодежью, интересующейся математикой. Он часто выступал перед учащимися с лекциями. А. Н. Колмогоров — был организатором математических олимпиад, одним из организаторов научно-популярного физико-математического журнала „Квант", первым заместителем редактора этого журнала.



83. Андрей Николаевич Колмогоров

Андрей Николаевич Колмогоров — известный советский математик и активный деятель в области популяризации математики в нашей стране. Им получены фундаментальные результаты во многих отраслях классической и современной математики: в теории функций действительного переменного, теории вероятностей, математической статистике, теории приближения функций, функциональном анализе, математической логике и др.

Свое первое математическое открытие Колмогоров совершил в шестилетнем возрасте, когда знакомился с числами и действиями над ними. Он отметил следующую закономерность:

$1 = 1^2$,

$1 + 3 = 2^2$,

$1 + 3 + 5 = 3^2$,

. . . .

Андрей Николаевич мечтал стать лесничим. Привлекала его и история. Ей он посвятил свой первый научный доклад, прочитанный в семнадцатилетнем возрасте. Однако победила математика. Затем была учеба в университете в суровые годы после гражданской войны.

Колмогоров быстро достиг вершин математики. Он активно изучал выдающиеся достижения ученых прошлого и своих современников, а затем и сам стал обогащать математику новыми открытиями. Причем все эти годы, с начала своей трудовой деятельности, он как учитель математики и физики не прерывал связей со средней школой.

Во время Великой Отечественной войны Андрей Николаевич, по заданию главного артиллерийского управления, осуществил ряд исследований в теории вероятностей, связанных с оценкой эффективности артиллерийской стрельбы, и определил оптимальное рассеивание артиллерийских снарядов, благодаря чему мощность советской артиллерии возросла.

Колмогорова можно назвать естествоиспытателем самого широкого профиля. Например, теория турбулентного движения, развитая Колмогоровым и его школой, позволила разгадать природу атмосферных явлений (ветра, бури, вихря).

Движение тяжелого тела, закрепленного в одной точке, — необычно сложная механико-математическая задача. Над решением этой проблемы работали в свое время Эйлер, Ковалевская, Пуанкаре.

Труды Колмогорова по теории конечных автоматов явились теоретической основой новейшей вычислительной техники и кибернетики.

84. Выдающиеся советские математики

Владимир Андреевич Стеклов (1864–1926). Окончил Харьковский университет (1887), профессор (1896), доктор чистой математики (1902), член-корреспондент Петербургской АН (1903), академик Петербургской АН (1912), академик АН УССР (1925), с 1919 г. – вице-президент АН СССР.

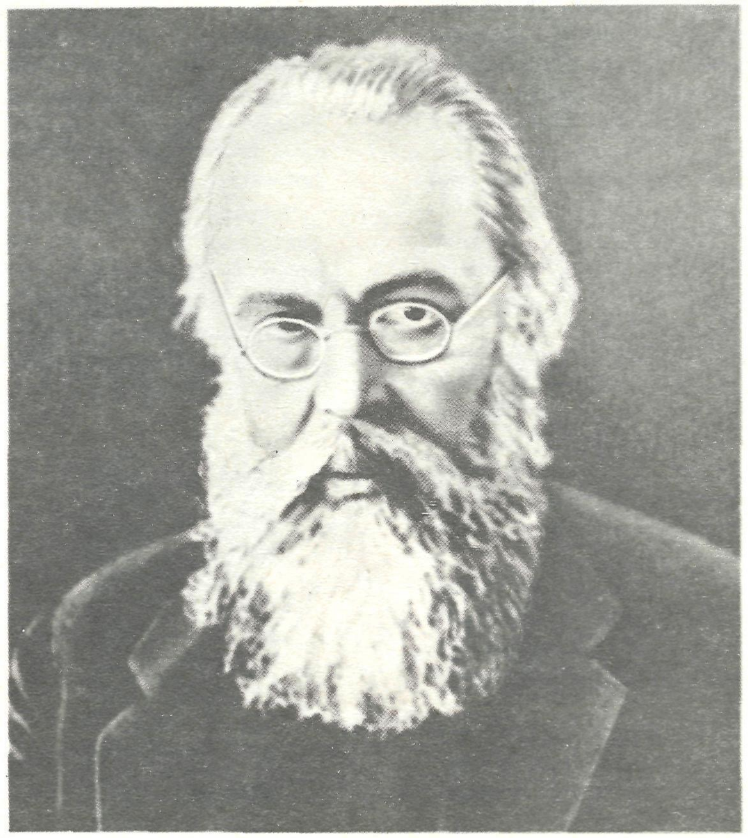
Николай Егорович Жуковский (1847–1921). Окончил Московский университет (1868), магистр прикладной математики (1876), доктор прикладной математики (1882), профессор (1886), член-корреспондент Петербургской АН (1894).

Николай Николаевич Лузин (1883–1950). Окончил Московский университет (1908), доктор чистой математики (1916), профессор (1917), академик АН СССР (1929), действительный член Краковской АН.

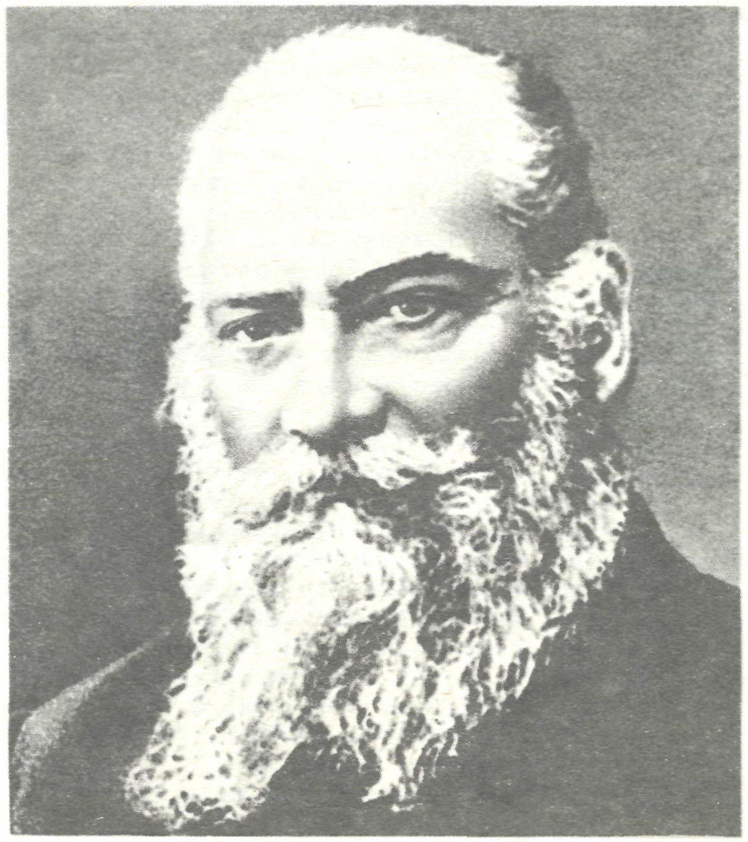
Александр Яковлевич Хинчин (1894–1959). Окончил Московский университет (1916), профессор (1922), доктор физико-математических наук (1935), член-корреспондент АН СССР (1939), лауреат Государственной премии (1941), действительный член Академии педагогических наук РСФСР (1944).

Иван Матвеевич Виноградов (1891–1982). Окончил Петербургский университет (1914), доктор физико-математических наук, профессор (1920), академик АН СССР (1929), лауреат Государственной (1941) и Ленинской (1972) премий, дважды Герой Социалистического Труда (1945, 1976). Иностранный член Лондонского королевского общества (1942), член-корреспондент Парижской Академии наук (1946), иностранный член Датской королевской Академии наук и литератур (1947), иностранный почетный член Американской Академии искусств и наук (1947), член-корреспондент Германской АН (1950), почетный член Венгерской АН (1950), иностранный член Национальной Академии деи Линчеи (в Риме) (1958), член Сербской АН (1959).

Михаил Алексеевич Лаврентьев (1900–1980). Окончил Московский университет (1922), профессор (1929), доктор технических наук (1932), доктор физико-математических наук (1933), академик АН УССР (1939), академик АН СССР (1946), действительный член Чехословацкой АН (1957), член Болгарской Академии наук (1967), дважды лауреат Государственной премии (1946, 1949), лауреат Ленинской премии (1958), Герой Социалистического Труда (1967).



ВЛАДИМИР АНДРЕЕВИЧ СТЕКЛОВ



НИКОЛАЙ ЕГОРОВИЧ ЖУКОВСКИЙ

НИКОЛАЙ НИКОЛАЕВИЧ ЛУЗИН

АЛЕКСАНДР ЯКОВЛЕВИЧ ХИНЧИН

ИВАН МАТВЕЕВИЧ ВИНОГРАДОВ

МИХАИЛ АЛЕКСЕЕВИЧ ЛАВРЕНТЬЕВ

84, 85. Выдающиеся советские математики

В „Истории отечественной математики" [34] упоминаются сотни имен советских математиков, среди них — Герои Социалистического Труда, лауреаты Ленинской и Государственной премий, члены многих иностранных академий и научных обществ. На этих плакатах представлены двенадцать ученых.

В сравнении с многовековой историей математики годы развития советской науки — небольшой период, и все же они составляют целую эпоху. Среди лучших представителей русской интеллигенции многие математики остались верными отечеству и отдали свой талант служению народу.

Первые шаги советская математика делала в тяжелых условиях гражданской войны, в борьбе с внутренней и внешней контрреволюцией. Огромное значение для создания новых научных центров, воспитания молодых ученых и привлечения к активной деятельности ученых старшего поколения имела неутомимая деятельность В. И. Ленина, который при всей своей занятости уделял много внимания развитию физико-математических наук. А. В. Луначарский писал о В. И. Ленине, что „к точным наукам он относился с огромным интересом и уважением. Здесь он уже не говорил о кабинетности. Эта работа ему не казалась оторванной от революционной деятельности мира... Ученый — это хорошо, это для него звучало как пролетарий".

А. М. Горький в очерке „В. И. Ленин" прекрасно описал один из эпизодов борьбы В. И. Ленина за переход старых научных работников на работу в советские научные центры. Он рассказывал о беседе 26 января 1921 г. В. И. Ленина с академиками В. А. Стекловым и С. Ф. Ольденбургом, а также президентом Военно-морской Академии В. Н. Тонковым: „Помню, я был у него с тремя членами Академии наук. Шел разговор о необходимости реорганизации одного из высших научных учреждений Петербурга. Проводив ученых, Ленин удовлетворенно сказал:

— Это я понимаю. Это — умники. Все у них просто, все сформулировано строго, сразу видишь, что люди хорошо знают, чего хотят. С такими работать — одно удовольствие. Особенно понравился мне этот...

Он назвал одно из крупных имен русской науки, а через день уже говорил мне по телефону:

— Спросите С., пойдет он работать с нами?

И когда С. принял предложение, это искренно обрадовало Ленина, потирая руки, он шутил:

— Вот так, одного за другим, мы перетянем всех русских и европейских Архимедов, тогда мир, хочет не хочет, а — перевернется!" [28, с. 257].

Ученым С., согласие которого работать в советских учреждениях так обрадовало В. И. Ленина, был математик с мировым именем В. А. Стеклов.

Он, ни минуты не колеблясь, перешел на сторону победившего трудового народа и повел за собой многих ученых. Имеются сведения о том, что были и другие встречи В. А. Стеклова с В. И. Лениным. Ученый высоко ценил исключительные организаторские способности и глубокий аналитический ум основателя первого государства трудящихся. Он писал: „Как практический деятель, он, на мой взгляд, обладает редкой способностью приводить в осуществление раз намеченную им цель, выбирая для этого средства, наиболее целесообразные для данного места и времени" (Цит. по кн.: Владимиров В. С., Маркуш И. И. Владимир Андреевич Стеклов — ученый и организатор науки. — М.: Наука, 1981. — С. 69). В. А. Стеклов много сделал для развития математических наук в нашей стране и утверждения авторитета и влияния отечественной математической школы за рубежом.

По инициативе В. А. Стеклова в 1921 г. организовывается физико-математический институт АН СССР, который с 1934 г. был разделен на два научных центра: Математический институт им. В. А. Стеклова и физический институт им. П. М. Лебедева. Они стали крупнейшими научными центрами развития физико-математических наук в нашей стране.

При этом советские математики проявили подлинный героизм в решении сложных научных проблем. А. Я. Хинчин писал о первом периоде их деятельности: „Когда, после первых тяжелых лет революции, после голода, блокады, гражданской войны, мы получили наконец возможность научных сношений с учеными западных стран, вполне естественным было ожидать, что при быстроте развития современной науки мы окажемся отброшенными далеко назад, — на самом деле оказалось, что в эти годы научной разлуки, среди разрухи, в нетопленных кабинетах, — а чаще всего и вовсе без кабинетов... напряжение мысли [наших ученых] было не менее сильно и не менее плодотворно. То, что во всех областях математики писалось на Западе, было и для наших математиков родным и близким; а в некоторых отдельных дисциплинах русская математика с полным правом могла смотреть на тогдашнюю европейскую литературу сверху вниз, как уже на превзойденный этап".

В древней науке о свойствах чисел и геометрических фигур, математическом анализе, в частности в его высших разделах — теории функций действительной и комплексной переменной, дифференциальных уравнений, вариационном исчислении, в различных направлениях геометрии, алгебры, теории вероятностей, топологии, кибернетики — советские математики решили целый ряд сложнейших проблем и открыли новые направления в развитии математических исследований.

Характерный признак деятельности советских математиков — глубокие связи фундаментальных теоретических исследований с практикой социалистического и коммунистического строительства. Это особенно выразительно проявилось в годы тяжелых испытаний, когда ударные силы мирового империализма пытались задушить Страну Советов.

В годы Великой Отечественной войны (1941—1945) фронт борьбы с фашистскими захватчиками проходил и через конструкторские бюро, и через научно-исследовательские лаборатории, где рождалась новая боевая техника, вырастал потенциал оборонной мощи Страны Советов. В значительной степени эти исследования осуществились на математическом фундаменте.

Решение советскими математиками сложных проблем аэродинамики позволило авиаконструкторам создать прекрасные боевые самолеты и, прежде всего, повысить их скорость. Академик М. В. Келдыш и возглавляемые им научные коллективы успешно решили проблемы флаттера и шимми, что открыло путь советским авиаконструкторам к овладению большими скоростями и созданию реактивной авиации: первый наш реактивный истребитель поднялся в воздух в мае 1942 г., на месяц раньше немецкого.

Много сложных работ большого оборонного значения выполнили ученые Математического института АН СССР. Это определение наивысшей крутизны нарезки стволов пушек (академик М. Г. Чатаев), теория оптимального рассеивания артиллерийских снарядов (академик А. Н. Колмогоров), вычисление таблиц для определения координат корабля при помощи радиопеленгов (академик С. Н. Бернштейн). Исключительно важный для Советской Армии Большой астрономический ежегодник на 1943, 1944, 1945 гг. создали ленинградские ученые в тяжелейших условиях блокады. Каждый третий научный работник из тех, кто работал над созданием этого календаря, погиб. Трудно даже представить, сколь страшные, невосполнимые потери понесла наша наука в те дни. Но неисчерпаемы таланты советского народа.

Новые поколения математиков приумножили успехи своих довоенных коллег. Решение сложных задач овладения атомной энергией, сооружение гигантских гидротехнических комплексов, овладение космическим пространством, автоматизация промышленного и сельскохозяйственного производства — все это непрекращающийся поединок за создание все более мощного математического аппарата, на основании которого строятся математические модели объектов реальной действительности. На этом пути глубокие теоретические исследования математиков воплощались в совершенных формах космических кораблей и их траекторий, в мощном биении атомных реакторов, четких ритмах работы автоматизированных линий заводов-автоматов.

На основании заданий, стоящих перед советской техникой и народным хозяйством, возник и бурно развивается целый комплекс новых математических дисциплин, объединенных под общим названием — кибернетика и информатика.

В наше время трудно назвать научную дисциплину, к которой нельзя было бы без достаточных оснований прибавить прилагательное математическая. А это означает, что математика проникла во все области научных исследований и практической деятельности человека, поэтому математики стоят на передовых рубежах коммунистического строительства. В этом залог дальнейших успехов древней и вечно молодой области теоретического знания — математики.

85. Выдающиеся советские математики

Павел Сергеевич Александров (1896—1982). Окончил Московский университет (1917), профессор (1929), член-корреспондент АН СССР (1929), академик АН СССР (1953), доктор физико-математических наук (1934), иностранный член Геттингенской АН (1945), Национальной АН (США) (1947), член-корреспондент Германской АН (1951), действительный член Польской АН (1959).

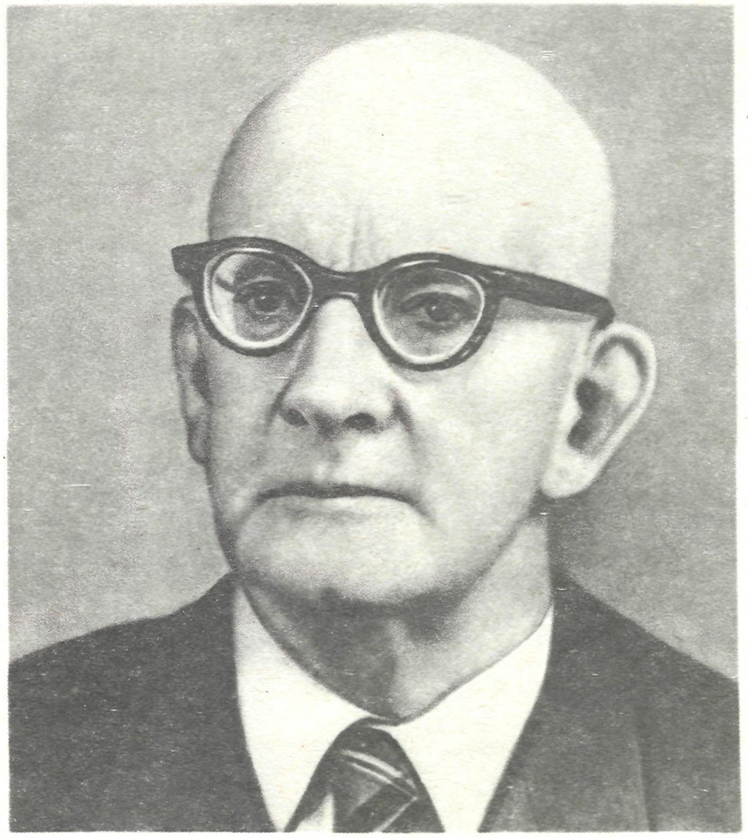
Николай Николаевич Боголюбов (род. в 1909 г.). Окончил аспирантуру АН УССР (1925), доктор физико-математических наук (1930), профессор (1936), член-корреспондент АН УССР (1939), член-корреспондент АН СССР (1946), академик АН УССР (1948), академик АН СССР (1953), лауреат Государственной премии (1947), лауреат Ленинской премии (1958), дважды Герой Социалистического Труда (1969, 1979), член Американской Академии искусств и наук (1960), иностранный член Болгарской АН (1961), член Польской АН (1962), член Германской АН (1963), член Национальной АН (США) (1969).

Виктор Михайлович Глушков (1923—1982). Окончил Ростовский университет (1948), доктор физико-математических наук (1956), профессор (1957), член-корреспондент АН УССР (1958), академик АН УССР (1961), академик АН СССР (1964), лауреат Ленинской премии (1964), лауреат Государственной премии (1968), Герой Социалистического Труда (1969).

Лев Семенович Понтрягин (род. в 1908 г.). Окончил Московский университет (1929), доктор физико-математических наук, профессор (1935), академик АН СССР (1958), лауреат Государственной премии (1941), лауреат Ленинской премии (1962), Герой Социалистического Труда (1969).

Юрий Алексеевич Митропольский (род. в 1917 г.). Окончил Казахский университет (1942), кандидат физико-математических наук (1948), доктор технических наук (1951), профессор (1954), член-корреспондент АН УССР (1958), академик АН УССР (1961), лауреат Ленинской премии (1965).

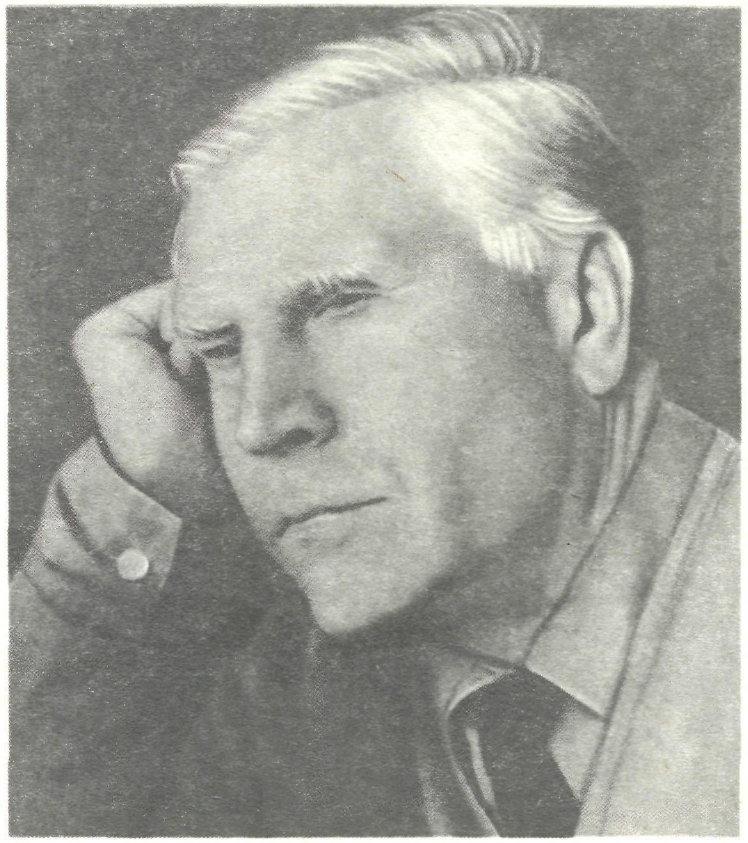
Алексей Васильевич Погорелов (род. в 1919 г.). Окончил Военно-воздушную академию (1945), доктор физико-математических наук (1948), профессор (1950), член-корреспондент АН УССР (1951), академик АН УССР (1961), член-корреспондент АН СССР (1960), академик АН СССР (1976), лауреат Государственной премии (1950), лауреат Ленинской премии (1962).



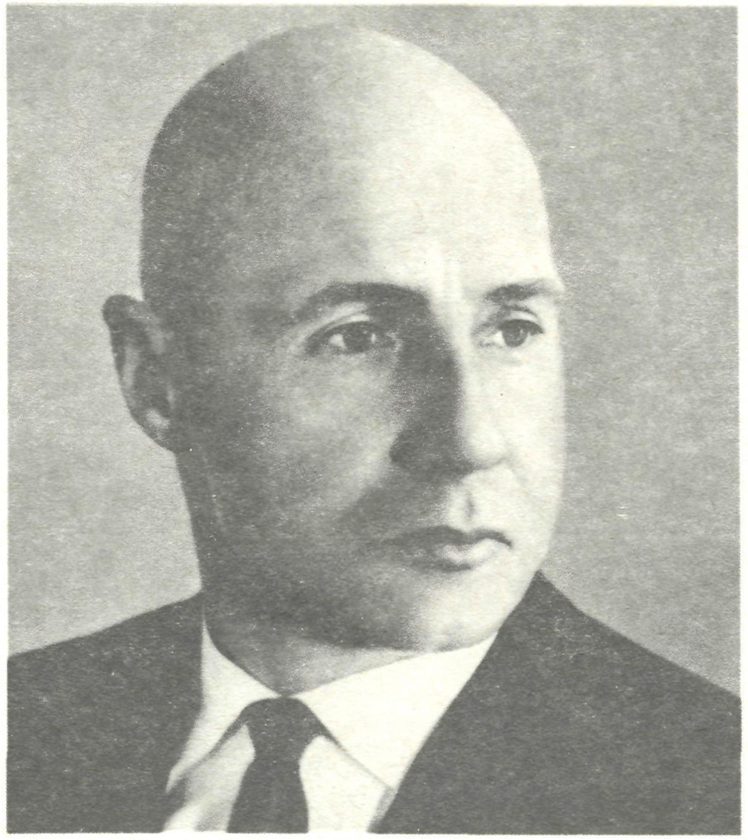
ПАВЕЛ СЕРГЕЕВИЧ АЛЕКСАНДРОВ

НИКОЛАЙ НИКОЛАЕВИЧ БОГОЛЮБОВ

ВИКТОР МИХАЙЛОВИЧ ГЛУШКОВ



ЛЕВ СЕМЕНОВИЧ ПОНТРЯГИН



ЮРИЙ АЛЕКСЕЕВИЧ МИТРОПОЛЬСКИЙ

АЛЕКСЕЙ ВАСИЛЬЕВИЧ ПОГОРЕЛОВ

86. Выдающиеся женщины-математики

Софья Александровна Яновская (1896–1966). Окончила Институт красной профессуры (1929), профессор (1931), доктор физико-математических наук (1935). С 1931 г. работала в Московском университете.

Научные труды посвящены основаниям математики, математической логике, философии и истории математики.

Нина Карловна Бари (1901–1961). Окончила Московский университет (1921), профессор (1934), доктор физико-математических наук (1935). В 1921–1925 гг. работала в Московском лесотехническом институте, с 1926 г. в Московском университете.

Научные труды посвящены теории функций, математическому и функциональному анализу.

Пелагея Яковлевна Кочина (Полубаринова-Кочина) (род. в 1899 г.). Окончила Петроградский университет (1921), профессор (1933), доктор физико-математических наук (1940), член-корреспондент АН СССР (1946), академик АН СССР (1958), лауреат Государственной премии (1948), Герой Социалистического Труда (1969). С 1959 г. работала в Институте гидродинамики Сибирского отделения АН СССР, с 1971 г. работает в Институте проблем механики АН СССР.

Научные труды посвящены дифференциальным уравнениям в частных производных, гидроаэромеханике, теории фильтрации, истории математики и механики.

Екатерина Логвиновна Ющенко (Рвачева) (род. в 1919 г.). Окончила Среднеазиатский университет (1942), доктор физико-математических наук (1966), член-корреспондент АН УССР (1976). В 1946–1951 гг. работала во Львовском отделении Института математики АН УССР, 1951–1958 гг. — в Институте математики АН УССР, с 1958 г. работает в Институте кибернетики АН УССР.

Научные труды посвящены теории вероятностей, электронным вычислительным машинам, программированию.

Людмила Всеволодовна Келдыш (1904–1976). Окончила Московский университет (1925), доктор физико-математических наук (1941), профессор (1964). С 1934 г. работала в Математическом институте АН СССР.

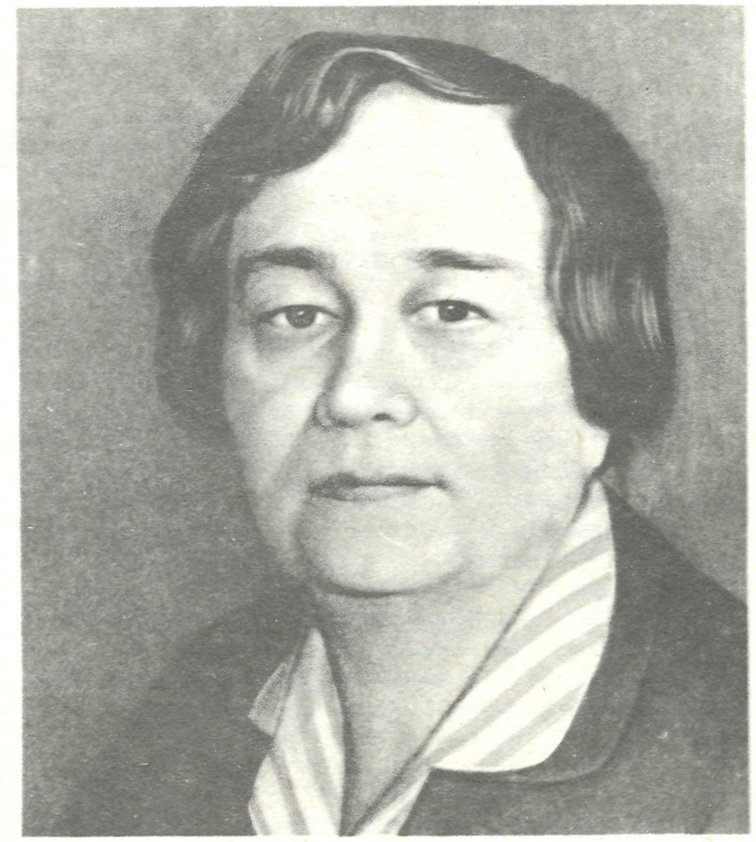
Научные труды посвящены топологии, теории функций действительного переменного, математической логике.

Ольга Арсеньевна Олейник (род. в 1925 г.). Окончила Московский университет (1947), доктор физико-математических наук (1954), профессор (1955), действительный иностранный член Итальянской АН (1964). С 1950 г. работает в Московском университете, а также в Институте проблем механики АН СССР.

Научные труды посвящены дифференциальным уравнениям в частных производных, топологии и прикладной математике.

СОФЬЯ АЛЕКСАНДРОВНА ЯНОВСКАЯ

НИНА КАРЛОВНА БАРИ



ПЕЛАГЕЯ ЯКОВЛЕВНА ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА

ЕКАТЕРИНА ЛОГВИНОВНА ЮЩЕНКО

ЛЮДМИЛА ВСЕВОЛОДОВНА КЕЛДЫШ

ОЛЬГА АРСЕНЬЕВНА ОЛЕЙНИК

86. Выдающиеся женщины-математики

О первой женщине в истории математики известно только, что она была лучшей ученицей в школе Пифагора. Более чем через тысячу лет мы встречаем имя Гипатии Александрийской (370—415), трагическая судьба которой как бы сфокусировала в себе ненависть всех религий к науке и ее творцам, а также реакционное, антиобщественное отношение к женщине. История математики знает имена многих мужественных женщин-математиков, которые стремились заниматься научной и педагогической деятельностью, быть полезными обществу. И всегда на пути этих благородных стремлений стояли законы феодального, а затем буржуазного общества, в которых нашли отражение пропагандируемые религией взгляды на женщину как низшее в сравнении с мужчиной существо.

Французский математик и механик, основательница теории изгиба пластин Софья Жермен (1776—1831), подписывала свои письма к К. Ф. Гауссу мужским именем М. Леблан. Только много позже Гаусс узнал, кто был его корреспондентом, математический талант которого он так высоко ценил.

У Жермен было достаточно оснований опасаться, что король математики, узнав, что серьезные математические проблемы он обсуждает с женщиной, прекратит переписку. Между тем это была замечательная женщина, получившая первоклассные результаты в теории чисел (доказательство частных случаев великой теоремы Ферма) и в математической физике. За исследования в теории упругости Парижская Академия наук в 1811 году наградила ее премией. Это была первая премия, выданная женщине Парижской Академией.

Первой программисткой, вошедшей в историю математики, была Ада Байрон (в замужестве — графиня Ловлейс). С раннего возраста она проявила недетский интерес к машинам и различным промышленным установкам. Когда ей было 16 лет, знаменитый математик того времени Огастес де Морган заметил, что если бы она была мальчиком, то непременно получила бы самое почетное звание — „Сеньор Ванглер", присуждаемое студенту-математику. Дружба и переписка с Чарльзом Беббеджем (1792—1871) вдохновляли Аду Байрон в ее исследованиях по теории действия аналитической машины — прототипа современной аналого-цифровой вычислительной машины. Во многих случаях Ада высказывала предложения, приближающиеся к современным идеям. Например, она писала о возможности сочинять музыку с помощью вычислительной машины; указывала, что программа для машины будет вводиться посредством перфорированных карт. Она предложила идею подпрограмм и повторного, неоднократного использования перфокарт. Ада умерла в 1852 г. в возрасте 36 лет, в том же возрасте, что и ее отец — великий английский поэт, и похоронена рядом с ним.

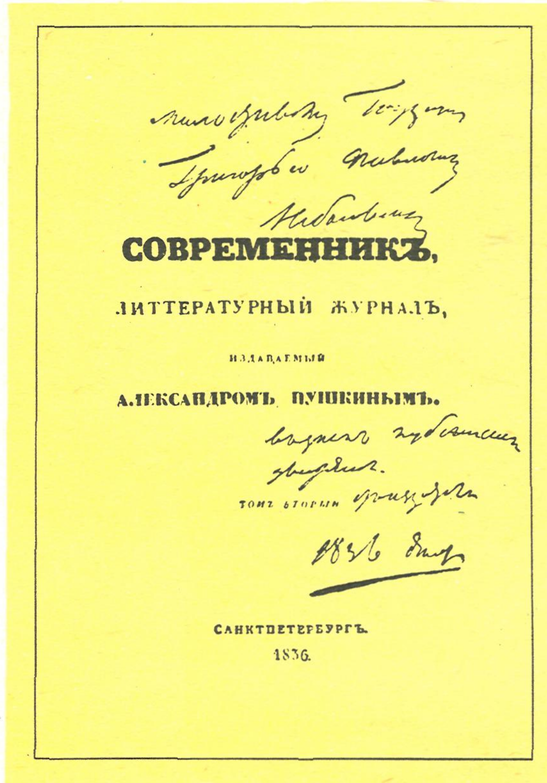
Известны драматические коллизии в жизни С. В. Ковалевской (1850—1891), которая, несмотря на свои блестящие успехи в математике и механике, общеевропейскую славу первоклассного ученого, так и не получила возможности применить в полную силу свои блестящие способности исследователя и педагога на родине.

Даже в XX в. немецкий математик Давид Гильберт должен был применить весь свой авторитет главы немецкой математики и доходящее до дерзости упорство, чтобы отстоять право выдающейся женщины-математика Эмми Нетер (1882—1935) заседать в научном обществе, где до этого были одни мужчины.

Только социалистическое общество обеспечило женщине равные с мужчиной права во всех сферах человеческой деятельности, в том числе и в научном творчестве. Закономерно, что именно в нашей стране женщины-математики, обогатившие математическую науку важными открытиями, работают в различных областях математики и ее применений, а также в области истории и методологии математики.

Биография каждой из советских женщин-математиков — это частица биографии великого советского народа. Например, Софья Александровна Яновская, еще обучаясь на математическом отделении Одесских женских курсов, стала активной участницей подпольной организации помощи политзаключенным, а в ноябре 1918 г. вступила в члены нелегальной в то время (в г. Одессе) партии большевиков. Она выполняла различные ответственные поручения губернского партийного комитета, редактировала газету „Коммунист", которая печаталась подпольно, и каждую неделю приносила на явочную квартиру новые материалы, уходя с планом очередного номера газеты.

Потом был фронт, борьба с остатками банд, чоновские отряды. Только осенью 1923 г. Софью Александровну командировали в Москву в Институт красной профессуры, и она смогла отдаться математике, ее истории, заняться сложными философскими проблемами. Годы упорного труда ушли на подготовку „Математических рукописей" Карла Маркса. Эта книга, увидевшая свет в 1968 г., открыла миру новые неизвестные ранее грани таланта величайшего ученого и политического деятеля Карла Маркса.


СОВРЕМЕННИКЪ,

ЛИТТЕРАТУРНЫЙ ЖУРНАЛЪ,

ИЗДАВАЕМЫЙ

АЛЕКСАНДРОМЪ ПУШКИНЫМЪ.

ТОМЪ ВТОРЫЙ.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.

1836.

Вдохновение нужно в геометрии, как и в поэзии.

А. С. Пушкин

Когда я узнаю, что Пушкин изучал Араго, Д'Аламбера, теорию вероятностей, Гизо, историю средних веков, — мне не обидно, что я потратил годы на приобретение знаний, которыми не воспользовался.

В. Брюсов

Но парабола только п р и т а и л а с ь в уравнении, не умерла в нем, так, как и цифра в формуле. Для получения действительно сущего результата буква заменяется цифрой, формула получает живую особость, уносится в мир событий, из которого вышла, движется и оканчивается практическим результатом, не уничтожая, с своей стороны, формулу.

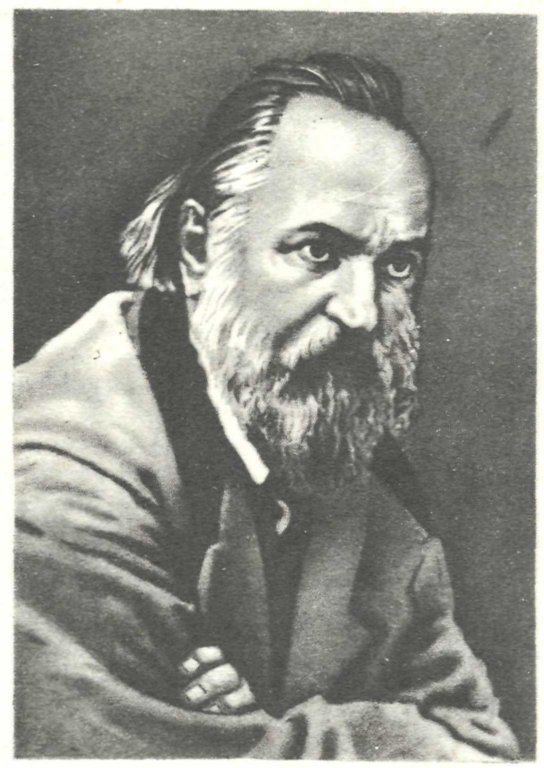
А. И. Герцен

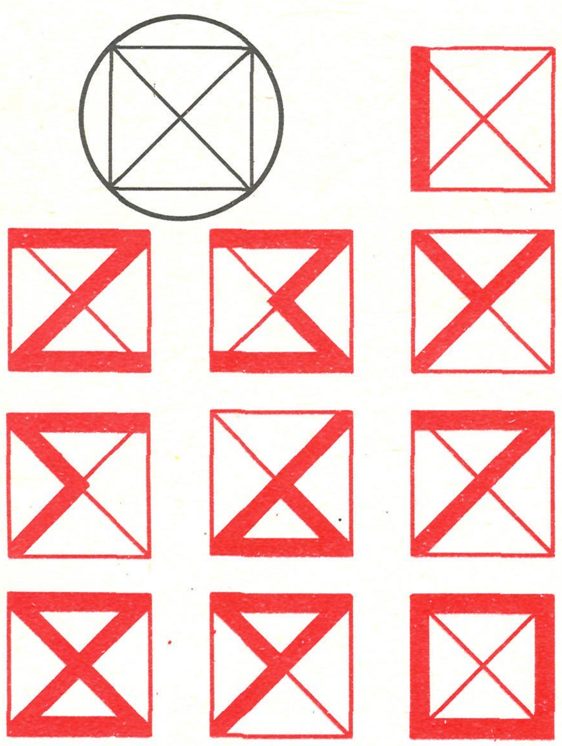
Разносторонними были интересы А. С. Пушкина (1799—1837). Вяземский писал о Пушкине, что тот был „страстен и к наукам естественным и особенно математическим, которые составляли значительнейший капитал его познаний и были до конца любимым предметом его ученых занятий и глубоких исследований".

В двух из четырех вышедших при жизни номерах „Современника" были напечатаны научно-популярные статьи профессионального дипломата и широко образованного человека Л. Б. Козловского. Это „Разбор Парижского Ежегодника" и „О надежде".

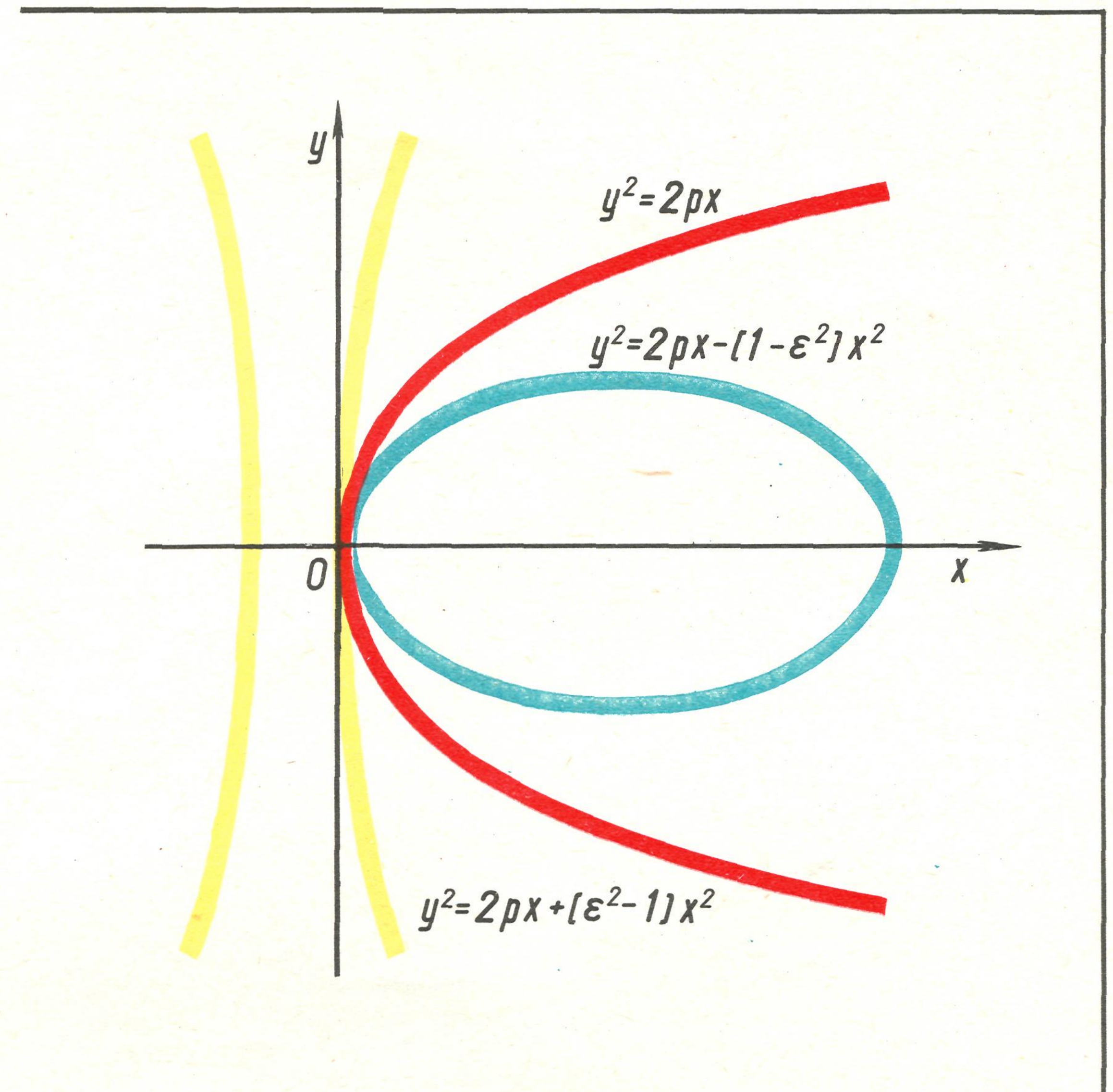
Большим поклонником математики был М. Ю. Лермонтов (1814—1841). Он всегда возил с собой учебник математики, с удовольствием решал математические задачи, удивлял сослуживцев умением демонстрировать математические фокусы на отгадывание задуманных чисел.

Выдающийся русский революционер-демократ, философ-материалист и писатель А. И. Герцен (1812—1870) окончил с серебряной медалью физико-математическое отделение Московского университета. Уделял внимание разработке философских проблем математики, придавал большое значение внедрению математических методов в различных областях знания, прежде всего в естествознании. Высказал ряд глубоких мыслей об отношении математических абстракций к реальной действительности, о природе и диалектике развития математических абстракций.





В „Table-talk" („Застольный разговор"), заведенном Пушкиным в 1830 г., его рукой сделана краткая заметка о происхождении написания индийских цифр.



87. Выдающиеся русские писатели и математика

Многие выдающиеся русские писатели были почитателями математики, с большим интересом изучали ее, популяризировали, использовали в своих произведениях.

Так, уже в первом томе „Современника" А. С. Пушкин поместил статью П. Б. Козловского „Разбор парижского математического ежегодниика на 1836 год", в которой говорилось о большой популяризаторской работе, проводимой в Европе. Автор статьи с неудовлетворением отмечает, что хотя в России печатных книг издается достаточно много, однако все они так или иначе относятся либо к литературе, либо к истории. В третьем томе „Современника" сразу после большого цикла стихов Ф. И. Тютчева Пушкин поместил статью П. Б. Козловского „О надежде", которая была едва ли не первым популярным изложением теории вероятностей на русском языке.

В седьмом томе журнала, который вышел после гибели А. С. Пушкина, была напечатана большая статья П. Б. Козловского „Краткое начертание теории паровых машин". В примечании к этой статье большой друг поэта П. А. Вяземский писал, что поэт накануне дуэли, 26 января, просил его, Вяземского, напомнить Козловскому об обещанной статье.

Возможно, П. А. Вяземский имел в виду попытки поэта постичь происхождение используемых нами цифр. Соответствующие записи и чертежи находим в записной книжке Пушкина за 1835 г. Известно также, что поэт имел намерение написать биографию Н. Г. Курганова (1725–1796) — талантливого самородка, сына солдата, ставшего в тридцать девять лет профессором математики и навигации. Его „Универсальная арифметика" заменила знаменитую „Арифметику" Магницкого в школах и различных специальных учебных заведениях России.

Известно, что в творчестве Брюсова математика и физика занимали почетное место. Достаточно вспомнить стихотворения „К портрету Лейбница", „Числа", „Мир электрона" и др.

А. И. Герцен знал высшую математику еще до поступления на физико-математический факультет Московского университета. Он так охарактеризовал одного учителя математики: „Знает математику до конических сечений и больше ничего не знает". Герцен был одним из лучших студентов физико-математического факультета. При окончании университета он был награжден медалью за работу „Аналитическое изложение солнечной системы Коперника" и получил степень кандидата.

Приведем несколько интересных высказываний А. И. Герцена о математике: „Математик, отвлекая линию от площади и площадь от тела, знает, что реально одно тело, а линия и площадь — абстракции".

„...Содержание спрятано в...алгебраических формулах для того, чтоб, раскрывая закон, не повторять сто раз одного и того же".

„Вообще математика, несмотря на то, что предмет ее, по превосходству, мертв и формален, отделилась от сухого *то или другое.* Что такое дифференциал? — Бесконечно малая величина; стало быть, или она имеет величину, и в таком случае это — величина конечная, или не имеет никакой величины, в таком случае он — нуль. Но Лейбниц и Ньютон постигли шире и приняли сосуществование бытия и небытия, начальное движение возникновения, перелив от ничего к чему-нибудь. Результаты теории бесконечно малых известны. Далее, математика не испугалась ни отрицательных величин, ни несоизмеримости, ни бесконечно великого, ни мнимых корней. А, разумеется, все это падает в прах перед узеньким рассудочным „то или другое".

А. И. Герцен использовал математику, чтобы высмеять бессмысленность религиозных раздоров и заклеймить жестокую цену, которую платило за них человечество: „За что погибли тысячи и тысячи еретиков? За то, что одни уверяли, что 2X2 *три,* а другие твердо знали, что 2X2 *пять* и жарили за это целыми стадами честных испанцев, немцев, голландцев, и неумытые судьи, возвращаясь домой, говорили: „Что делать: справедливость выше всего...".

Очень любил математику М. Ю. Лермонтов. Найдена собственноручная подпись поэта в учебнике математики французского математика Этьенна Безу (1730–1783), распространенном в России в первой половине XIX в. Современники поэта вспоминают, что когда Тенгинский полк стоял в Анапе, офицеры заговорили вдруг об ученом кардинале, который мог устно решать сложнейшие математические задачи. Лермонтов предложил всем присутствующим свой фокус, требующий выполнения таких действий: задумайте число, прибавьте к нему 25, прибавьте еще 125, вычтите 37 и затем задуманное число, разность умножьте на 5, полученное произведение разделите на 2. В результате получаем 282,5.

Лермонтов успешно демонстрировал свой математический фокус и имел репутацию искусного математика.

Огромный интерес к математике проявлял замечательный представитель героического поколения революционных демократов Н. Г. Чернышевский (1828–1889). Он одним из первых откликнулся восторженной рецензией на книгу М. В. Остроградского „Учебные руководства для военно-учебных заведений. Руководство начальной геометрии". Рецензия была опубликована в журнале „Современник" (1855, т. 53, № 9), где Чернышевский очень высоко оценил осуществленную Остроградским реформу преподавания математики: „Если бы г. Остроградский написал руководство свое по общей методе, принятой для учебников геометрий, его книга и тогда, без сомнения, заслуживала бы величайшего внимания, потому что его математический гений необходимо улучшил бы изложение многих частей. Но руководство, составленное г. Остроградским, имеет другое, более глубокое значение для науки, потому что наш знаменитый математик вводит совершенную реформу в методе учебников геометрии, предполагая заменить способ доказывания посредством черчения фигур способом аналитическим, доказывающим геометрические положения без пособия фигур". Заканчивая рецензию, он писал: „...Руководство г. Остроградского отличается необыкновенной ясностью и строгостью изложения; излишне и рекомендовать его книгу величайшему вниманию всех преподавателей математики — все это совершенно излишне, потому что на ней выставлено имя г. Остроградского".

Занимаясь проблемами математического мировоззрения, Н. Г. Чернышевский изучал естественно-математическую литературу, знакомился с философскими идеями Декарта, Ньютона, Лейбница, Эйлера, Лапласа и других выдающихся математиков, астрономов, физиков. С материалистических позиций он определил предмет и метод математики, ее место в системе теоретических знаний и практической деятельности человека, высоко оценил математические методы в познании явлений окружающей человека природы, в создании новой техники.

В письмах к сыну Александру из ссылки Н. Г. Чернышевский много размышляет о математике, исписывает десятки страниц, решая теоретико-числовые задачи, излагая свои взгляды на природу математических абстракций и другие методологические вопросы математики. Великого революционера-демократа радует, что его сын стал математиком. Он пишет: „Но тебя я хвалю за то, что ты выбрал предметом своих занятий математику... Думаешь ли ты быть астрономом? Или будешь применять математику в разработке физики? Или тебя привлекает больше всего математика сама по себе, — „чистая математика?" — Мне кажется, что разработка даже и самой математики значительнейшие свои успехи получала от надобности применять ее формулы к решению конкретных вопросов" (Полн. собр. соч. — Т. 14. — С. 638–639).

В рецензии на книгу В. Классовского „Грамматические заметки" Н. Г. Чернышевский отмечает высокий уровень развития математики: „Математические науки, достигшие высокой степени совершенства, должны служить образцом состояния, к которому надлежит стремиться и остальным наукам. Как строго, как несомненно, как необходимо развивается в них каждое последующее предложение из предыдущего! Как точно определено содержание, так ясно сознается существенная задача каждой науки! Никто не спорит, к арифметике или геометрии, к дифференциальному исчислению или тригонометрии относится та или другая теорема. Математик может справедливо гордиться своей наукой, ставить ее в пример всем другим" (Полн. собр. соч. Т. 2. — С. 680).

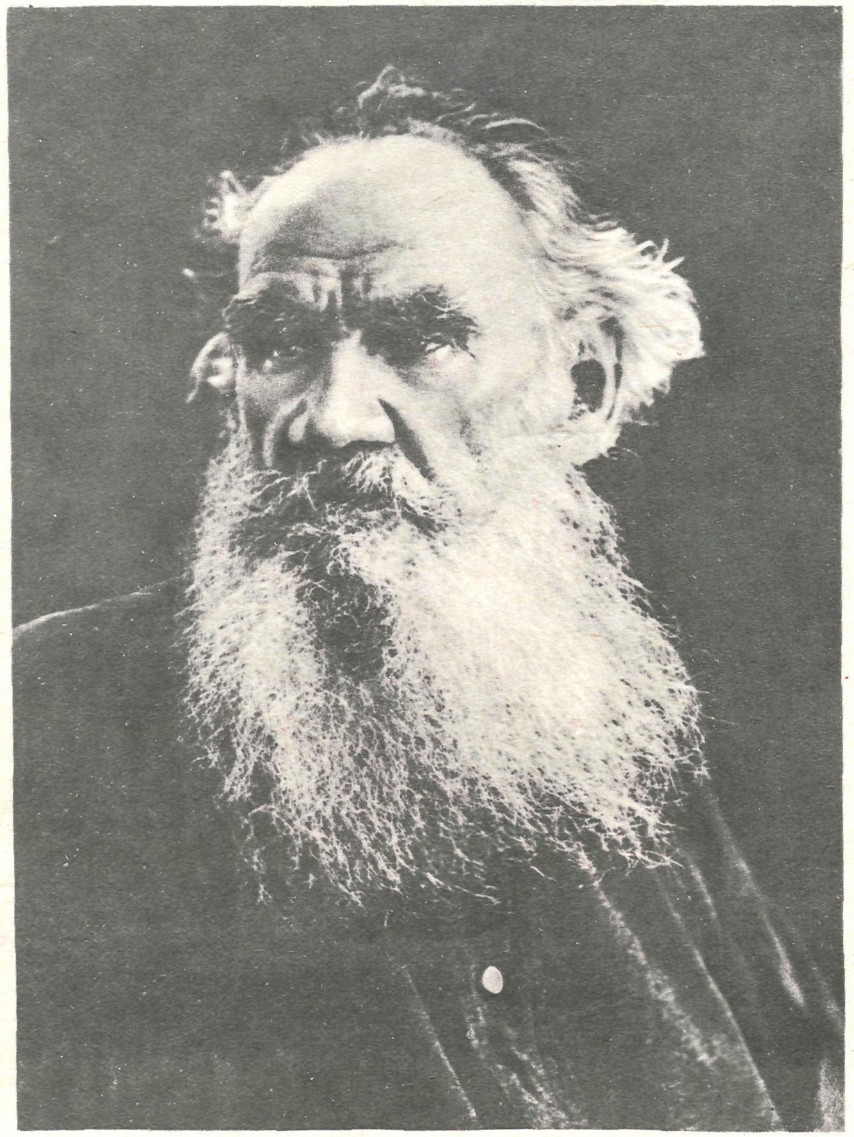
С последовательно материалистических позиций решал ученый и вопрос о сущности математического метода исследований явлений окружающей действительности, отмечая диалектический характер математики: „Когда исследуемый предмет очень многосложен, то для удобства исследования полезно делить его на части... Так геометрия разлагает круг на окружность, радиусы и центр, но, в сущности, радиуса нет без центра и окружности, центра нет без радиуса и окружности, да и окружности нет без радиуса и центра, — эти три понятия, эти три части геометрического исследования о круге составляют все вместе одно целое" (Полн. собр. соч. — Т. 7. — С. 626).

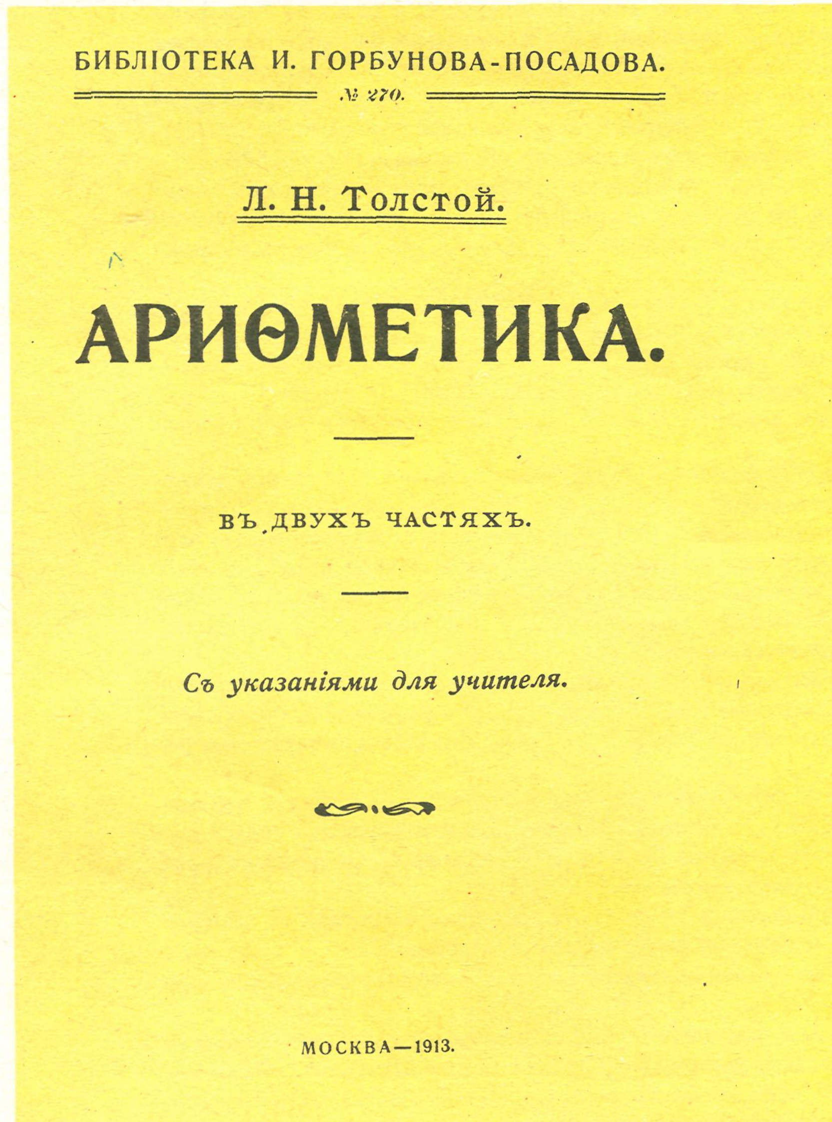
Н. Г. Чернышевский решительно воевал с буржуазными учеными, насаждавшими идеалистические взгляды на природу математических понятий, преувеличивавшими роль философов-идеалистов прошлого, в частности Платона, в развитии математики. Особенно непримиримо относился Чернышевский к агностицизму и априоризму Канта, отрицавшего реальность трехмерного физического пространства и считавшего понятие о нем априорным.

В своих письмах к сыну Николай Гаврилович критиковал и отбрасывал неевклидову геометрию Н. И. Лобачевского. Это было связано с тем, что материализму Н. Г. Чернышевского, по крайней мере в некоторых моментах, недоставало диалектичности. Он не смог увидеть, что геометрия Лобачевского, при всем своем отличии от евклидовой, логически и генетически вырастает из нее, как высшая ступень познания существенных характеристик реального физического пространства.

Поучительна эволюция взглядов на математику видного русского революционера, публициста-демократа, литературного критика и философа-материалиста Д. И. Писарева (1840–1868).

Овладев самостоятельно некоторыми разделами математики и осознав ее значение в истории общества, Писарев стал восторженным пропагандистом математических методов. Двадцатитрехлетний Писарев, заточенный в Алексеевский равелин Петропавловской крепости, написал интересную статью „Наша университетская наука", в которой подверг сокрушительной критике тогдашнюю методику преподавания математики и дал исключительно высокую, восторженную оценку математике как наиболее совершенной области теоретического знания.




БИБЛIОТЕКА И. ГОРБУНОВА-ПОСАДОВА.
№ 270.

Л. Н. Толстой.

АРИѲМЕТИКА.

ВЪ ДВУХЪ ЧАСТЯХЪ.

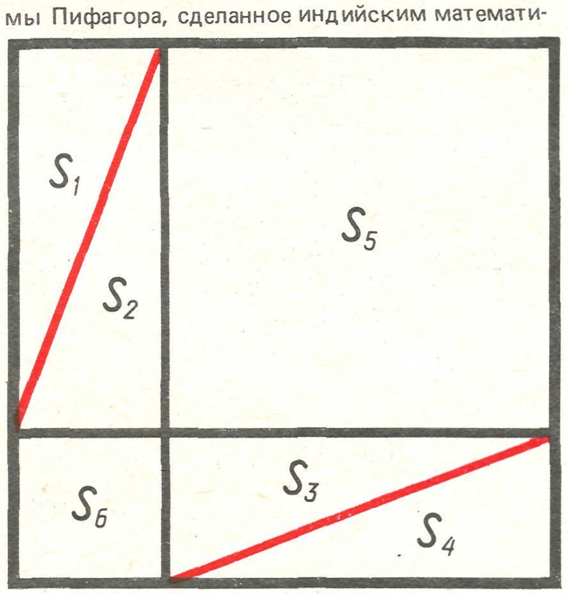
Съ указанiями для учителя.

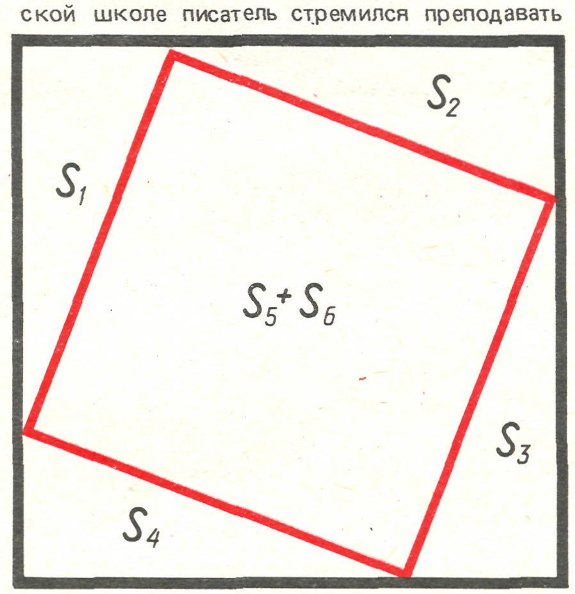
МОСКВА—1913.

Всю жизнь Л. Н. Толстой увлекался преподаванием начальной математики и проявлял особый интерес к математической науке, прежде всего к философии и поэзии чистой математики. Он размышлял над понятием числа, мнимой единицы, бесконечности, многомерных пространств, бесконечно больших и бесконечно малых. Его интересовали аналитическая и проективная геометрия, дифференциальное исчисление и теория чисел, основания геометрии. В течение мая 1884 г. он читал роман английского писателя Чарльза Кингслея (1819—1875) „Гипатия", рекомендовал переделать его и издать в недавно организованном народном книгоиздательстве „Посредник". Он проявлял интерес к выдающимся деятелям русской математической мысли Н. И. Лобачевскому и С. В. Ковалевской.

Предметом особого увлечения Л. Н. Толстого были математические задачи, занимательные задачи или задачи с неожиданными, нестандартными решениями и результатами. Писатель с интересом собирал такие задачи, знал их очень много и всегда с удовольствием предлагал их членам семьи, знакомым, гостям. Он с увлечением пересказывал особенно полюбившиеся ему задачи и теоремы.

Большое впечатление произвело на писателя красивое графическое доказательство теоремы Пифагора, сделанное индийским математиком и астрономом Брахмагуптой (VII в.). Он пересказывал его многим своим гостям, всякий раз восторгаясь простотой и изяществом рассуждений.





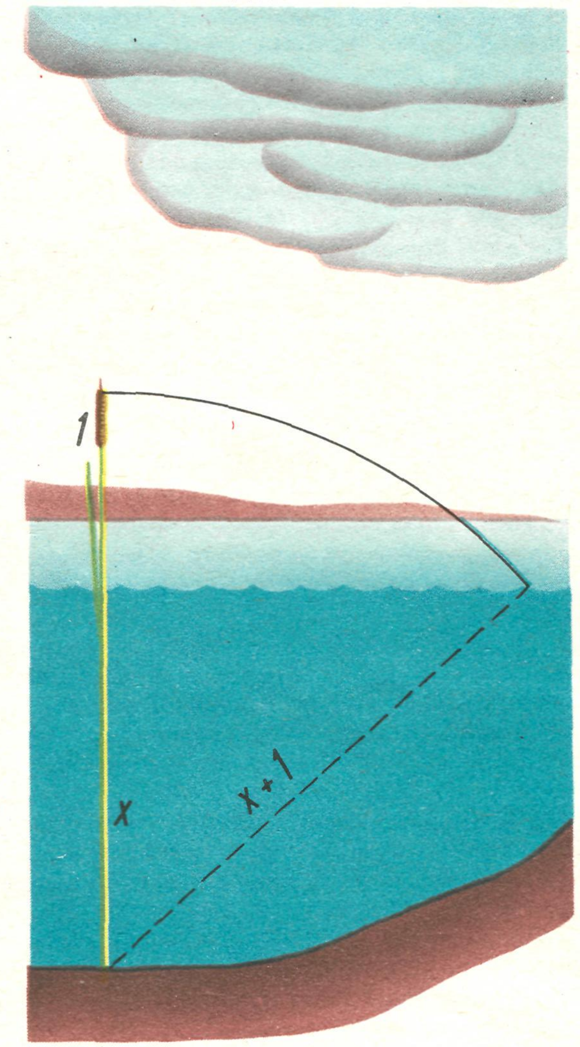
В своей практической работе в Яснополянской школе писатель стремился преподавать начала математических знаний так, чтобы они стали не балластом памяти, а действенным орудием познания мира.

Одна из любимых задач писателя. Он был в восторге от графической иллюстрации ее решения.

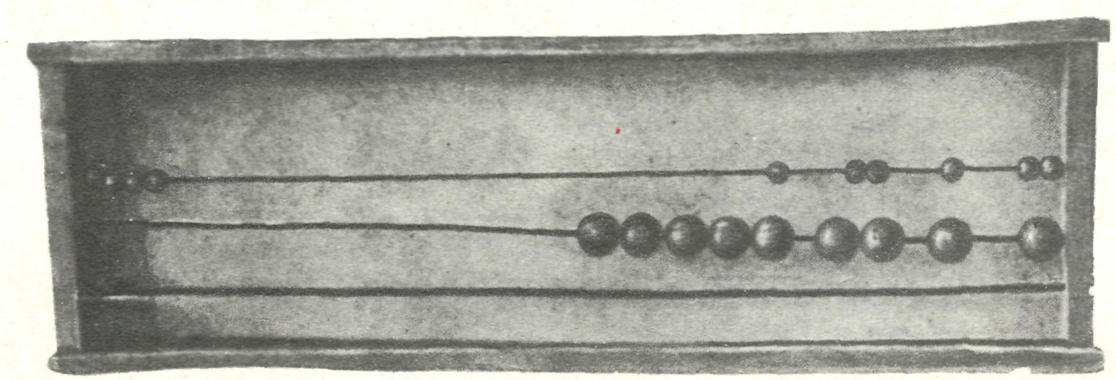
Артели косарей надо было скосить два луга, один вдвое больше другого. Половину дня вся артель косила большой луг. После полудня артель разделилась пополам. Первая половина осталась на большом лугу и докосила его к вечеру до конца, а вторая половина косила малый луг, на котором к вечеру остался участок, скошенный на другой день одним косарем, проработавшим целый день. Сколько косарей было в артели?

Как вспоминает И. В. Ильинский, Л. Н. Толстой любил по вечерам играть с кем-нибудь в шахматы и задавать разные задачи, среди них была и такая:

Тростник торчит из воды на один аршин, Определите глубину реки в этом месте, подъехав к тростнику на лодке, но не вырывая тростника и не замеряя глубину веслом или другим каким-либо орудием.



Счеты из Яснополянской школы, в которой Л. Н. Толстой обучал крестьянских детей и которую намеревался превратить в крестьянский „университет в лаптях".



88. Лев Николаевич Толстой и математика

Значительное место занимает математика в жизни, произведениях и практической деятельности гениального русского писателя Л. Н. Толстого. Проанализировав преподавание начальной математики в школах, великий мастер слова подверг острой критике официально признанную методику преподавания начал математики. Методические искания привели Толстого к правильному выводу: „Математика имеет задачей не обучение счислению, но обучение приемам человеческой мысли при исчислении".

Великий писатель стремился к воплощению своих методических приемов и методов, преподавал математику крестьянским детям в Яснополянской школе. Он писал: „У меня есть целый мир знаний математических, естественных, языка и поэзии, передать которые у меня недостает времени".

Не хватало времени и не было условий, способствовавших открытию крестьянского „университета в лаптях", хотя Лев Николаевич составил даже его учебный план, предусматривавший изучение лишь математики и иностранных языков. Однако было очевидным, что у многих из тех, кто посещал начальную школу, пробуждалась жажда к дальнейшему приобретению знаний.

В декабре 1874 г. Лев Николаевич писал А. Т. Толстой, что, занявшись школьным делом в своем уезде, он „полюбил опять, как 14 лет тому назад", этих 1000 ребятишек, и „только для того, чтобы спасти тонущих там Пушкиных, Остроградских, Филаретовых, Ломоносовых. А они кишат в каждой школе".

Уделив большое внимание началам математики, Л. Н. Толстой всю жизнь проявлял глубокий интерес к математике как науке, к ее истории и связанным с ней философским проблемам. К математике писатель часто обращался в своих произведениях, дневнике, записных книжках, беседах с близкими.

Третью книгу третьего тома романа „Война и мир" писатель начал с анализа причин возникновения и путей разрешения противоречия в известной апории Зенона Элейского „Ахиллес и черепаха":

„Для человеческого ума непонятна абсолютная непрерывность движения. Человеку становятся понятны законы какого бы то ни было движения только тогда, когда он рассматривает произвольно взятые единицы этого движения. Но вместе с тем из этого-то произвольного деления непрерывного движения на прерывные единицы проистекает большая часть человеческих заблуждений.

Известен так называемый софизм древних, состоящий в том, что Ахиллес никогда не догонит впереди идущую черепаху, несмотря на то, что Ахиллес идет в десять раз скорее черепахи: как только Ахиллес пройдет пространство, отделяющее его от черепахи, черепаха пройдет впереди его одну десятую этого пространства; Ахиллес пройдет эту десятую, черепаха пройдет одну сотую и т. д. до бесконечности. Задача эта представлялась древним неразрешимой. Бессмысленность решения (что Ахиллес никогда не догонит черепаху) вытекала из того только, что произвольно были допущены прерывные единицы движения, тогда как движение и Ахиллеса и черепахи совершалось непрерывно.

Принимая все более и более мелкие единицы движения, мы только приближаемся к решению вопроса, но никогда не достигаем его. Только допустив бесконечно-малую величину и восходящую от нее прогрессию до одной десятой и взяв сумму этой геометрической прогрессии, мы достигаем решения вопроса. Новая отрасль математики, достигнув искусства обращаться с бесконечно-малыми величинами, и в других более сложных вопросах движения дает теперь ответы на вопросы, казавшиеся неразрешимыми.

Эта новая, неизвестная древним, отрасль математики, при рассмотрении вопросов движения, допуская бесконечно-малые величины, то есть такие, при которых восстановляется главное условие движения (абсолютная непрерывность), тем самым исправляет ту неизбежную ошибку, которую ум человеческий не может не делать, рассматривая вместо непрерывного движения отдельные единицы движения" (Толстой Л. Н. Собр. соч.: В 22 т. — М.: Худож. лит., 1980. — Т. 6. — С. 275–276).

Осмысление законов истории писатель также излагает, используя понятия дифференциального и интегрального исчисления: „Только допустив бесконечно-малую единицу для наблюдения — дифференциал истории, то есть однородные влечения людей, и достигнув искусства интегрировать (брать суммы этих бесконечно-малых), мы можем надеяться на постигновение законов истории". (Там же, с. 276–277).

В романе „Война и мир" Л. Н. Толстой повествует о том, как Пьер Безухов, увлекшись числовой мистикой, ищет в написании фамилии Наполеона подтверждение тому, что он не кто иной, как антихрист. Французские буквы, как и старославянские, соответствуют числовому значению: *a* — 1, *b* — 2, *c* — 3, *d* — 4, *e* — 5, *f* — 6 и т. д. Записав с помощью цифр слова Lempereur Napoleon (император Наполеон), Безухов находит, что сумма равняется 666.

Во многих произведениях писателя находим интересные, меткие высказывания о математике. Математические понятия Л. Н. Толстой использовал для блестящих афоризмов о характерах людей, познании, истине. Приведем некоторые из них.

„Законы нравственности так же строго определены, как и математические. Как я могу сначала допустить, что прямая линия есть кратчайшее расстояние, а потом вдруг подумав, а может быть, иногда и кривая линия — кратчайшая?".

„Все люди так же равны... как прямые углы, при всем видимом различии".

„Если ребенку раз внушили $2 \times 2 = 5$, орудие его познания навеки извращено".

„Человек есть дробь. Числитель — это — сравнительно с другими — достоинства человека; знаменатель — это оценка человеком самого себя. Увеличить своего числителя — свои достоинства — не во власти человека. Но всякий может уменьшить своего знаменателя — свое мнение о себе, и этим уменьшением приблизиться к совершенству". В связи с этим о людях, имевших о себе слишком высокое мнение, Л. Н. Толстой говорил: „У этого человека слишком велик знаменатель".

В нескольких записных книжках писателя отражены его поиски решения известной задачи Аполлония Пергского — построить окружность, касающуюся трех данных окружностей. Толстой установил, что задача имеет восемь решений.

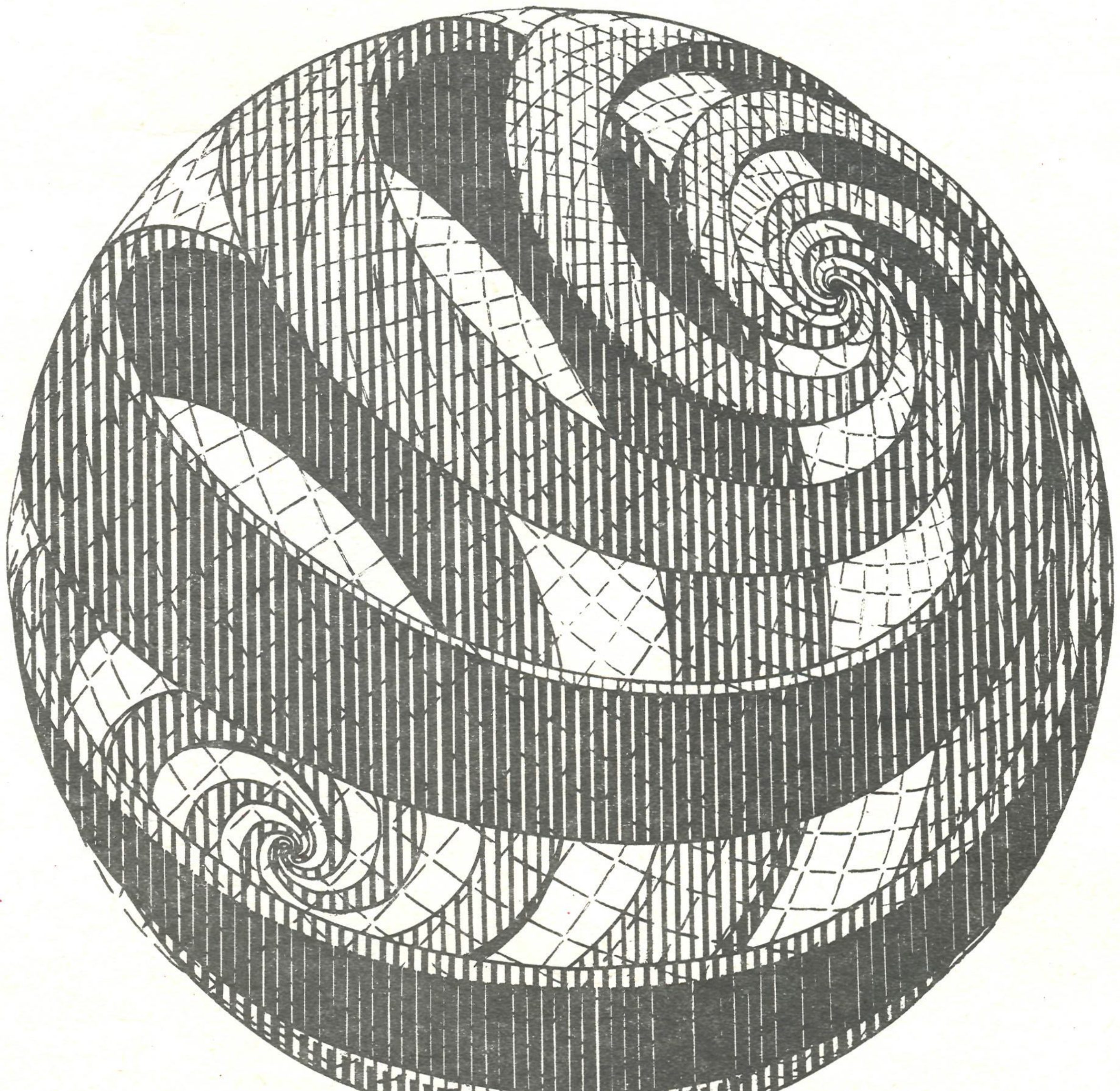
Льва Николаевича заинтересовал роман английского писателя Чарльза Кингслея (1819—1875) „Гипатия", повествующий о трагической судьбе выдающейся женщины-математика Гипатии из Александрии. Он рекомендовал переиздать этот роман на русском языке.

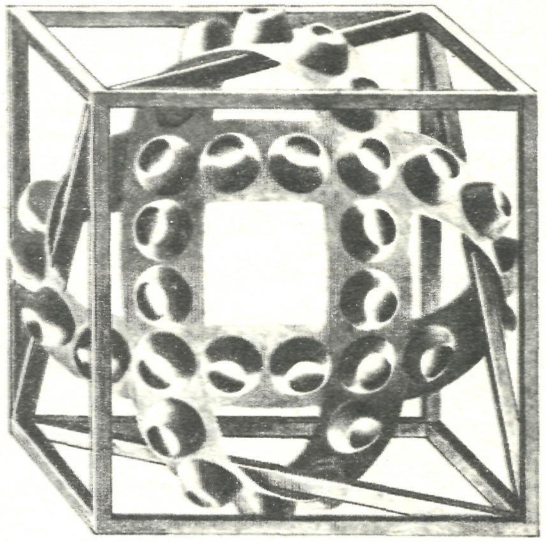
Писатель много размышлял о проблемах пространства и времени. „Вопрос же о пространстве и времени занимал меня очень давно...", — писал он в дневнике. И за год до смерти он продолжал живо интересоваться открытием Н. И. Лобаческого.

Писатель использует математику для разоблачения догматов христианской религии. В „Критике догматического богословия" он пишет: „Основная истина, которую бог через пророков и апостолов благоволил открыть о себе церкви и которую церковь открывает нам, есть та, что бог один и три, три и один".

Но „выражение этой истины таково, — замечает Толстой, — что я не то что не могу понять ее, но несомненно понимаю, что этого понять нельзя. Человек понимает умом. В уме человека нет более точных знаков, чем те, которые относятся к числам. И вот первое, что бог благоволил открыть о себе людям, он выражает в числах: „Я = 3 и 3 = 1, и 1 = 3". „Да не может же быть, чтобы бог так отвечал людям, которых он сотворил, которым он дал только разум, чтобы понимать его, не может же быть, чтобы он так отвечал!". „Где тот, такой слабый умом человек, который на вопрос ребенка не умел бы ответить ему так, чтобы ребенок понял его? Как же бог, открывая себя мне, будет говорить так, чтобы я не понял его? Это — „не объяснение", это — „только соединение слов, не дающих никакого понятия!...".

89. Геометрическая рапсодия Эшера





Голландский художник Мауриц Корнелюс Эшер (1898—1971) создал целый мир зрительных образов, раскрывающих фундаментальные идеи и закономерности математики, физики, психологические особенности восприятия человеком объектов реальной действительности в окружающем нас трехмерном пространстве. Неограниченность пространства, зеркальные образы, противоречия между плоскостью и пространством, соответствие, отношение и отображение — все эти понятия воплощены в запоминающихся, исполненных особого очарования образах.

Ящерицы в наглядном виде представляют все геометрические отображения, изучаемые в средней школе.

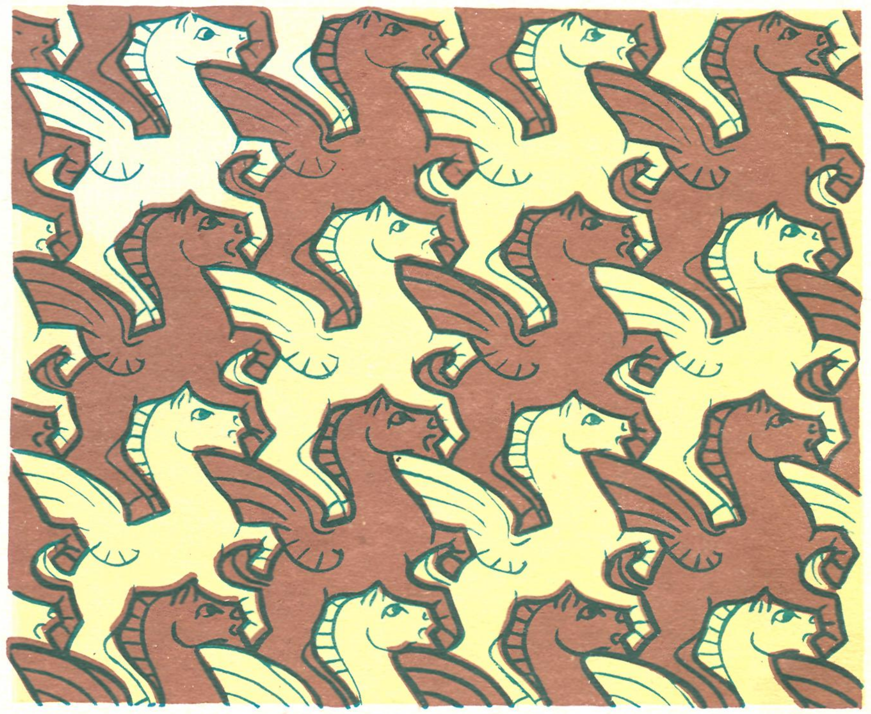
Всадники дают прекрасное наглядное представление о параллельном переносе, симметрии, заполнении всей плоскости фигурами сложной конфигурации.

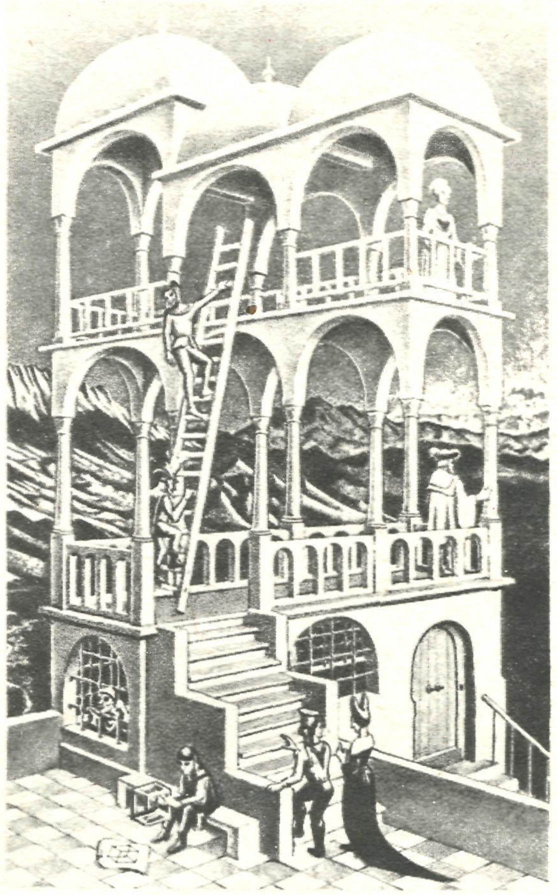
Сфера и спираль — древние символы математики — объединены в одной гравюре. Она показывает, что каждый объект имеет много свойств, характеристик и форм структурной организации.

„Куб и волшебные ленты". Ленты действительно волшебные: „протуберанцы" на них можно рассматривать как признак и выпуклости, и вогнутости. Достаточно изменить точку зрения, как ленты сразу перекрутятся.

Крылатые кони — еще один вариант наглядного представления целого набора отображений плоскости на себя и заполнения ее фигурами неожиданной формы.

„Бельведер" — не просто геометрическая шутка, а целый комплекс неожиданностей, порожденных особенностями восприятия человеком предметов в трехмерном пространстве.





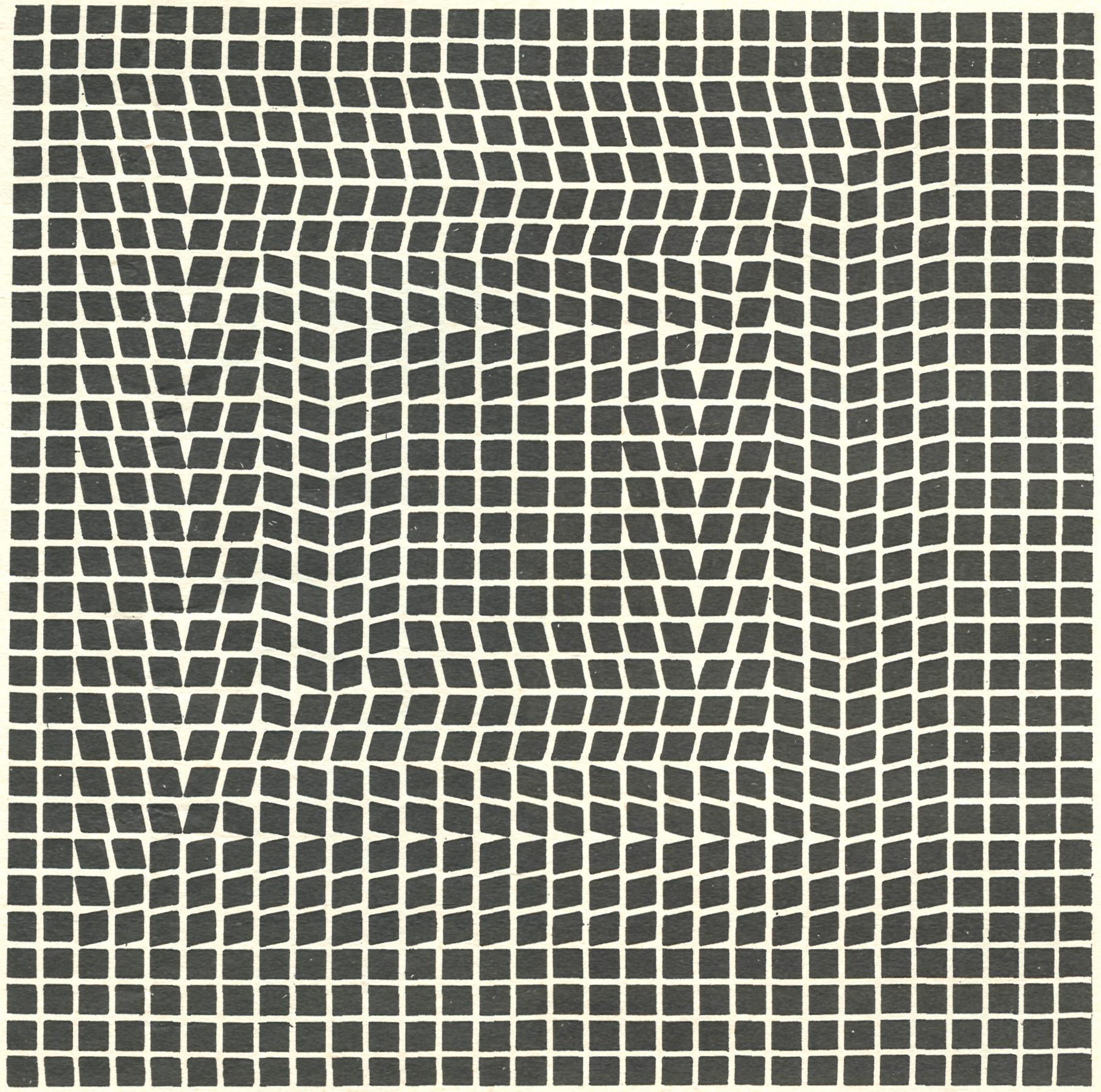
89. Геометрическая рапсодия Эшера

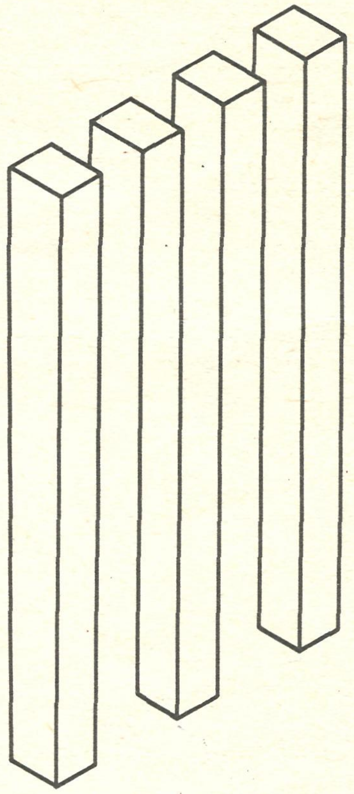
Голландский художник Мауриц Корнелюс Эшер создал уникальную галерею картин, принадлежащих одновременно искусству и науке. Они иллюстрируют теорию относительности Эйнштейна, строение материи, геометрические преобразования, топологию, кристаллографию, физику. Об этом свидетельствуют названия некоторых альбомов художника: „Неограниченное пространство", „Зеркальные образы", „Инверсии", „Многогранники", „Относительности", „Противоречия между плоскостью и пространством", „Невозможные конструкции".

„Я часто чувствую себя ближе к математикам, чем к моим коллегам-художникам", — писал Эшер. И действительно, его картины необычны, они наполнены глубоким философским смыслом, передают сложные математические отношения. Репродукции картин Эшера широко используются как иллюстрации в научных и научно-популярных книгах.

А сколько неожиданностей таит в себе невозможная конструкция „Бельведер". Юноша, стоящий на приставной лестнице, немного поднявшись, окажется вне бельведера, а еще через несколько ступеней снова будет внутри. Это невозможно... Так, очевидно, думает и человек, изображенный в нижней части гравюры и рассматривающий чертеж удивительной проекции куба на плоскость, который является моделью самого бельведера. И в руках у человека, размышляющего о неожиданностях нашего трехмерного пространства, модель именно такого невозможного куба.

90. Геометрические иллюзии





Рассматривая верхнюю часть фигуры, видим четыре бруса, однако один из них исчезает, если посмотреть на нижнюю часть фигуры.

Э. Боринг. „Неоднозначная теща". На рисунке видим то молодую женщину, то сгорбленную старуху.

Одним из первых художников, сумевших живо передать движение, был Ван-Гог (1853—1890). Художники Виктор Вазарели и Бриджит Райли создали картины, где нет предметов, в них — только конфигурации, которые колеблются, смещаются и словно плывут, то едва заметно, то стремительно. Такими являются картины Бриджит Райли, например „Падение", и рисунок Виктора Вазарели.

Происхождение эффекта, возникающего при рассматривании таких картин, во многом еще не разгадано. Определенное значение здесь имеют движения глаз. Они стимулируют восприимчивость сетчатки, в результате чего на одном и том же участке ее возникает суперпозиция одного и того же образа определенной геометрической формы.

Рассматривая рисунок Виктора Вазарели, замечаем, что узор изменяется, смещается, движется.

Неустойчивая фигура, исполненная по мотивам рисунков Виктора Вазарели.

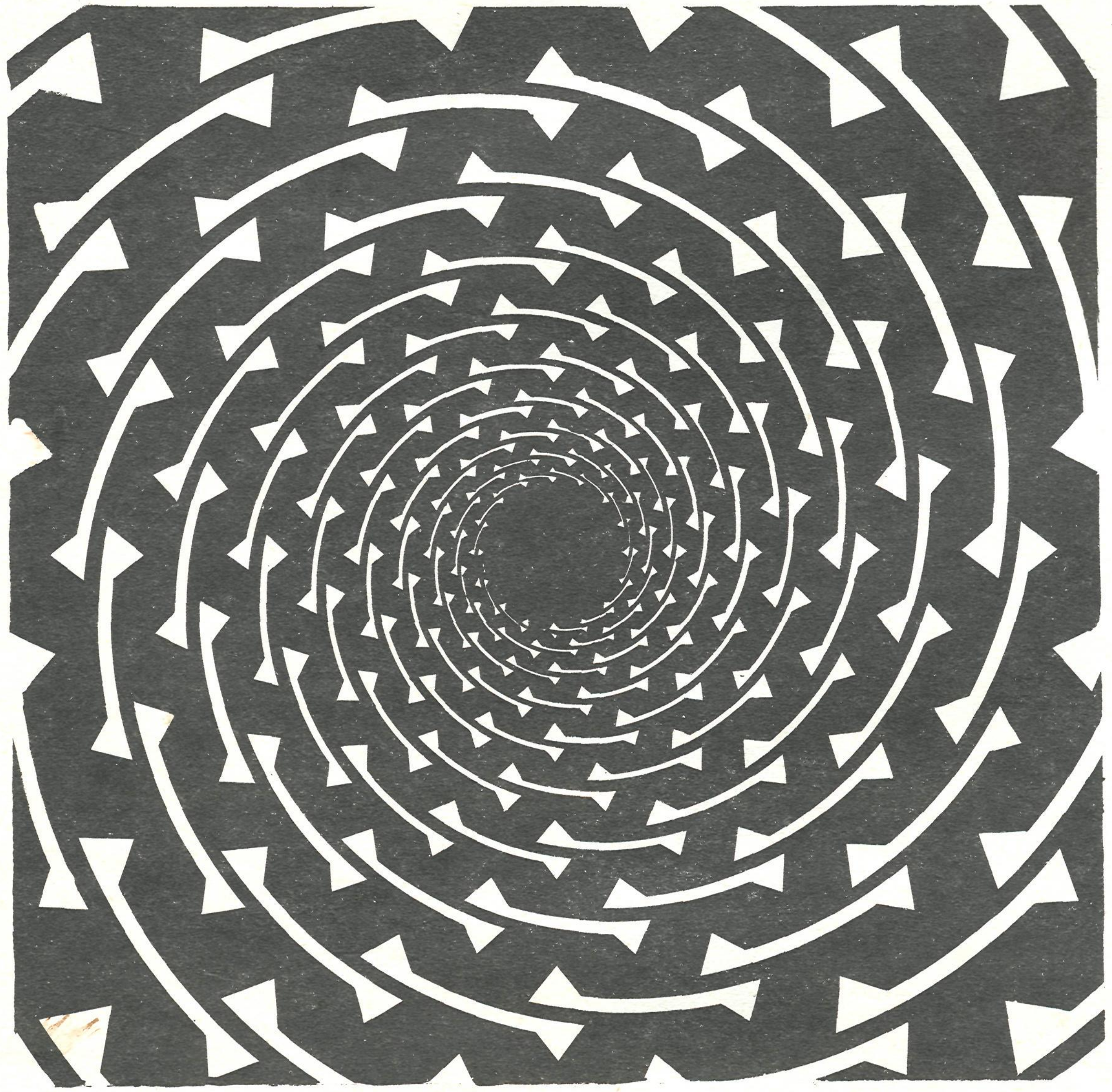
90, 91. Геометрические иллюзии

В жизни часто случаются ошибки, связанные с обманом зрения — иллюзией.

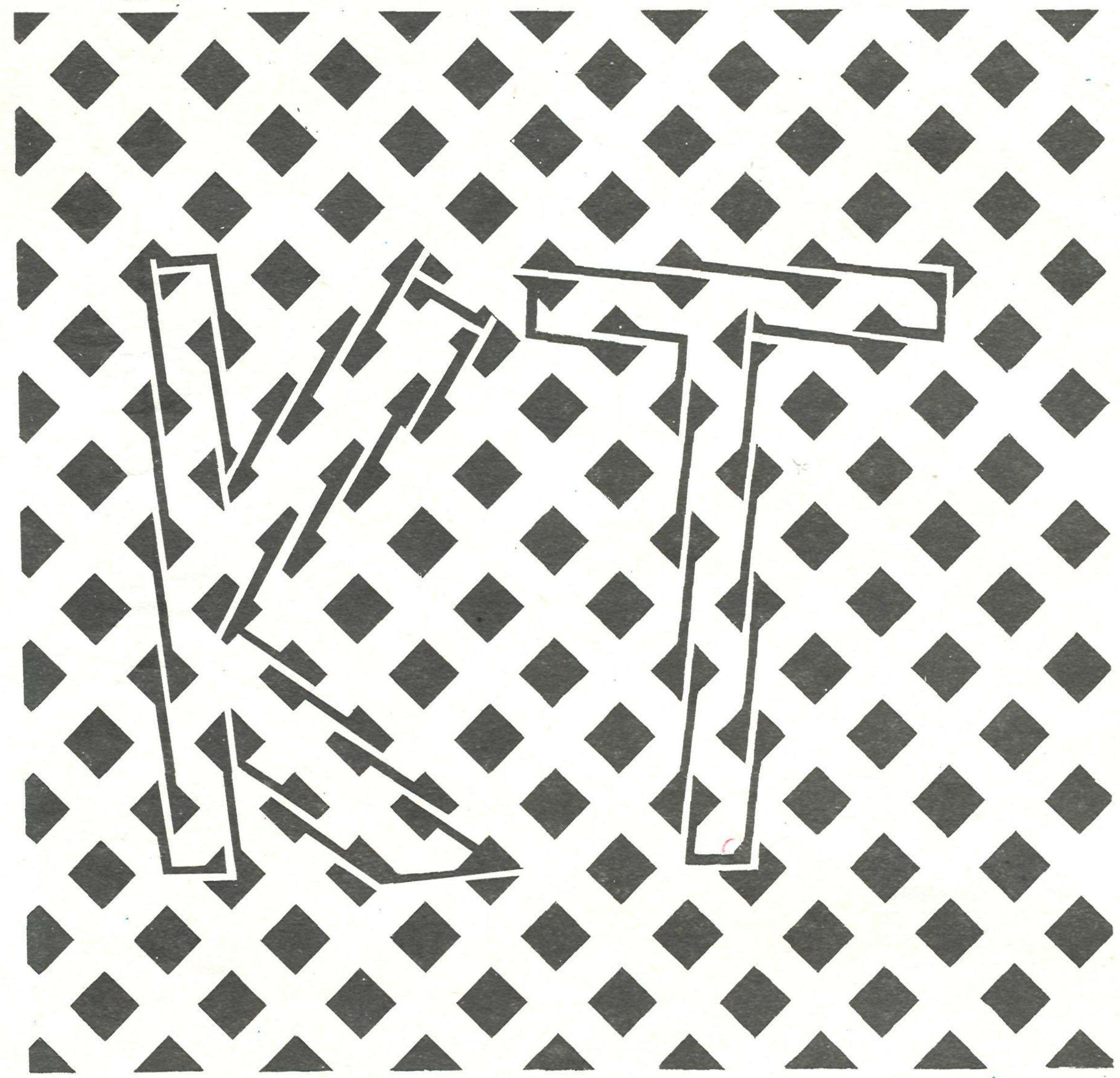
Существуют полезные иллюзии, их используют в архитектуре, искусстве; некоторые иллюзии воспринимаются как веселые неожиданности, а некоторые являются нежелательными, от них стремятся избавиться. С материалистической точки зрения наши чувственные восприятия являются лишь первой, отнюдь не основной ступенью познания, за которой следует обобщающее и понятийное мышление. Геометрические иллюзии часто используются в различных формах внеклассной работы по математике. Используя иллюзии, важно не упускать самое главное — их обучающее и воспитательное значение.

Констатируя „невозможность" того, что видим, выявляя несоответствие реальности и наших ощущений, мы всегда должны давать все необходимые пояснения, убеждая учащихся в том, что останавливаться не уровне чувственного восприятия недопустимо, следует доказывать с помощью логических соображений истинность тех или иных положений.

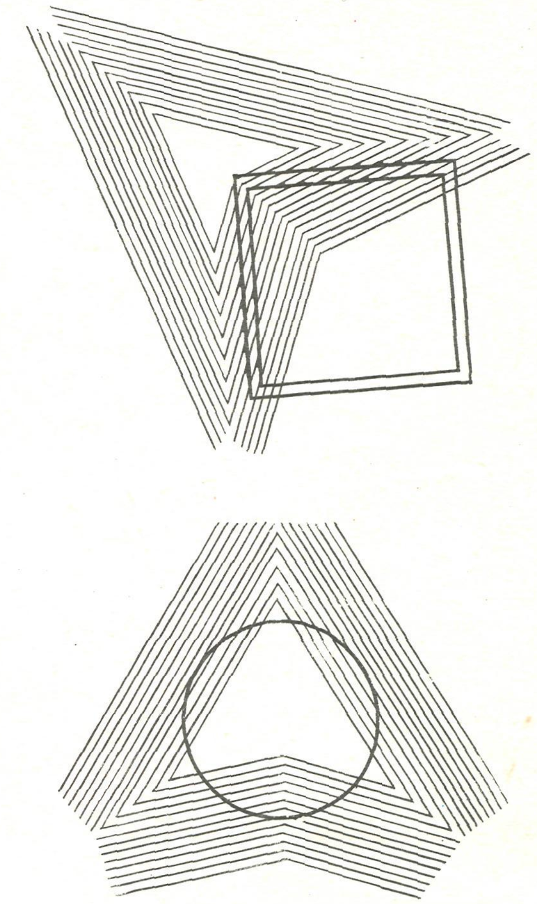
91. Геометрические иллюзии



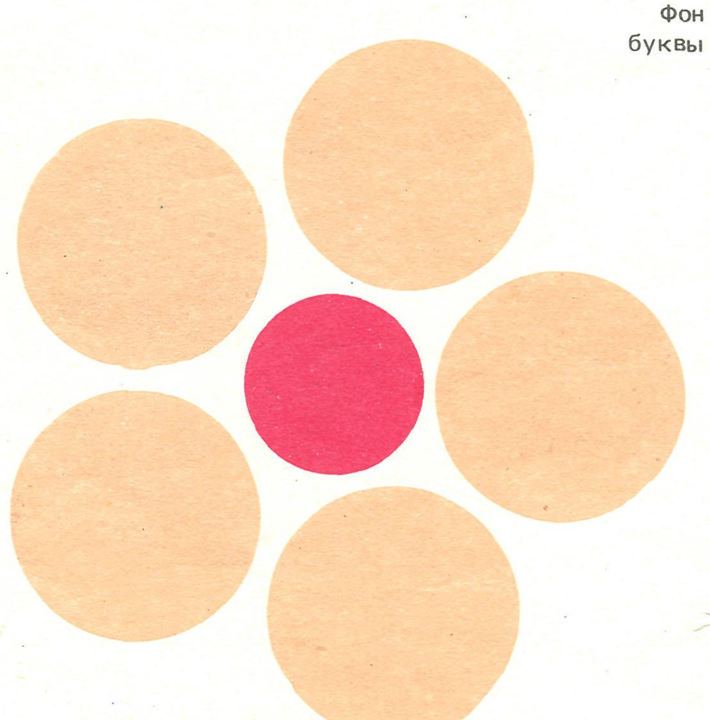
Фигуры, кажущиеся спиралями, в самом деле являются окружностями.



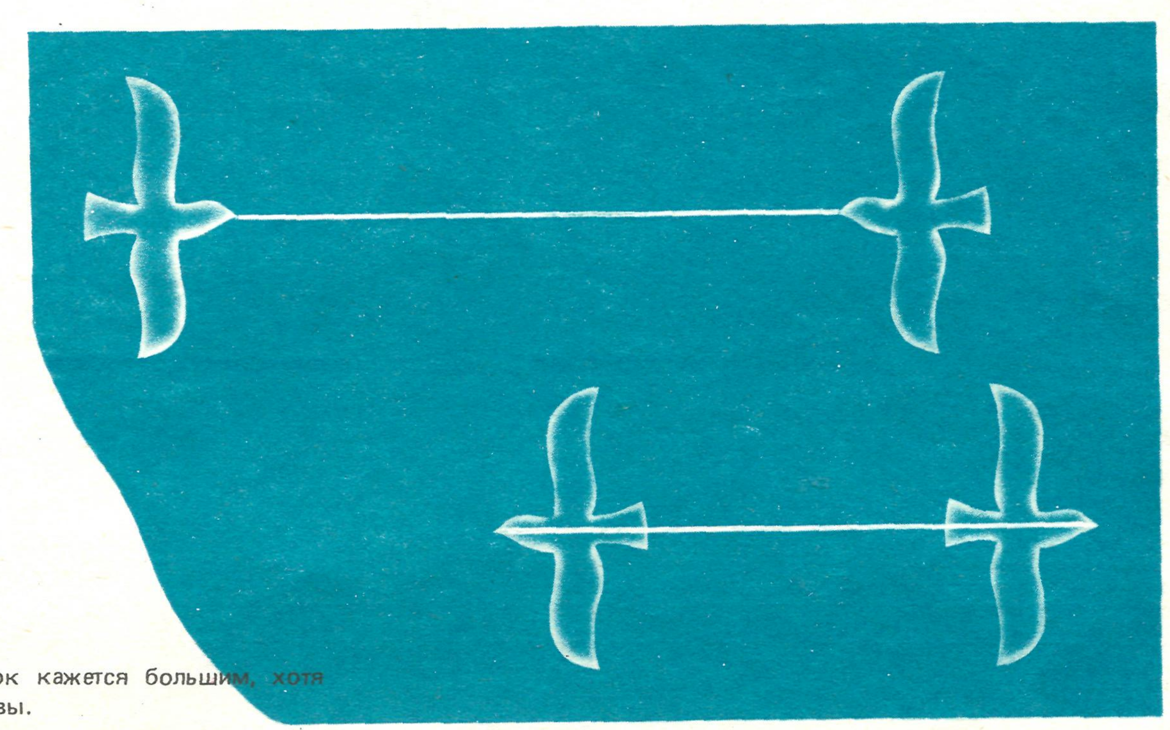
Фон превратил вертикально расположенные буквы в наклонные и деформированные.



Квадрат и круг воспринимаются деформированными из-за фона, на котором они изображены.



Круг, окруженный меньшими кругами, кажется большим, чем окруженный большими, хотя они имеют одинаковые диаметры.

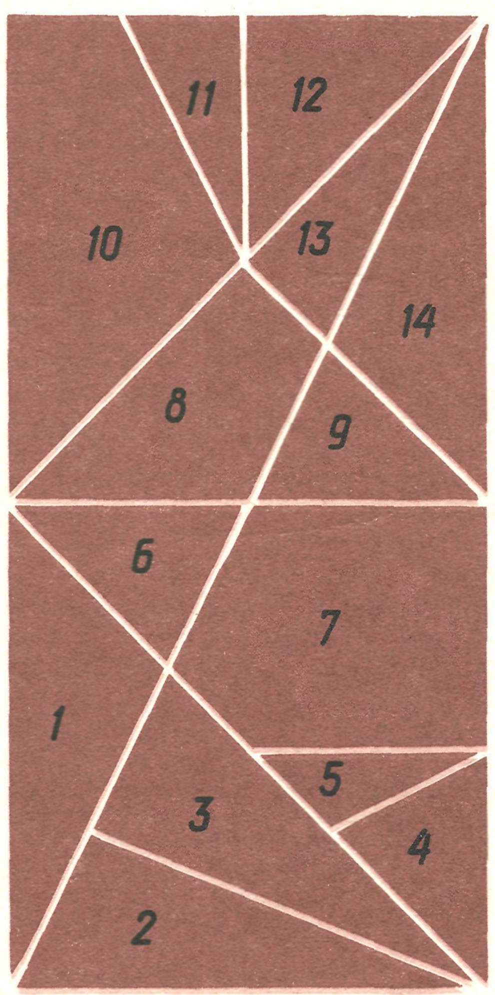


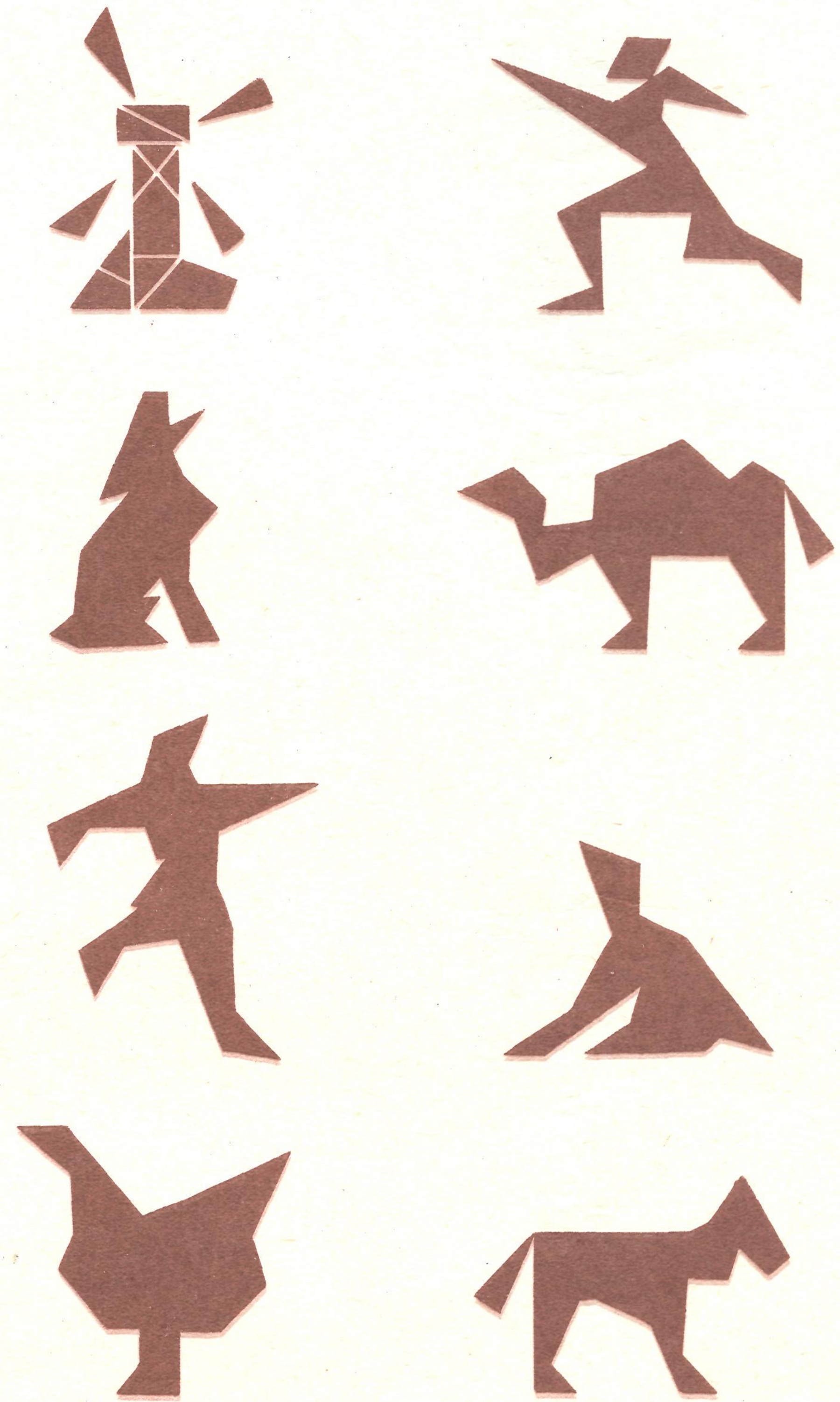
Верхний отрезок кажется большим, хотя длины их одинаковы.

92. Потомки Стомахиона Архимеда

Стомахион — патриарх игр-головоломок на составление силуэтов различных фигур из частей особым образом разрезанной исходной фигуры. Игра Архимеда выдержала проверку временем. Она, древняя, но не одряхлевшая, и сегодня принадлежит к числу классических головоломок.

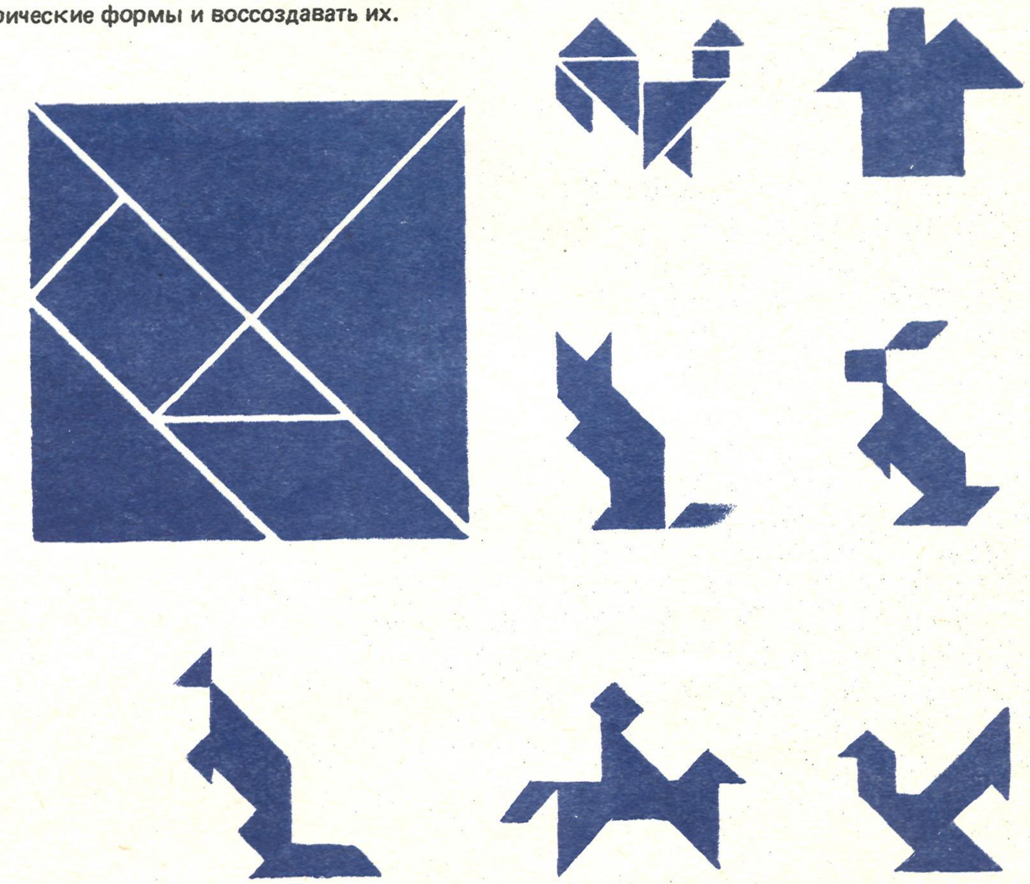
О Стомахионе Архимеда (латинское название loculus) писали латинские грамматики Марий Викторин и Атилий Фортунациан. В частности, последний писал: „Архимедовский loculus, имеющий 14 пластинок из слоновой кости с разнообразными углами, заключенных в квадратную форму, и, когда мы перекладываем, изображающий то шлем, то кинжал, то колонну, то корабль, и производящий бесчисленные фигуры; в нашем детстве этот loculus принес много пользы для укрепления памяти".





Потомки Стомахиона — танграм и яйцо Колумба — имеют то же назначение, что и Стомахион. Они развивают смекалку, умение воспринимать в окружающих нас объектах геометрические формы и воссоздавать их.

Во всех этих играх-головоломках требуется, чтобы при составлении фигур были использованы каждый раз все части исходной фигуры — прямоугольника, квадрата или яйца.



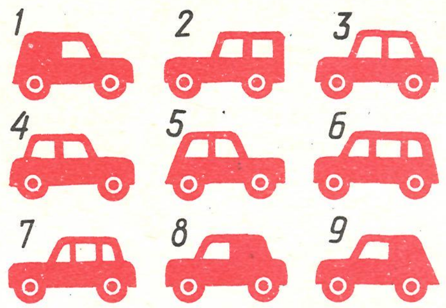
92. Потомки Стомахиона Архимеда

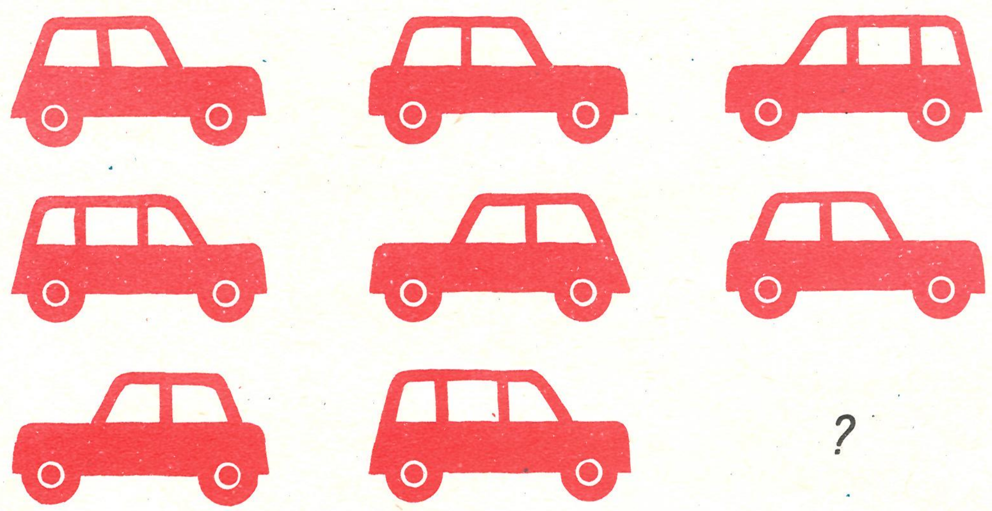
Архимеду приписывают первое произведение, посвященное математической теории игр — составлению из определенного набора геометрических фигур каких-либо других фигур заданной формы. Составление может быть точным или приближенным.

Стомахион был распространен в позднюю эпоху римской империи (IV—VI вв.), дошел до нас и теперь помогает тренировать и укреплять память, учит выявлять геометрические фигуры в окружающих нас предметах, развивает конструкторские навыки. Стомахион и его потомки занимают прочное место в арсенале занимательной математики.

93. Поиск закономерностей

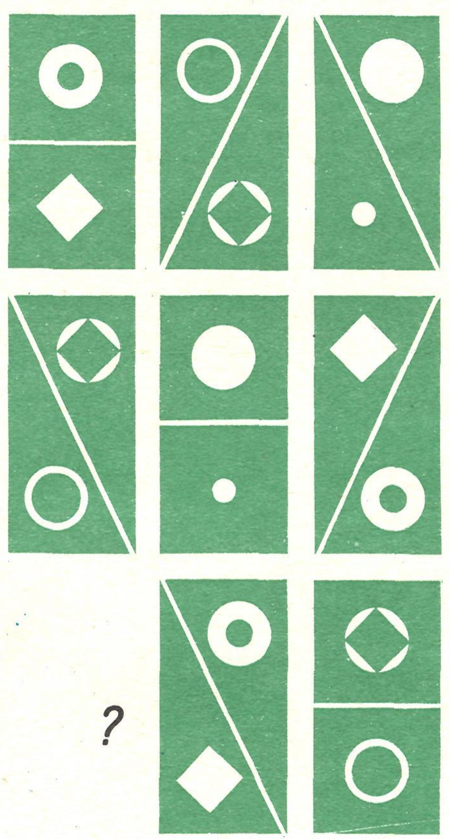
Найти закономерность размещения машин и выбрать среди девяти машин ту, которая, удовлетворяя этой закономерности, должна стоять на свободном месте.

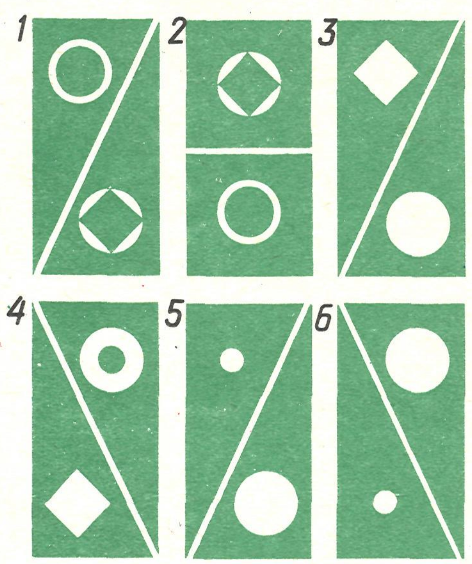




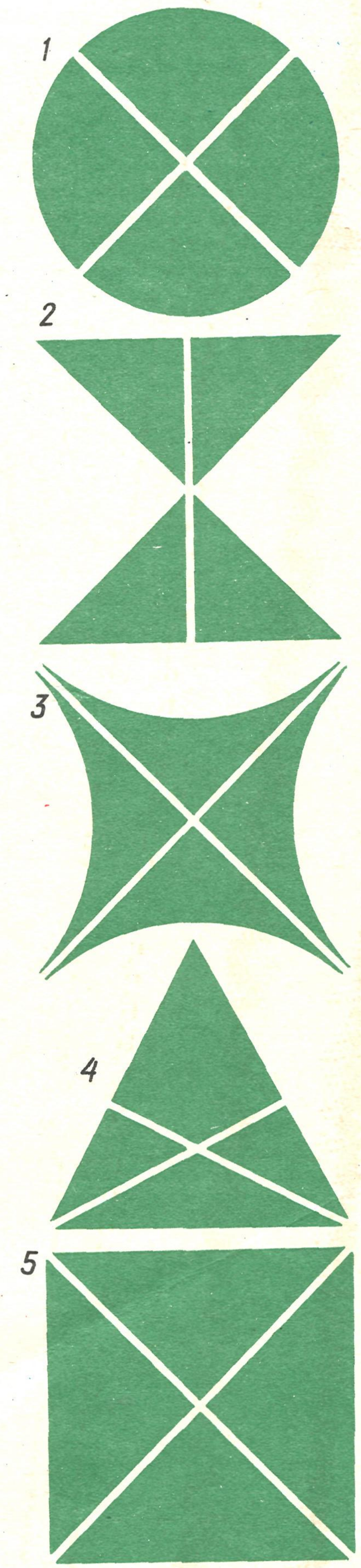
Найти характеристическое свойство множества чисел на первом домике, а также записать на втором домике число, которого не хватает и которое удовлетворяло бы этому свойству.

Какая из шести пронумерованных фигур должна быть помещена на свободном месте?





Записать нужное число на хвосте третьего самолета.



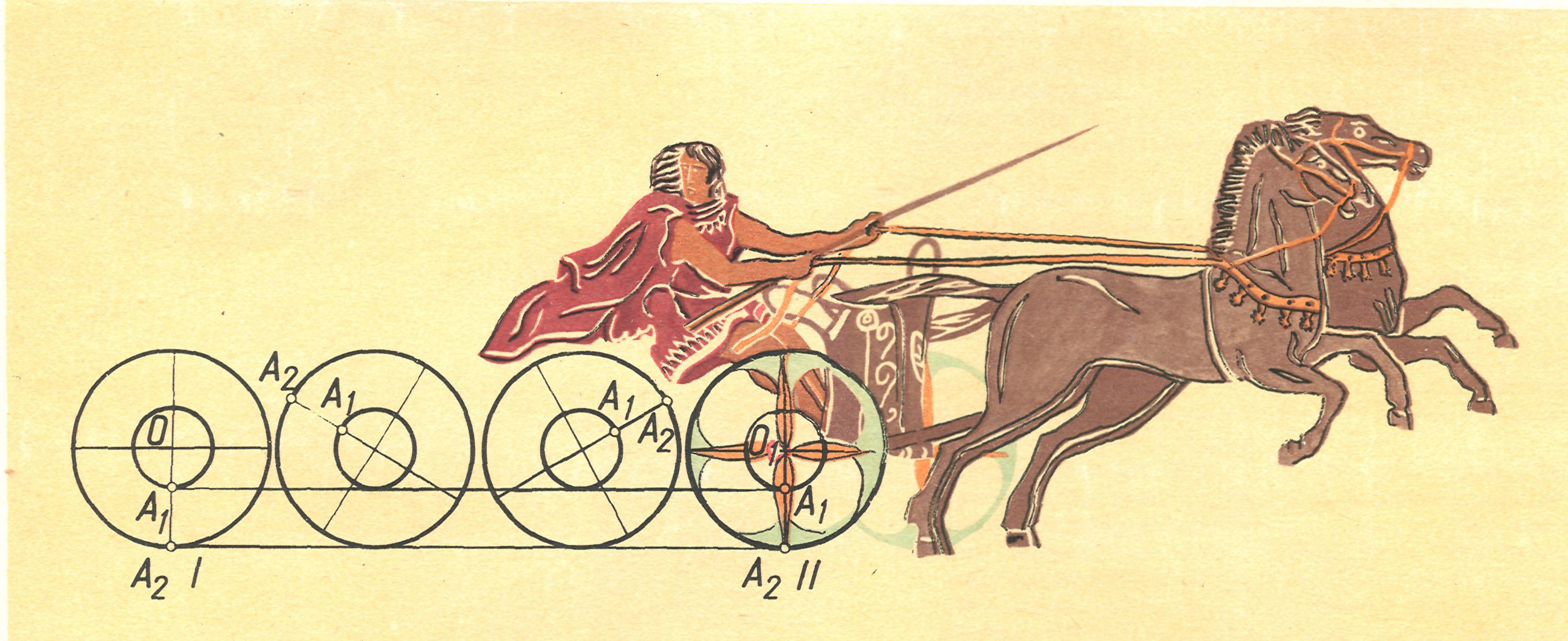
Среди данных пяти фигур одна лишняя и не принадлежит к их множеству. Какая именно?

93. Поиск закономерностей

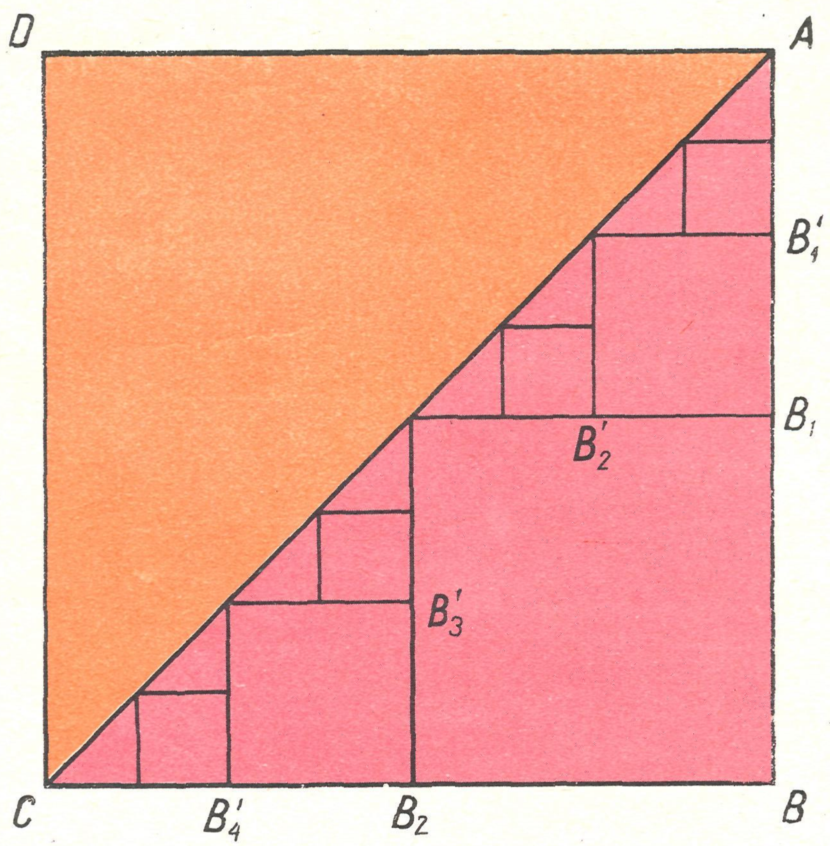
Задачи на определение характеристических свойств множеств тех или иных объектов часто задают в виде головоломок, психологических практикумов, тестов на сообразительность. Такие задачи способствуют развитию внимания, умению выявлять и синтезировать признаки элементов некоторого множества, находить среди этих признаков существенные, а среди существенных — характеристические свойства данного множества.

При решении задач такого типа следует принимать во внимание, что часто можно выявить и несколько признаков, которыми обладают все элементы данного множества. Поэтому множество может быть задано с помощью различных характеристических признаков. И поэтому ответов к подобным задачам иногда может быть несколько.

94. Осторожно — софизмы!



На каждом этапе построений сумма длин всех горизонтальных и всех вертикальных звеньев ломаной линии равна сумме смежных сторон квадрата $ABCD$. Но если процесс дробления звеньев ломаной продолжить до бесконечности, то пилообразная ломаная сольется с диагональю AC. Отсюда следует, что диагональ квадрата равна сумме двух его сторон, или что длина гипотенузы равна сумме длин катетов...



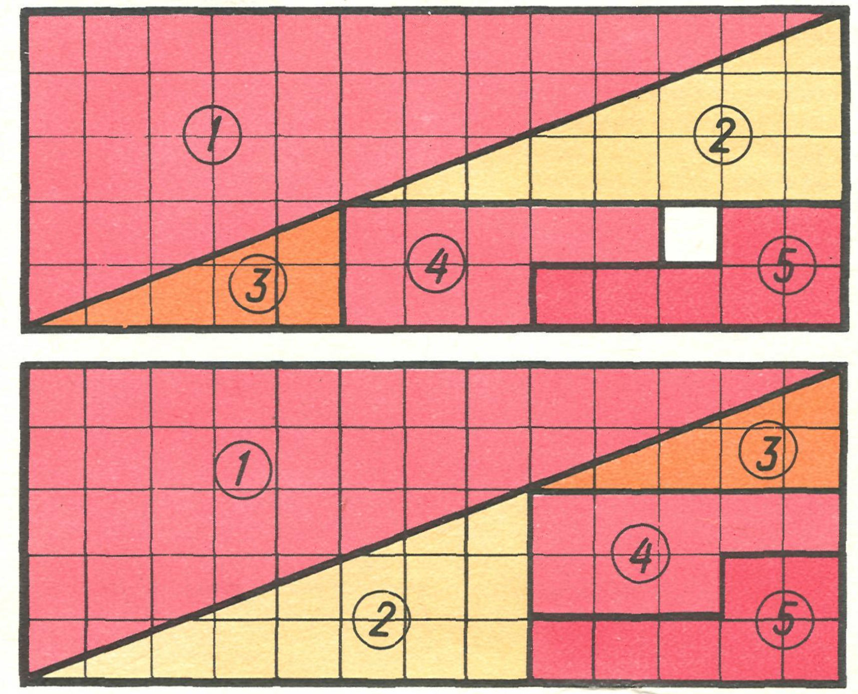
Трудно сказать, когда впервые появились парадоксы. Они стали грозным предупреждением о том, что сам мыслительный процесс, состоящий из цепи умозаключений, является сложным и еще не познанным до конца явлением. Парадоксы привлекли внимание ученых к изучению законов мышления, в результате чего возникла новая область научного знания — логика, созданная в работах выдающегося древнегреческого ученого Аристотеля (384—322 до н. э.).

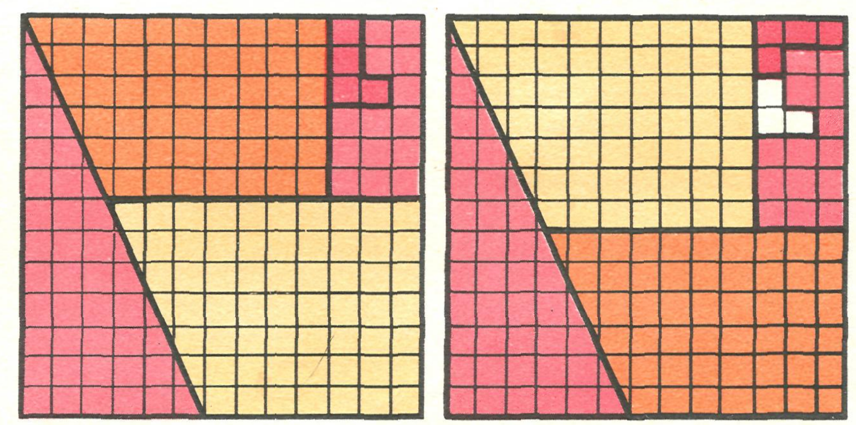
В парадоксах источник неразрешимого противоречия неизвестен. Его необходимо локализовать и обезвредить. Но для тренировки, усовершенствования культуры логического мышления полезными оказались искусственно построенные рассуждения, в которых сознательно маскировалась логическая или математическая ошибка, которая приводила к парадоксальным результатам. Такие рассуждения называются софизмами. Они оказались очень полезным дидактическим приемом воспитания культуры мышления и, кроме того, дарят нам радость интеллектуального досуга.

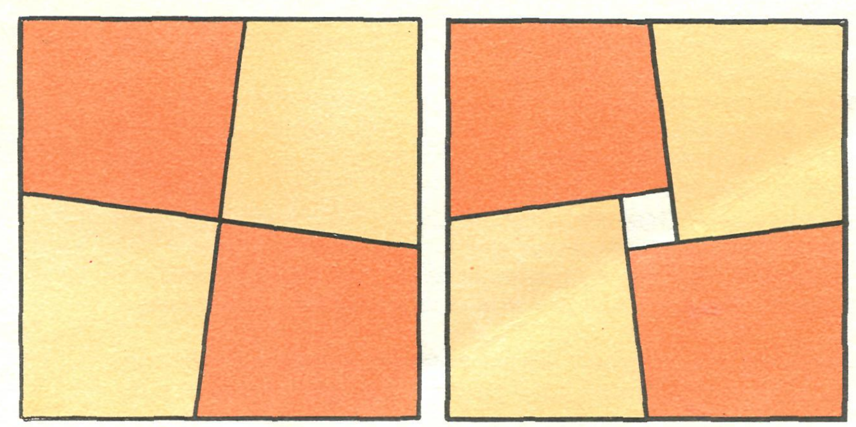
Софизм Аристотеля: Все окружности имеют одинаковую длину. Ведь при оборачивании двух окружностей с разными диаметрами $OA_1 < OA_2$ каждая из них за один оборот „спрямляется" на один и тот же отрезок OO_1.

Прямоугольник разрезали на пять частей и, поменяв их местами, образовали новый прямоугольник тех же размеров, но уже без пустой клетки. Тем самым геометрически продемонстрировали невозможное равенство 64 = = 65.

Перестановка пяти частей квадрата вроде бы доказывает равенство 169 = 166.







Достаточно разрезать квадрат на четыре четырехугольника и мы уже получаем исчезновение части площади. Так ли все это? Тогда где допущены ошибки?

94. Осторожно — софизмы!

Чаще всего в рассуждениях случаются ошибки, называемые паралогизмами (от греч. παραλογισμος) — неправильные, ошибочные рассуждения, логические ошибки, допущенные не умышленно, а из-за потери последовательности в рассуждениях или нарушения одного из законов логики.

Многочисленные математические ошибки (не механические или допущенные по невнимательности описки), допускаемые учащимися средних школ и техникумов, студентами и учеными, являются именно паралогизмами. Существует много пособий, где анализируются такие ошибки. Эти пособия выполняют роль профилактики для учащихся, прежде всего для абитуриентов, потому что, как писал Аристотель, „людям, желающим идти правильным путем, важно также знать и об уклонении".

Роль логической профилактики выполняют также софизмы (от греч. σοφισμα — хитрая уловка, выдумка, ложное умозаключение) — логически неправильные рассуждения, содержащие умышленно допущенную, замаскированную ошибку. Первый анализ и классификацию софизмов дал Аристотель в трактате „О софистических опровержениях" (А р и с т о т е л ь. Собр. соч.: В 4 т. — М.: Мысль, 1978. — Т. 2. — С. 533—593), а первый сборник математических софизмов „Псевдарий" написал знаменитый древнегреческий математик Евклид (IV в. до н. э.). Сборник Евклида содержал различные ошибочные рассуждения, которые допускают многие начинающие изучать математику. „Псевдарий" Евклида не сохранился, но идея создания сборников математических, физических, логических и других софизмов оказалась плодотворной и по настоящее время. Такие книги находят широкую читательскую аудиторию.

При составлении софизмов используются разнообразные приемы. Чаще всего ошибки в софизмах маскируют, используя такие приемы:

1) неправильности языка;
2) многозначность слов;
3) двухзначность словосочетаний;
4) распространение свойств понятий на исключительные (предельные) случаи;
5) приписывание свойств определенного вида понятий всему роду;
6) распространение истинности прямого утверждения на обратное;
7) подмена точных определений и понятий интуитивными представлениями;
8) ошибки геометрических построений;
9) уклонение от тезиса;
10) круг в доказательстве и т. д.

Но случались и более тревожные, подлинно катастрофические ситуации в познавательной деятельности человека. Если известно, что данное противоречие является паралогизмом или софизмом, т. е. результатом некоторой логической ошибки, то вопрос состоит в том, чтобы локализовать эту ошибку, уяснить, в каком месте цепи рассуждений были нарушены правила логики или математики, и обнаружить, какие именно правила.

Сложнее была ситуация, когда правильные формально-логические рассуждения приводили к взаимно исключающим один другого выводам или логическому произведению таких выводов. Это были уже парадоксы (от греч. παραδοξος — неожиданный, удивительный).

Древнейшие известные парадоксы — Лжец, Куча, Лысый и др. — изобрел древнегреческий философ Эвбулид из Милета (IV в. до н. э.). Первый из названных парадоксов приписывают критскому философу Эпимениду (VI в. до н. э.). В изложении Эвбулида парадокс передается так: Критянин Эпименид сказал: все критяне лжецы. Эпименид сам критянин, следовательно, он лжец. Но если Эпименид лжец, то его высказывание, что все критяне лжецы — ложное. Таким образом, он не лжец и его высказывание „все критяне лжецы" — истинное. Но отсюда следует, что все критяне, в том числе и Эпименид, — лжецы и т. д.

Получили парадокс, т. е. ситуацию, когда логически правильные рассуждения приводят к двум исключающим один другого выводам: A и не A, которые в равной степени доказуемы и каждый из которых нельзя отнести ни к истинным, ни к ложным.

Ученые болезненно переживали случаи, когда как бы какие-то неведомые силы заманивали мысль в логическую ловушку. Философ Диодор Крон (ум. ок. 307 г. до н. э.), не решив парадокса Эвбулида, умер с горя, а другой — Филет Косский, потерпев ту же неудачу, покончил с собой. Анализу рассмотренного парадокса философ-стоик Хрисипп (ок. 281—208 до н. э.) посвятил три книги. И в наше время парадоксы типа Лжец привлекают внимание логиков, философов и математиков.

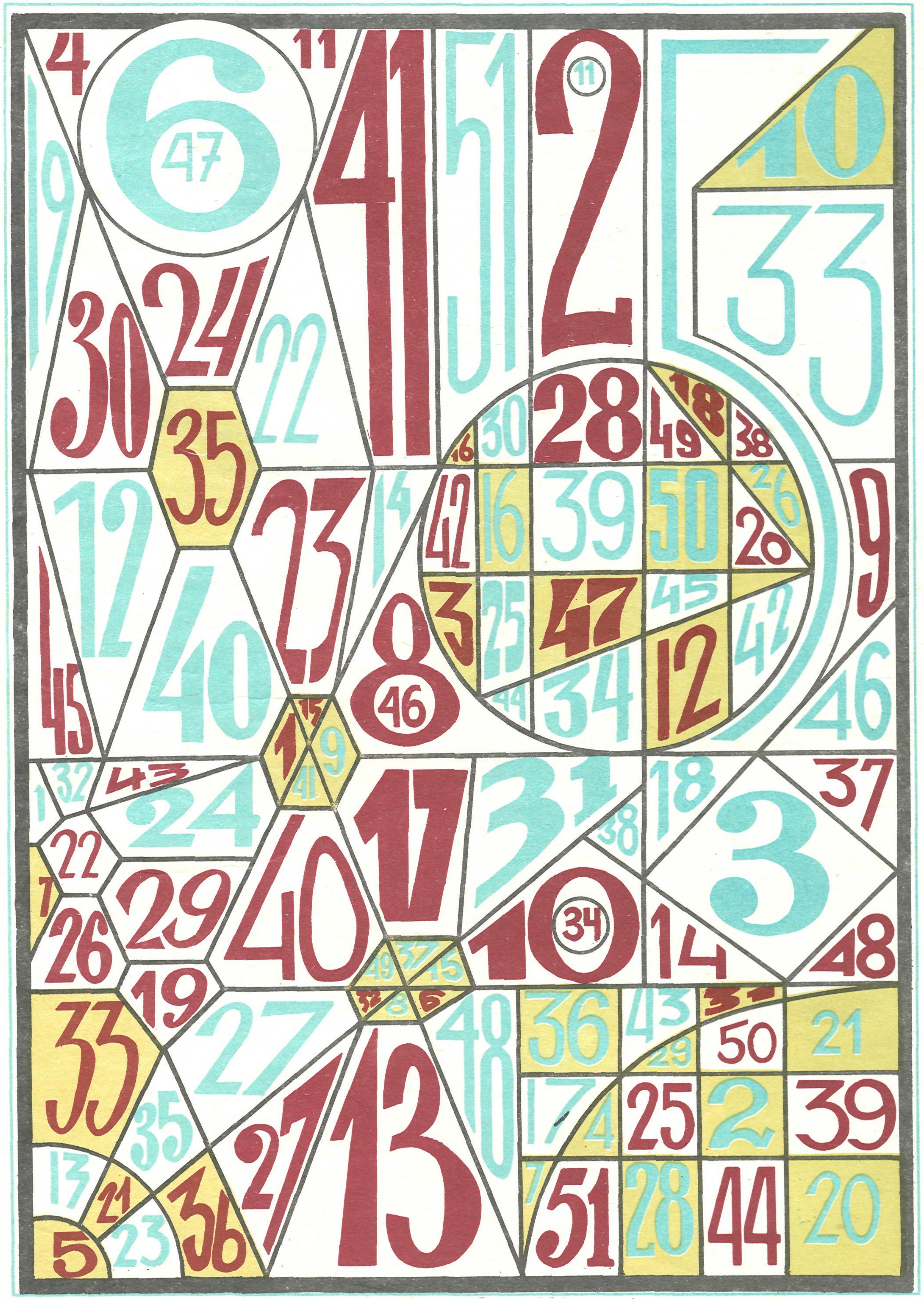
Еще сложнее оказалась проблема решения парадоксов (апорий) Зенона Элейского (см. плакат 12), которым посвящено множество книг и статей.

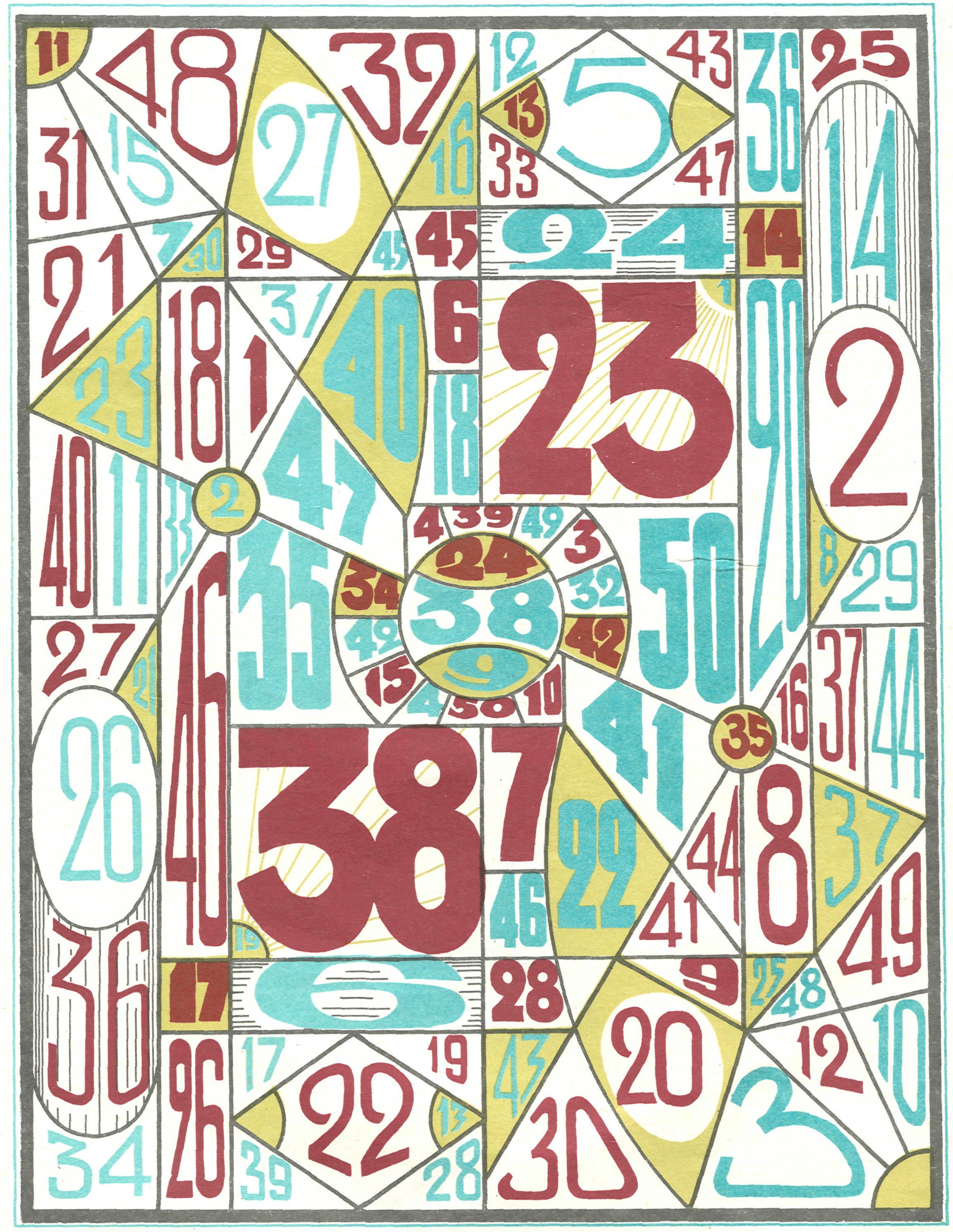
Парадокс Эвбулида и апории Зенона Элейского не исчерпывают шеренги логических катастроф, природа которых еще далеко не раскрыта. Многие парадоксы, пополнявшие коллекции логических тупиков, были некоторыми вариантами своих древних предшественников. Так, в Средние века многих богословов приводил в отчаяние, например, такой парадокс: может ли всемогущий бог создать такой камень, чтобы сам он не смог его поднять? Некоторые фанатики, не находя выхода из этого логического лабиринта, кончали самоубийством.

Много поколений читателей бессмертного романа М. Сервантеса „Дон Кихот" потешаются над беспомощностью добродушного Санчо разрешить задачу, предложенную ему как губернатору острова одним из посетителей: некоторое поместье делится рекой на две половины. Через реку перекинут мост и тут же всегда наготове суд и виселица, потому что в поместье неукоснительно действует закон: каждый прошедший по мосту обязан сказать, зачем он последовал. Если путник говорит правду, его следует отпустить, если же врет, немедленно вздернуть тут же на виселицу. Конечно же, все проходящие через мост говорили правду и беспрепятственно шли по своим делам. Но вот случилось невероятное. Один путник заявил судьям, что он пришел именно затем, чтобы его вздернули на виселице, которая стоит на берегу реки у моста. Вот после этого все и началось. Если удовлетворить желание путника, то окажется, что он сказал правду. Тогда, согласно действующему закону, его надлежит отпустить. Но если его отпустить, то окажется, что он сказал судьям неправду, потому что...

Мы оказались в логической ловушке, из которой не смогли выбраться ни судьи, ни Санчо. И неудивительно, за шуточной задачей скрывается сложная логическая проблема, неразрешенная окончательно и современной наукой.

Существуют различные взгляды на источники возникновения и значение для науки парадоксов. Например, А. А. Ханагов в статье „Существуют ли в формальной логике парадоксы?" (Природа, 1978, № 10, с. 118—124) утверждает, что никаких логических парадоксов не существует. Разные логические противоречия в рассуждениях возникают как результат нарушения законов формальной логики, т. е. как логические ошибки, и парадоксы являются по сути паралогизмами или софизмами, только с более замаскированными ошибками.





95. Практикум для любознательных

Математики, педагоги и психологи разработали много форм тренировки и проверки уровня развития внимания, изобретательности, способности выполнять определенную умственную работу при наличии различных помех. Такие задания обычно называются психологическими практикумами, или тестами. Большинство заданий составляют на математическом материале, поэтому их можно рассматривать как одну из форм математических задач на смекалку или математических развлечений. Большой популярностью у учащихся разных возрастных групп пользуются различные числовые таблицы, или лабиринты. Их можно широко использовать в качестве заданий для индивидуальных занятий и групповых соревнований во время проведения математических вечеров, турниров, викторин и других форм внеклассной работы по математике. Предлагаемые таблицы являются заданиями повышенной сложности, хотя сложность заданий можно варьировать. Например, как облегченный вариант можно предложить пересчитывать (в порядке возрастания или убывания) только числа, записанные одним каким-то цветом. Работая с учащимися средних или старших классов, можно усложнять задания с использованием всего массива чисел.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Маркс К.** Капитал. Т. 1. Послесловие ко второму изданию//Маркс К., Энгельс Ф. Соч. — 2-е изд. — Т. 23. — С. 12—22.
2. **Маркс К.** Капитал. Т. 1//Там же. — С. 43—784.
3. **Маркс К.** Капитал. Т. 3//Там же. — Т. 25, ч. 1. — С. 3—505.
4. **Маркс К.** Речь на юбилее „The People's Paper", произнесенная в Лондоне 14 апреля 1856 года//Там же. — Т. 12. — С. 3—5.
5. **Маркс К.** Энгельсу, 23 нояб. 1860 г.//Там же. — Т. 30. — С. 87—88.
6. **Маркс К.** Лауре Маркс, 28 авг. 1866 г.//Там же. — Т. 31. — С. 438—439.
7. **Маркс К.** Элеоноре Маркс, 5 сент. 1866 г.//Там же. — С. 441—442.
8. **Маркс К.** Энгельсу, 31 мая 1873 г.//Там же. — Т. 33. — С. 71—74.
9. **Маркс К.** Математические рукописи. — М.: Наука, 1968. — 639 с.
10. **Энгельс Ф.** Анти-Дюринг//Маркс К., Энгельс Ф. Соч. — 2-е изд. — Т. 20. — С. 5—338.
11. **Энгельс Ф.** Диалектика природы//Там же. — С. 343—626.
12. **Энгельс Ф.** Похороны Карла Маркса//Там же. — Т. 19. — С. 350—354.
13. **Энгельс Ф.** В. Боргиусу, 25 янв. 1894 г.//Там же. — Т. 39. — С. 174—177.
14. **Ленин В. И.** Материализм и эмпириокритицизм//Полн. собр. соч. — Т. 18. — С. 7—384.
15. **Ленин В. И.** Конспект книги Гегеля „Лекции по истории философии"//Там же. — Т. 29. — С. 219—278.
16. **Материалы** XXVII съезда КПСС. — М.: Политиздат, 1986. — 352 с.
17. **О реформе** общеобразовательной и профессиональной школы: Сб. документов и материалов. — М.: Политиздат, 1984. — 112 с.
18. **Александрова Н. В.** Математические термины: Справ. — М.: Высш. шк., 1978. — 190 с.
19. **Белл Э. Т.** Творцы математики. — М.: Просвещение, 1979. — 256 с.
20. **Белозеров С. Е.** Пять знаменитых задач древности: История и совр. теория. — Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1975. — 317 с.
21. **Боголюбов А. Н.** Математики. Механики: Биогр. справ. — К.: Наук. думка, 1983. — 639 с.
22. **Бородин А. И., Бугай А. С.** Биографический словарь деятелей в области математики. — К.: Рад. шк., 1979. — 607 с.
23. **Вайман А. А.** Шумеро-вавилонская математика (III—I тыс. до н. э.). — М.: Изд-во вост. лит., 1961. — 275 с.
24. **Ван дер Варден Б. Л.** Пробуждающая наука (Математика древнего Египта, Вавилона и Греции). — М.: Физматгиз, 1959. — 460 с.
25. **Володарский А. И.** Очерки истории средневековой индийской математики. — М.: Наука, 1977. — 183 с.
26. **Глейзер Г. И.** История математики в школе. — М.: Просвещение, 1981—1983. — IV—VI классы. — 1981. — 239 с.; VII—VIII классы. — 1982. — 240 с.; IX—X классы. — 1983. — 352 с.
27. **Гнеденко Б. В.** В. И. Ленин и методологические проблемы математики. — М.: Знание, 1970. — 32 с.
28. **Горький М.** В. И. Ленин//Воспоминания о В. И. Ленине: В 5 т. — 3-е изд. — М., 1984. — Т. 2. — С. 236—268.
29. **Гутер Р. С., Полунов Ю. Л.** От абака до компьютера. — М.: Знание, 1981. — 208 с.
30. **Депман И. Я.** История арифметики. — М.: Просвещение, 1965. — 415 с.
31. **Историко**-математические исследования. — М.: Наука, 1948—1985. — Вып. 1—29.
32. **История** математики с древнейших времен до начала XIX столетия: В 3 т./Под ред. А. П. Юшкевича. — М.: Наука, 1970—1972. — Т. 1—3.
33. **История** математики XIX века. — М.: Наука. — Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей. — 1978. — 255 с.; Геометрия. Теория аналитических функций. — 1981. — 269 с.
34. **История** отечественной математики с древнейших времен до наших дней: В 4 т. 5 кн./Отв. ред. И. З. Штокало. — К.: Наук. думка, 1966—1970. — Т. 1—4, кн. 1—5.
35. **Католин Л.** Мы были тогда дерзкими парнями... — М.: Знание, 1979. — 208 с.
36. **Кедровский О. И.** Методологические проблемы развития математического познания. — К.: Вища шк. Головное изд-во, 1977. — 230 с.
37. **Колчинский И. Г., Корсунь А. А., Родригес М. Г.** Астрономы: Биогр. справ. — К.: Наук. думка, 1977. — 415 с.
38. **Кольман Э.** История математики в древности. — М.: Физматгиз, 1961. — 235 с.
39. **Крупская Н. К.** Диалектический подход к изучению отдельных дисциплин//Пед. соч.: В 10 т. — М., 1959. — Т. 3. — С. 614—620.
40. **Курант Р., Роббинс Г.** Что такое математика? — М.: Просвещение, 1967. — 558 с.
41. **Кымпан Ф.** История числа π. — М.: Наука, 1971. — 216 с.
42. **Лафарг П.** Личные воспоминания о Карле Марксе//Воспоминания о К. Марксе и Ф. Энгельсе. — М., 1983. — Ч. 1. — С. 139—160.
43. **Майстров Л. Е.** Теория вероятностей: Ист. очерк. — М.: Наука, 1967. — 320 с.
44. **Математика** в понятиях, определениях и терминах: В 2 ч./О. В. Мантуров, Ю. К. Солнцев, Ю. И. Соркин, Н. Г. Федин. — М.: Просвещение. — Ч. 1. — 1978. — 319 с.; Ч. 2 — 1982. — 351 с.
45. **Математика** в современном мире. — М.: Мир, 1967. — 205 с.
46. **Математика,** ее содержание, методы и значение: В 3 т. — М.: Изд-во АН СССР, 1956. — Т. 1—3.
47. **Математическая** энциклопедия/Гл. ред. И. М. Виноградов. — М.: Сов. энцикл., 1977—1985. — Т. 1—5.
48. **Медведев Ф. А.** Развитие теории множеств в XIX веке. — М.: Наука, 1965. — 232 с.
49. **Меринг Ф.** Карл Маркс. История его жизни. — М.: Политиздат, 1957. — 608 с.
50. **Никифоровский В. А., Фрейман Л. С.** Рождение новой математики. — М.: Наука, 1976. — 199 с.
51. **Пидоу Д.** Геометрия и искусство. — М.: Мир, 1979. — 332 с.
52. **Прудников В. Е.** Русские педагоги-математики XVIII—XIX веков. — М.: Учпедгиз, 1956. — 640 с.
53. **Рыбников К. А.** История математики. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974. — 455 с.
54. **Симонов Р. И.** Математическая мысль Древней Руси. — М.: Наука, 1977. — 120 с.
55. **Тесленко И. Ф.** Формирование диалектико-материалистического мировоззрения учащихся при изучении математики. — М.: Просвещение, 1979. — 136 с.
56. **Фаермарк Д. С.** Задача пришла с картины. — М.: Наука, 1974. — 160 с.
57. **Фрейман Л. С.** Творцы высшей математики. — М.: Наука, 1968. — 216 с.
58. **Фролов Б. А.** Числа в графике палеолита. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1974. — 239 с.
59. **Храмов Ю. А.** Физики. Биогр. справ. — М.: Наука, 1983. — 400 с.
60. **Хрестоматия** по истории математики: В 2 кн. /Под ред. Ю. П. Юшкевича. — М.: Просвещение, 1976—1977. — Кн. 1. Арифметика и алгебра. Теория чисел. Геометрия. — 319 с.; Кн. 2. Математический анализ. Теория вероятностей. — 224 с.
61. **Шостьин Н. А.** Очерки истории русской метрологии (XI—XIX веков). — М.: Изд-во стандартов, 1975. — 272 с.
62. **Штейнгауз Г.** Задачи и размышления. — М.: Мир, 1974. — 400 с.
63. **Шубников А. В., Копцик В. А.** Симметрия в науке и искусстве. — М.: Наука, 1972. — 340 с.
64. **Энциклопедический** словарь юного математика/Сост. А. П. Савин. — М.: Педагогика, 1985. — 351 с.
65. **Энциклопедия** кибернетики: В 2 т./Под ред. В. М. Глушкова. — К.: Укр. сов. энцикл., 1974. — Т. 1—2.
66. **Энциклопедия** элементарной математики: В 5 кн. — М.: Наука, 1951—1966. — Кн. 1—5.
67. **Юшкевич А. П.** История математики в России (до 1977 года). — М.: Наука, 1968. — 591 с.
68. **Яглом И. М.** Математика и реальный мир. — М.: Знание, 1978. — 63 с.
69. **Яглом И. М.** Математические структуры и математическое моделирование. — М.: Сов. радио, 1980. — 144 с.