

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ

В.Н. Берцун

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ
НА ГРАФАХ**

Часть II



Издательство Томского университета
2013

УДК 519.17
ББК 22.174
Б 527

Рецензенты:

Доктор техн. наук, профессор ТГУ

А. Ю. Матросова

Кандидат техн. наук, доцент ТГУ

В. А. Беляев

Берцун В.Н.

Б 527 Математическое моделирование на графах. Часть 2: Томск:
Изд-во Том. ун-та, 2013. – 88 с.

ISBN 978–5–7511–2211–9

Описывается математическое моделирование прикладных задач и оптимизация вычислительных алгоритмов для высокопроизводительных компьютеров (кластеров).

В книге содержатся три раздела теории графов: матрицы, связанные с графами, характеристические числа графов и параллельные алгоритмы на графах.

Для специалистов, занимающихся математическим моделированием прикладных задач, и студентов математических и физико-математических факультетов.

УДК 519.17
ББК 22.174

ISBN 978–5–7511–2211–9

© В. Н. Берцун, 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. МАТРИЦЫ, СВЯЗАННЫЕ С ГРАФАМИ	5
1.1. Матрица смежности и инцидентности	5
1.2. Матрица достижимости, расстояний и примыканий	11
1.3. Матрица Кирхгофа и точки Штейнера	15
1.4. Информационный граф	19
2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА ГРАФОВ	23
2.1. Цикломатическое число	23
2.2. Хроматическое число и хроматический индекс	26
2.3. Хроматический многочлен	29
2.4. Спектры графов	35
2.5. Число внутренней устойчивости графа	42
2.6. Число внешней устойчивости графа	45
3. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ НА ГРАФАХ	48
3.1. Алгоритм Дейкстры	48
3.2. Алгоритм Флойда и его модификация	55
3.4. Параллельный алгоритм Флойда	60
3.5. Параллельный алгоритм нахождения коэффициентов характеристического многочлена графа	63
3.6. О разделении графа на домены	66
3.7. Математическое моделирование теплообмена в стержневых системах	69
ЛИТЕРАТУРА	75
ПРИЛОЖЕНИЕ 1	77
ПРИЛОЖЕНИЕ 2	84

ВВЕДЕНИЕ

Граф – это наглядный образ, который дает максимум пространственных и структурных представлений, является одним из гибких математических объектов, способных легко приспосабливаться под любую конкретную модель [1–5].

Графами представляются схемы авиалиний и схемы метро, нейронные сети, а на географических картах – реки и железные дороги. В виде графов можно изображать химические молекулы и отношения между людьми, электронные схемы и информационную структуру алгоритмов. Свойства и алгоритмы теории графов используются в поисковых системах, обработке изображений, а также при решении задач логистики, гемодинамики, управления рисками и динамики механических систем.

Большинство численных методов решения краевых задач основаны на моделировании непрерывной области изменения независимых переменных связным графом (регулярной или нерегулярной сеткой). Значительный интерес представляет решение прикладных задач по расчету, например, стержневых систем, характеристик течения в системах трубопроводов, теплового состояния электрических сетей, область определения которых является связным графом.

При создании экономичных параллельных вычислительных алгоритмов на графах большой размерности часто требуется обеспечить сбалансированную загрузку процессоров кластера на основе рационального разбиения многомерного сеточного графа на домены с учетом минимизации обменов.

1. МАТРИЦЫ, СВЯЗАННЫЕ С ГРАФАМИ

1.1. Матрица смежности и инцидентности

При большом числе вершин и ребер анализ графа $G(V, E)$ усложняется и его геометрическое представление не всегда удобно. В этом случае для исследования графа применяют один из аналитических способов представления его структурных свойств – граф моделируют матрицами, связанными с ним [1, 6, 7]. Это позволяет эффективно применять методы компьютерной алгебры для анализа графов.

Матрицей смежности вершин помеченного графа G называется матрица $A = [a_{ij}]^n$, где элемент a_{ij} есть число ребер, соединяющих вершины x_i и x_j , при этом петля означает одно ребро. На рис.1.1 приведены матрицы смежности для простого графа, мультиграфа и графа с петлями.

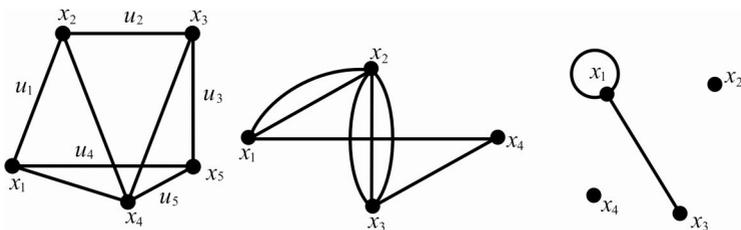


Рис. 1.1. Различные типы графов

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно получить несколько вариантов матриц смежности одного и того же графа, меняя обозначения его вершин. Это приведет к изменению порядка строк и столбцов матрицы A .

Матрица смежности особенно удобна для представления *плотных* графов с множеством вершин V и множеством ребер E , для которых $|E| \approx (|V|^2 / 2)$.

Для представления разреженных графов ($|E| \ll |V|^2$) более экономичным (с точки зрения объема памяти) является представление графа списками смежности [8].

Отметим, что матрица A для графа с p компонентами связности, при соответствующей нумерации вершин, является блочно-диагональной.

Матрицей смежности ребер графа G называется симметричная матрица $B = [b_{ij}]_l^m$, где

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } u_i \text{ смежно с ребром } u_j; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Матрица B неориентированного графа обладает теми же свойствами, что и матрица смежности A .

Матрицей инцидентности графа G называется матрица $R = [r_{ij}]$, $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$; у которой

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } u_j \text{ инцидентно вершине } x_i; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Например, граф на рис.1.2 содержит 5 вершин и 6 ребер.

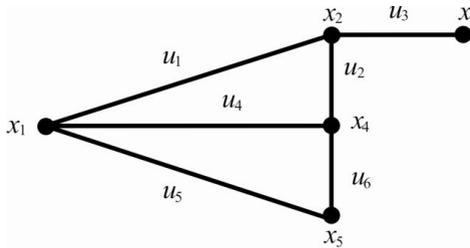


Рис. 1.2. Простой граф

Для такого графа матрицы A , B и R имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

У простых графов G матрицы A и B – бинарные и симметричные.

Запишем для бинарной матрицы A ее верхнюю треугольную часть в строчку по строкам подряд для заданной нумерации вершин $(a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}, a_{23}, \dots, a_{2n}, a_{34}, \dots, a_{n-1n})$, что можно интерпретировать как некоторое двоичное число. Меняя нумерацию вершин графа, будем получать различные двоичные числа. Наибольшее из этих чисел (полный инвариант графа) называется кодом Харари. Для изоморфных графов их полные инварианты совпадают. Нумерация вершин (и матрица смежности), соответствующая коду Харари, называется *канонической*.

Матрицей смежности вершин орграфа \bar{G} называется матрица

$$A = [a_{ij}]^n \text{ с элементами } a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i x_j \text{ – дуга графа} \\ 0 & \text{– в остальных случаях.} \end{cases}$$

Например, такая матрица для графа на рис.1.3

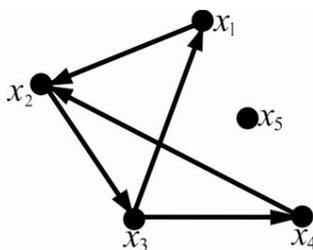


Рис. 1.3. Орграф с изолированной вершиной

имеет вид

$$A(\bar{G}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что сумма элементов по строкам этой матрицы равна сумме степеней выхода вершин графа, а сумма по столбцам равна сумме степеней входа. Сумма элементов этой целочисленной матрицы совпадает с числом дуг орграфа.

Матрица смежности не является инвариантом (зависит от нумерации вершин), но (ор)граф по ней восстанавливается однозначно, с точностью до изоморфизма. Для изоморфных (ор)графов их матрицы смежности получаются друг из друга одинаковыми перестановками строк и столбцов (являются подобными). Заметим, что проверка двух графов на изоморфизм с помощью перестановки строк и столбцов одной из матриц смежности имеет сложность $O(n!)$.

Рангом графа называется ранг (наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы) его матрицы смежности [8, 9]. Граф называется *симметричным*, если его матрица смежности симметрична.

Рассмотрим для ациклического графа на рис.1.4, который не имеет контуров, степени его матрицы смежности A

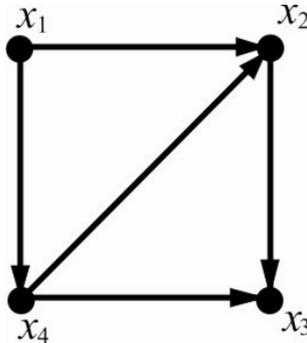


Рис. 1.4. Ациклический оргграф

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^4 = 0.$$

Заметим, что у этого графа существует только один путь длины 3 из x_1 в x_3 и нет путей длины больше трех.

Утверждение 1[9]. Пусть $A = [a_{ij}]_1^n$ – матрица смежности орграфа. Элемент $a_{ij}^{(k)}$, состоящий на пересечении i -той строки и j -го столбца матрицы A^k , равен числу различных путей длины k , идущих из x_i в x_j . Диагональный элемент $a_{ii}^{(k)}$ матрицы A^k равен числу различных контуров (ориентированных циклов) длины k , содержащих вершину x_i .

Доказательство. Если a_{ik} – число дуг, соединяющих x_i с x_k , a_{kj} – число дуг, соединяющих x_k с x_j , то $a_{ik}a_{kj}$ – число различных маршрутов (путей), каждый из которых состоит из двух дуг, соединяющих x_i с x_j и проходящих через вершину x_k . Если теперь просуммировать попарные произведения $a_{ik}a_{kj}$ по всем промежуточным вершинам x_k , то получим общее число ориентированных маршрутов длины 2 от x_i до x_j . С другой стороны, это будет элемент $a_{ij}^{(2)}$ матрицы A^2 .

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Пусть теперь $a_{ij}^{(2)}$ – число маршрутов длины 2 из $x_i \rightarrow x_j$, a_{jm} – число маршрутов из одной дуги (x_j, x_m) . Тогда число маршрутов длины 3, проходящих через x_j , будет $a_{ij}^{(2)}a_{jm}$. Если теперь $a_{ij}^{(2)}a_{jm}$ просуммировать по всем j , то получим элементы матрицы $A^3 = A^2A = [a_{ij}^{(3)}]_1^n$.

Допустим, что теорема верна для A^{k-1} тогда $A^k = A^{k-1}A$. \square

Замечание 1. Если $A^{k+1} = A^{k+2} = \dots = 0$, то граф не имеет путей длины больше k и не имеет контуров.

Замечание 2. Расстояние между вершинами x_i и x_j равно наименьшему из целых k , для которых элемент $a_{ij}^{(k)}$ соответствующей матрицы A^k становится не равным нулю.

Замечание 3. Для неориентированных графов элемент $a_{ij}^{(k)}$ совпадает с количеством путей длины k из вершины x_i в x_j .

Замечание 4. Граф \bar{G} на n вершинах имеет хотя бы один контур, если матрица $Q = A + A^2 + A^3 + \dots + A^n$ имеет ненулевые элементы на главной диагонали.

Рассмотрим, например, граф на рис.1.5.

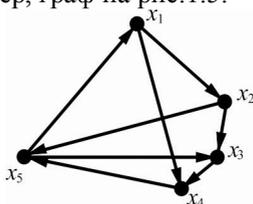


Рис. 1.5. Орграф для $n=5$

Его матрицы A, A^2, A^3 имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Граф имеет три контура длины 3, проходящие через вершину x_5 , и не имеет путей длины 3 из x_1 в x_5 . В графе есть гамильтонов контур $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1)$, что соответствует элементам $a_{ii}=1$ в матрице A^5 .

Свойства степеней матрицы A используются, например, в социологии при решении вопроса о лидере в некоторых группах людей. Матрица смежности в этом случае интерпретируется как социограмма (*социограмма* – способ представления межличностных и межгрупповых отношений симпатий/антипатий в виде матрицы смежности орграфа) [10, 11].

Матрицей инцидентности для орграфа \bar{G} называется матрица R с элементами

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если дуга } u_j \text{ выходит из вершины } x_i, \\ -1, & \text{если дуга } u_j \text{ входит в вершину } x_i, \\ 0, & \text{если дуга } u_j \text{ не инцидентна вершине } x_i, \end{cases}$$

$$i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}.$$

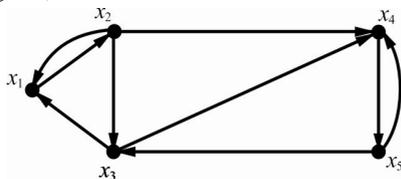


Рис. 1.6. Орграф для $n=5, m=9$

Матрица инцидентности для орграфа \bar{G} из рис 1.6

	U_{12}	U_{21}	U_{23}	U_{24}	U_{31}	U_{34}	U_{35}	U_{45}	U_{54}
x_1	1	-1	0	0	-1	0	0	0	0
x_2	-1	1	1	1	0	0	0	0	0
x_3	0	0	-1	0	1	1	1	0	0
x_4	0	0	0	-1	0	-1	0	1	-1
x_5	0	0	0	0	0	0	-1	-1	1

Так как всякая дуга U_{ij} выходит из вершины x_i и заходит в вершину x_j , то каждый столбец матрицы R всегда имеет два ненулевых элемента (+1 и -1).

1.2. Матрица достижимости, расстояний и примыканий

Матрицей достижимости $D = [d_{ij}]_l^n$ графа G называется матрица, для которой

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_j \text{ достижима из } x_i; \\ 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } x_j \text{ не достижима из } x_i. \end{cases}$$

Для неориентированного связного графа G матрица D бинарная и всегда симметричная с элементами $d_{ij} = 1$. Такую матрицу можно использовать для определения числа компонент связности p графа G и соответствующих множеств вершин S_p связных компонент. Например, для графа на рис.1.7

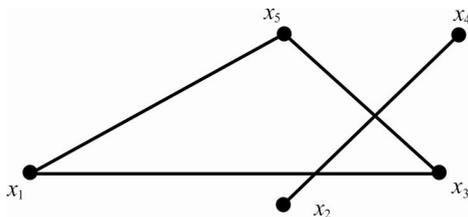


Рис. 1.7. Простой граф, для которого $p=2$

матрица D имеет вид

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	0	1	0	1
x_2	0	1	0	1	0
x_3	1	0	1	0	1
x_4	0	1	0	1	0
x_5	1	0	1	0	1

Положим $p=1$ и из D вычеркнем столбцы, содержащие единичные элементы в первой строке этой матрицы, и строки с теми же номерами, что и столбцы. Тогда получим множество $S_1 = \{x_1, x_3, x_5\}$ и новую матрицу D_1

x	x_2	x_4
x_2	1	1
x_4	1	1

Если D_1 не нулевая матрица, то $p=p+1$ и вычеркиваем столбцы с ненулевыми элементами в матрице D_1 и т. д. Таким образом, для рассматриваемого графа из рис.1.7

$$p=2, S_1=\{x_1, x_3, x_5\}, S_2=\{x_2, x_4\}.$$

Для определения компонент сильно связанных вершин орграфа описанный выше алгоритм можно применить к матрице контрдостижимости [7, 13]. Для сильно связанного орграфа все элементы матрицы достижимости $d_{ij}=1$. Для одностороннего орграфа

$$d_{ii}=1; d_{ij}+d_{ji}=1 \text{ и } d_{ij} \cdot d_{ji}=0 \text{ для всех } i \neq j; i, j=1, 2, \dots, n.$$

Если для вещественной матрицы C размерности $(n \times n)$ выбрать на плоскости n различных точек p_1, p_2, \dots, p_n , а каждому ненулевому элементу матрицы c_{ij} поставить в соответствие дугу (p_i, p_j) , то получим орграф матрицы C и соответствующую матрицу достижимости D .

При доказательстве теоремы существования обратной матрицы у системы линейных уравнений $Cx=b$ часто используется теорема Тауски: *если матрица C неразложима* (не может быть приведена к блочно-треугольному виду

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & O \\ B & C_2 \end{bmatrix},$$

где C_1, C_2 – квадратные матрицы, O – нулевая матрица) и обладает свойством диагонального преобладания, то она не вырождена [12].

Отметим, что матрица C неразложима, если ее орграф сильно связный.

Матрицей расстояний графа \bar{G} называют матрицу S такую, что элемент s_{ij} есть минимальное расстояние от x_i к x_j . Если вершина x_j не достижима из x_i , то $s_{ij}=\infty$. (При хранении этой матрицы в компьютере вместо знака ∞ можно использовать любое отрицательное число). Для орграфов из рис.1.8

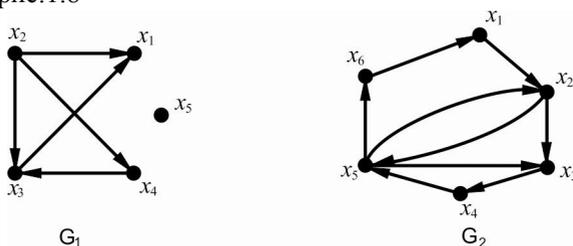


Рис. 1.8. Орграфы G_1 и G_2

матрицы D и S имеют соответственно вид

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad S_1 = \begin{vmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \infty \\ 1 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 1 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{vmatrix};$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad S_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Зная элементы матрицы S , можно определить диаметр и радиус графа.

Граф $G(V, E)$ называется *взвешенным*, если каждому его ребру (x_i, x_j) поставлено в соответствие некоторое неотрицательное число w_{ij} — вес ребра.

Элементы *матрицы примыканий* $A = [a_{ij}]_l^m$ такого графа определяются следующим образом [14 – 16]:

$$a_{ij} = \begin{cases} w_{ij}, & \text{для } (x_i, x_j) \in E \\ 0, & \text{для } i = j \\ \infty & \text{— в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда, например, для графа на рис. 1.9

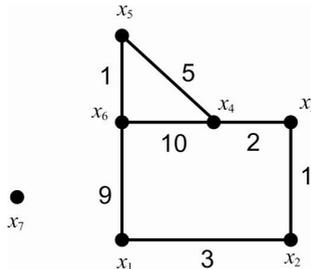


Рис. 1.9. Граф для $n=6$

матрица примыканий имеет вид

$$A_p = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \infty & \infty & \infty & 9 & \infty \\ 3 & 0 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 0 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 0 & 5 & 10 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 5 & 0 & 1 & \infty \\ 9 & \infty & \infty & 10 & 1 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} .$$

1.3. Матрица Кирхгофа и точки Штейнера

Матрицей Кирхгофа [9] простого помеченного графа G называется матрица $M_k = [m_{ij}]_1^n$ с элементами

$$m_{i,j} = \begin{cases} -1, & \text{если вершины } x_i \text{ и } x_j \text{ смежны,} \\ 0, & \text{если } i \neq j \text{ и вершины } x_i \text{ и } x_j \text{ не смежны,} \\ v_i, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

где v_i – степень вершины x_i графа G .

Отметим, что в такой матрице сумма элементов в каждой строке и в каждом столбце равна нулю и $\det(M_k) = 0$. Матрица M_k связана с матрицей смежности A соотношением $M_k = V - A$, где V – нулевая матрица, содержащая на главной диагонали степени вершин графа. Матрицу M_k иногда называют матрицей Лапласа L , так как аналогичная матрица возникает при разностной аппроксимации оператора Лапласа Δ на регулярном сеточном графе.

Известно [9, 13, 14], что число остовных деревьев в связном графе G на $n \geq 2$ вершинах равно алгебраическому дополнению любого элемента матрицы Кирхгофа (*Кирхгоф, 1847 г.*). Все алгебраические дополнения симметричной матрицы M_k равны между собой и $\text{rank}(M_k) = n - 1$. Например, для графа G из рис.1.10 алгебраическое дополнение Δ_{13} элемента m_{13} равно трем, что соответствует количеству каркасов, представленных на рис.1.11

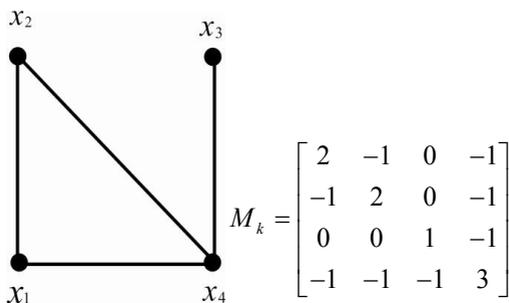


Рис. 1.10. Граф и его матрица Кирхгофа

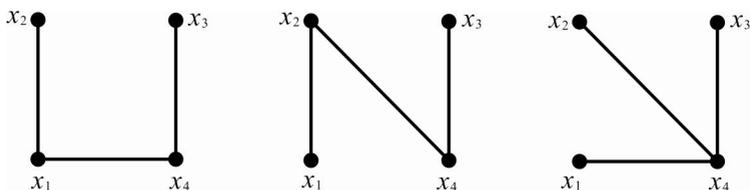


Рис. 1.11. Каркасы графа из рис 1.10

Если простому графу G поставить в соответствие орграф H некоторой его ориентации с матрицей инцидентности $R(H)$, то матрица Кирхгофа $M_k = R(H) R'(H)$, где $R'(H)$ – транспонированная к $R(H)$ матрица.

В орграфе для некоторой вершины x_i можно определить соответственно количество каркасов (остовных деревьев), выходящих из этой вершины, и количество каркасов, входящих в эту вершину [14].

Для полного графа K_n количество остовных деревьев является максимальным и совпадает с числом помеченных деревьев на n вершинах n^{n-2} [15]. Отметим, что в связном графе на n вершинах любое остовное дерево содержит $n - 1$ ребро.

Обход графа – это метод систематического перечисления его вершин или ребер, который используется при решении различных задач на графах. Для осуществления обходов в графе применяются алгоритмы поиска *в глубину* или *в ширину* [6, 13]. В связном графе G_n с весами (взвешенными ребрами), соответствующими, например, стоимости строительства дорог между городами или длине печатных

проводников между контактами на плате, часто возникает необходимость определения остова минимального веса (сумма весов ребер выбранного остова минимальна) [7].

Для этих целей можно использовать, например, алгоритм Краскала (алгоритм О. Борувки – Д. Краскала, 1926 г.).

Пусть T – несвязный граф из n вершин.

1. Отсортировать ребра G_n в порядке возрастания их весов.

2. Начиная с первого ребра в этом списке, добавляются ребра в граф T при условии, что такое добавление не приводит к возникновению цикла в графе T .

3. Осуществляется переход на метку 2, пока T не станет деревом с $n-1$ ребром.

Алгоритм использует «жадный» подход (на каждом шаге добавляет к лесу ребро с минимально возможным весом), который решает поставленную задачу со сложностью $O(m \cdot \log_2 m)$.

Алгоритм Краскала можно использовать для сегментации (обработки) изображений. При этом каждый пиксель ассоциируется с вершиной графа, ребро соединяет соседние пиксели, а вес ребра w_{ij} определяется через «разницу цветов» [17–19].

В отличие от алгоритма Краскала, алгоритм Прима (алгоритм В. Ярника – Р. Прима – Э. Дейкстры, 1930 г.), или алгоритм ближайшего соседа, строит растущее дерево минимального остова. Сначала выбирается произвольная вершина графа, которая включается в остов. Затем на каждой итерации к текущему остову добавляется наиболее дешевое ребро (u, v) с минимальным весом, соединяющее какую-либо вершину u из остова с какой-либо вершиной v не из остова. Если вершине u инцидентны два ребра одинакового веса, то выбирается любое из них. Сложность алгоритма $O(V^2)$.

На рис.1.12 показаны последовательные этапы построения минимального остовного дерева (МОД) для графа G , где в качестве стартовой выбрана вершина x_1 .

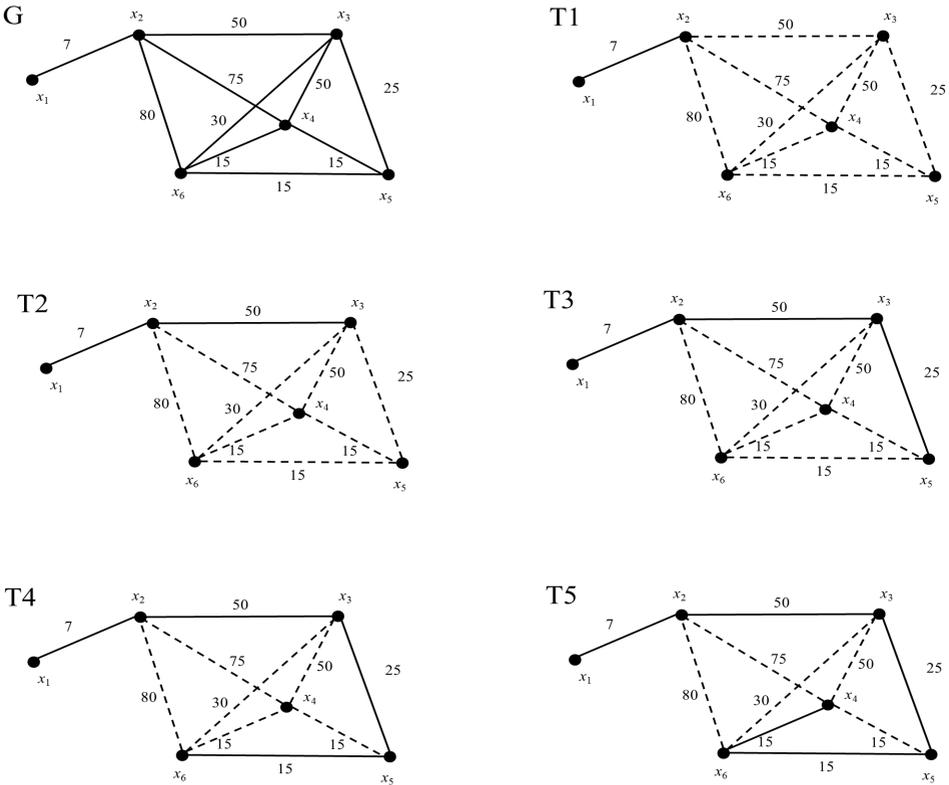


Рис. 1.12. Этапы построения МОД для графа G

Примером задачи о минимизации суммы расстояний между вершинами графа является *задача Торричелли – Ферма* [16]: в треугольнике ABC (см. рис.1.13) найти точку P , такую, чтобы сумма расстояний $S=AP+BP+CP$ была минимальной.

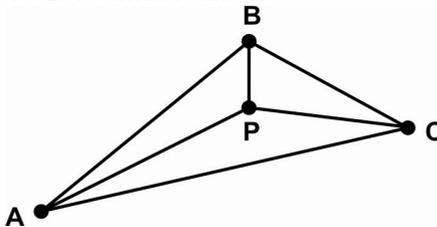


Рис. 1.13. Точка Штейнера в треугольнике

Если наибольший угол в треугольнике меньше $2\pi/3$, то точка P является единственной и лежит внутри треугольника, а все три угла при ней равны $2\pi/3$. Если, например, при вершине B угол $ABC \geq 2\pi/3$, то $S=AB+BC$.

Эта задача относится к классу задач Штейнера, когда для минимизации суммы расстояний между заданными точками на плоскости допускается введение дополнительных точек (точек Штейнера). Сеть Штейнера является деревом, а каждая дополнительная вершина имеет степень три с углами $2\pi/3$ между ребрами. В таком дереве число точек Штейнера на две меньше заданного исходного числа точек [20].

На рис.1.14 приведена одна из сетей Штейнера для вершин единичного квадрата с четырьмя исходными точками, которая содержит две дополнительные точки A и B .

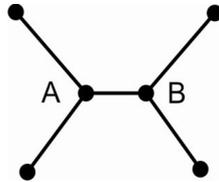


Рис. 1.14. Сеть Штейнера для $n=4$

Как следует из этого рисунка, для сети Штейнера $S=2.73$, а для алгоритма Прима – Краскала $S=3$.

При $n>3$ существует конечное число сетей Штейнера, из которых можно выбрать минимальную.

Для конструирования интегральных электронных схем, когда допускается использование укладки проводников лишь в горизонтальном и вертикальном направлении на слое схемы, минимизация длины сети сводится к нахождению прямоугольной сети Штейнера. *Эволюционное дерево Штейнера* активно используется в биологии при исследовании происхождения видов.

1.4. Информационный граф

В управляющих системах, системах обработки информации и компьютерных программах после ввода исходных данных идет их преобразование в некоторые промежуточные и затем в окончательные результаты [17].

Последовательность движения информации можно представить в виде информационного графа: его вершины – исходные данные, промежуточные и окончательные результаты обработки информации. Дуги графа указывают на взаимодействие вершин в направлении передачи информации. Пример такого ациклического графа представлен на рис. 1.15.

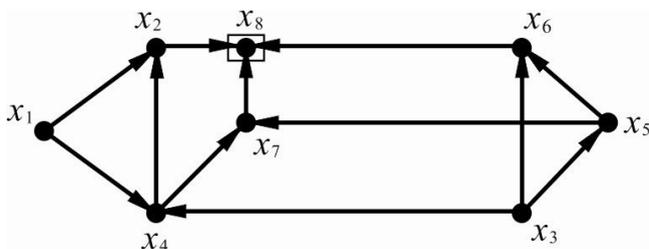


Рис. 1.15. Информационный граф

Здесь x_1, x_3 – исходные данные, x_8 – окончательный результат, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 – промежуточные данные, причем эти вершины сами являются исходными данными и результатами, в зависимости от того, по отношению к каким вершинам они рассматриваются. Так, например, вершина x_6 является исходной для x_8 и результативной для x_3 и x_5 . Будем считать, что процесс движения информации условно разбивается на такты, в результате которых формируются вершины.

Порядком вершины x_i информационного графа называется число, равное максимальной из длин путей в графе, ведущих в x_i из любого из исходных данных. Например, порядок вершин x_4 и x_5 равен 1, а x_2, x_6 и x_7 равен 2. Таким образом, промежуточные данные x_4 и x_5 образуются на первом такте, x_2, x_6, x_7 – на втором, x_8 – на третьем.

Порядком информационного графа k называется максимальное число тактов движения информации, необходимое для получения конечного результата.

Рассмотрим некоторые свойства информационного графа, представленного на рис.1.15.

1. Запишем матрицу смежности и вычислим степени этой матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^4 = 0.$$

Так как для этого графа $A^4 = 0$, то он трехтактный ($k=3$). Порядок вершин информационного графа позволяет установить, после какого такта обработки информации ту или иную информацию хранить не обязательно. Следовательно, номер такта l , после которого результат x_i не нужен, равен максимальному из порядков вершин, отвечающих отличным от нуля элементам i -той строки матрицы A^l .

Например, для x_3 порядок вершины x_6 , равен 2.

2. Сформируем матрицу Q для рис.1.15

$$Q = [q_{ij}]_i^n, \quad Q = A + A^2 + A^3,$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где ее элементы q_{ij} – число всевозможных путей из x_i в x_j . Такая матрица содержит интегральную информацию о количестве путей в орграфе. Например, $q_{18} = 3$ соответствует тому, что в графе есть всего 3 пути из x_1 в x_8 , длина которых не больше трех

$$(x_1, x_2, x_8; x_1, x_4, x_2, x_8; x_1, x_4, x_7, x_8).$$

3. Порядковые номера отличных от нуля элементов j -го столбца матрицы Q равны номерам результатов, из которых формируется результат x_j . Эта информация важна для надежности работы системы. Например, в формировании результата x_6 участвуют результаты x_3, x_5 . Таким образом, в случае потери результата x_6 , например, может быть восстановлен по x_3 и x_5 .

4. Отличные от нуля элементы матрицы Q , стоящие в i -той строке, перечисляют все результаты, при формировании которых использован результат x_i . Например, x_4 участвует в формировании результатов x_2, x_7, x_8 .

Таким образом, использование свойств матрицы смежности информационного графа повышает надежность компьютерной обработки потоков информации в системах связи, экономики и управления.

Научное издание

Владимир Николаевич БЕРЦУН

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
НА ГРАФАХ

Часть II

Редактор В.С. Сумарокова
Компьютерная верстка Т.В. Дьяковой

Подписано в печать 11.11.2013.
Формат 60x84¹/₁₆. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная.
Печ. л.5,25; усл. печ. л.4,9; уч.-изд. л.4,5. Тираж 500. Заказ

ООО «Издательство ТГУ», 634029, г. Томск, ул. Никитина, 4
ООО «Интегральный переплет», 634040, г. Томск, ул. Высоцкого, 28, стр. 1