

Томский государственный университет
Механико-математический факультет

**Научная конференция студентов
механико-математического факультета ТГУ**

Сборник конференции

24–30 апреля 2014 г.

Томск – 2014

Редакционная коллегия
Профессор, д.ф.-м.н. А.В. Старченко
Доцент, к.ф.-м.н. Н.Н. Богословский

Научная конференция студентов механико-математического факультета ТГУ: Сборник конференции (Томск, 24 – 30 апреля 2014 г.) – Томск: Томский государственный университет, 2014 г. - 89 с.

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ «АЛГЕБРА»

Гагаркина Н.Н. Некоторые свойства делимых групп	9
Гареева Д.Р. Модификации цифровой подписи эль-гамала	10
Горбунов Е.С. Эффективность различных реализаций модифицированного протокола диффи-хеллмана выработки общего ключа.....	11
Норбосамбуев Ц.Д. О суммах диагональных и обратимых обобщенных матриц.....	12
Разина А. В. Об определяемости свободной белевой группы своим относительным Голоморфом	13

СЕКЦИЯ «ГЕОМЕТРИЯ»

Бурбужук Д.Э. Гутман Т.С. Оценка размеров 2-reptiles и их поднятий в группу Гейзенберга	15
Гичёва Н. И. Задача о фигуре, содержащейся в любом треугольнике единичной ширины	16
Курганков К.Е. Технология исследования корректности метода минимизации для негладких функций	17
Щёголева А.А. Геометрическое моделирование конического передаточного механизма с произвольным углом между осями вращения деталей.....	18

СЕКЦИЯ «ГИДРОМЕХАНИКА»

Гибанов Н.С. Моделирование естественной конвекции в замкнутой треугольной полости	21
---	----

СЕКЦИЯ « МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ »

Бондаренко И.А. Решение задачи многокритериальной оптимизации методом electre	22
---	----

Дарханов А.В. Авторегрессия в данных реанализа	23
Завьялова А.В. Эффективное кодирование.....	23
Ивашенко А.О. Принятие решений на основе метода анализа иерархий.....	24
Мальшева В.Л. Решение дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.....	26
Перелевский С.С. Статистический анализ и прогнозирование динамики цен рискованных активов	27
Соболева А.А. Методы разложения функций в степенные ряды	28
Шеметова О.А. Оценивание спектральной плотности стационарного случайного процесса	29
СЕКЦИЯ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ»	
Абеяшев Д.Г. Математическое моделирование процессов самоочистки на прямоугольном участке реки с применением уравнений мелкой воды	30
Амшарюк Е.И. Кластеризация цифровых изображений методом FOREL.....	32
Давыдова Ю.А. Простейшая модель изменения зарплаты и занятости	33
Ерин С.И. Усвоение спутниковых данных ASCAT с помощью фильтра Калмана.....	34
Иванов В.Г. Сравнительный анализ некоторых численных методов решения уравнений Навье–Стокса	35

Ильин С.А. Параллельные алгоритмы для решения двумерной задачи теплопроводности с помощью схема покомпонентного расщепления	36
Карпова А.А. Приближение таблично заданных функций с помощью аппроксимационных и интерполяционных весовых сплайнов	38
Кирова В.О. Многочлены Чебышева-Эрмита и их применение в практике вычислений.....	39
Котов И.А. О решении задачи сверхзвукового вязкого обтекания затупленного тела	40
Кошкина А.А. Численное решение уравнения эллиптического типа с применением итерационных методов	41
Кротов Е.В. Распознавание штрих-кодов с помощью деформируемых шаблонов	43
Монголин А.С. Модель сражения Ланкастера	44
Осипов В. А. Применение адаптивных сеток для решения математической модели изменения концентрации ауксина	45
Помогаева С. В. Метод глобальных итераций в задаче сверхзвукового невязкого обтекания затупленных тел	47
Потоцкая А.А. Численное моделирование задачи о разрушении плотины.....	48
Семёнов Е. В. Решение обратных задач с помощью искусственных нейронных сетей	49
Ситников Г.И. Об одной схеме высокого порядка точности	51

Терентьева М. В. Исследование атмосферных процессов над аэропортом Богашево с помощью одномерной модели атмосферного пограничного слоя.....	52
Уколов Р.Ю. Исследование математических моделей морфогенеза растений.....	53
Цыденов Б.Б. Математическое моделирование процесса переработки отходов крупных животноводческих предприятий.....	55

СЕКЦИЯ « ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

Безменникова Ю. Ю. Стохастическое моделирование процессов эпидемии.....	57
Дьяченко Ю.В. Исследование точки перехода для модели AR(1).....	58
Иванюк Ю.В. Критерий точек изменения для прогнозирования стоимости акций.....	59
Кошкенбаева Г.А. Ветвящиеся процессы Беллмана – Харриса и их применение.....	60
Лысикова А.С. Особые условия существования и единственности решения СДУ в модели Кокса-Ингерсолл-росса.....	61
Пинясов О.О. Передача информации по каналам связи с помехами.....	63
Седлецкая М. М. Сравнительная характеристика мощности непараметрических критериев.....	64
Шевченко Е.А. хеджирование в модели Блэка-Шоулса при наличии транзакционных издержек.....	65

СЕКЦИЯ « ТОПОЛОГИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ »

Алипова К.А. Примеры отображений с s -усредненной характеристикой	67
Бадмаев О.О. Веер Кнастера – Куратовского	68
Ичигеев Ж.О. Изоморфная классификация пространств $C_p(X)$, заданных на пространствах $X \subset [1, \omega^{\alpha})$	69
Сухачева Е.С. Линейно упорядоченные пространства, гомеоморфные прямой Зоргенфрея	70

СЕКЦИЯ « ФИЗИЧЕСКАЯ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА »

Агафонцев М. В. Экспериментальное исследование спектров излучения пламени и изменения температуры при горении различных горючих материалов с применением методов ИК-диагностики	72
Андреюк С.М. Влияние размера образца торфа на процесс пиролиза	73
Брага К.П. Математическое моделирование смешения вязких жидкостей в закрученных потоках	75
Гук В.О. Экспериментальные исследования воспламенения древесины под воздействием убывающего потока лучистой энергии	78
Казьмина Д.И. Математическое моделирование закрученного потока вязкопластической жидкости в цилиндрическом канале	80
Матюшина М.В. Математическое моделирование турбулентного переноса дисперсной фазы в турбулентном потоке	83

Павлова О.Д. Установившееся течение жидкости Балкли-Хершеля в трубе	85
Столярчук Н.Д. Влияние пламени на регистрацию высокотемпературных объектов в ИК-диапазоне	87

СЕКЦИЯ «АЛГЕБРА»

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ДЕЛИМЫХ ГРУПП

Гагаркина Н.Н.

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. Гриншпон С.Я.

Томский государственный университет

E-mail: natali17_92@mail.ru

В теории абелевых групп важную роль играют делимые группы. В делимой группе D все «линейные» уравнения вида $nx = a \in D$, где n - натуральное число, имеют решение.

Рассмотрим системы уравнений над абелевой группой A :

$$\sum_{j \in J} n_{ij} x_j = a_i \quad (a_i \in A, i \in I), \quad (1)$$

где n_{ij} - целые числа, причем если i фиксировано, то $n_{ij} = 0$ для всех j , кроме конечного числа. Здесь $\{x_j\}_{j \in J}$ - множество неизвестных, а I, J - множества индексов произвольной мощности.

$$x_j = g_j \in A \quad (j \in J)$$

Называется решением системы (1), если система (1) удовлетворяется при замене x_j элементами g_j . Очевидно, решение можно рассматривать как элемент (\dots, g_j, \dots) прямого произведения A^J .

Для разрешимости системы (1) необходимым условием является то, что система (1) должна быть согласованной в том смысле, что если линейная комбинация левых частей уравнений обращается в нуль, то она остается равной нулю и при замене левых частей уравнений соответствующими правыми частями.

Справедлив следующий результат [1].

Теорема 1. Всякая согласованная система уравнений над группой A допускает решение в A тогда и только тогда, когда A - делимая группа.

С помощью этой теоремы, можно доказать следующий результат напоминающий по своей формулировке локальную теорему А.И. Мальцева.

Теорема 2. Система уравнений над делимой группой D разрешима в D тогда и только тогда, когда каждая её конечная подсистема имеет решение в D .

Интересна связь делимых групп с аддитивными группами полей. Получим следующий результат.

Теорема 3. Аддитивная группа поля делима тогда и только тогда, когда поле имеет характеристику 0.

Литература

1. Гачайн С. On algebraically closed abelian groups. – Publ. Math. Debrecen, 2, 1952.С. 292 – 296.

МОДИФИКАЦИИ ЦИФРОВОЙ ПОДПИСИ ЭЛЬ-ГАМАЛЯ

Гареева Д.Р.

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Росошек С.К.

Томский Государственный Университет

E-mail:djimitaiga@yandex.ru

Одной из наиболее важных задач информационной безопасности является сохранение целостности (неизменности) электронных документов, передаваемых через каналы связи. Развитие современных средств безбумажного документооборота, средств электронных платежей немислимо без развития средств доказательства подлинности и целостности документа. Таким средством является электронная цифровая подпись (ЭЦП), которая сохранила основные свойства обычной подписи.

Рассмотрим уравнение подписи Эль Гамалая:

$$H = (xa + kb) \bmod (p - 1),$$

где H -хэш, x -секретный ключ, k -сеансовый ключ.

Введем три параметра: $u=H$, $v=x$, $w=k$ и запишем уравнение подписи с этими параметрами:

$$u = (va + wb) \bmod (p - 1)$$

Далее, при всевозможных перестановках параметров, и затем снова возвращаясь от параметров к хэшу и ключам, получаем 5 модификаций уравнения подписи.

Для получения уравнений проверки модификаций, делаем перестановку соответствующих степеней и получаем уравнения проверки модификаций в порядке их записи.

Литература

1. Алферов А.П., Зубов А.Ю. Основы криптографии. М.: Гелиос АРВ, 2002.480 с.
2. Болотов А.А., Гашков С.Б., Фролов А.Б. элементарное введение в эллиптическую криптографию: Протоколы криптографии на эллиптических кривых. М.: КомКнига, 2006.280 с.

3. Баричев С.Г., Гончаров В.В., Серов Р.Е. Основы современной криптографии. М.: "Горячая линия - Телеком", 2001.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ РАЗЛИЧНЫХ РЕАЛИЗАЦИЙ МОДИФИЦИРОВАННОГО ПРОТОКОЛА ДИФФИ-ХЕЛЛМАНА ВЫРАБОТКИ ОБЩЕГО КЛЮЧА

Горбунов Е.С.

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Росошек С. К.

Томский государственный университет

E-mail: ghostman23@mail.ru

Самые распространённые криптосистемы с открытым ключом, применяемые в настоящее время основаны на таких задачах, как целочисленная факторизация (RSA) и дискретного логарифма (криптосистема Эль-Гамала). Но при создании достаточно мощного квантового компьютера эти криптосистемы окажутся бесполезными. Т.к. уже сейчас существуют квантовые алгоритмы способные за полиномиальное время решить эти задачи[1]. Поэтому современная криптография нуждается в новых, устойчивых к атакам на квантовом компьютере криптосистемах. Как раз такой криптосистемой является ВММС [3].

Если применить данную криптосистему для построения протокола Диффи-Хеллмана с некоторыми дополнительными модификациями, то решается проблема не эффективности протокола на практике, из-за атаки «человек посередине» [4]. Протокол Диффи-Хеллмана – это протокол обмена ключей, который позволяет двум сторонам достигнуть соглашения о секретном ключе по открытому каналу связи без предварительной личной встречи[2]. Модификация заключается в том, что идёт выработка общего ключа посредством некоторой криптосистемы с открытым ключом (в данном случае ВММС), затем проверка аутентичности общего ключа посредством некоторой симметричной криптосистемы(например AES) и хэш-функции.

По проведённым исследованиям(в том числе параллельным), шифрование ВММС занимает намного меньше времени, чем шифрование RSA или El-Gamal. Так же по ряду исследований, было получено, что 4 параллельных шифрования ВММС являются самым выигрышным вариантом, по сравнению с распараллеливанием степеней в шифровании или параллельными умножением матриц.

Получается, что использование ВММС в модификации Диффи-Хеллмана имеет ряд преимуществ. Во-первых, решается проблема уязвимости протокола к атаке «человек посередине». Во-вторых, шифрование RSA и Эль-Гамала уступают в скорости шифрованию ВММС. В-третьих, устойчивость модифицированного варианта к атакам на квантовом компьютере.

Литература

1. Садовничий В. А. Квантовый компьютер и квантовые вычисления. Том 2, Ижевск 1999, с. 200-248.
2. Смарт Н., Криптография. Москва, Техносфера 2005, 257 – 261.
3. Rososhek, S.K. New Practical Algebraic Public Key Cryptosystem and Some Related Algebraic and Computational Aspects. Applied Math. 2013, 4, 1043–1049.
4. Rososhek, S.K., Gorbunov E. 2013. Noncommutative analogue of Diffie-Hellman protocol in matrix ring over the residue ring. International journal of computers & technology. 2013, vol. 11, no 10, 3051-3059.

О СУММАХ ДИАГОНАЛЬНЫХ И ОБРАТИМЫХ ОБОБЩЕННЫХ МАТРИЦ

Норбосамбуев Ц.Д.

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. Крылов П.А.

Томский государственный университет

E-mail: NsTsdDts@yandex.ru

В теории колец важную роль играют различные кольца матриц. Среди них выделяются кольца обобщенных (говорят также «формальных») матриц. Кольцо эндоморфизмов разложимого в прямую сумму модуля изоморфно некоторому кольцу обобщенных матриц. Также известно, что любое кольцо с нетривиальным идемпотентом изоморфно определенному кольцу обобщенных матриц. По этим причинам изучение таких колец и их свойств представляет значительный интерес.

Далее, K_n – кольцо обобщенных матриц порядка n ,

$$K_n = \begin{pmatrix} R_1 & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & R_2 & \dots & M_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & R_n \end{pmatrix},$$

где R_i – ассоциативные кольца с единицей, $M_{ij} - R_i - R_j$ -бимодули, причем $M_{ii} = R_i$.

Кольцо называется k -хорошим, если любой его элемент есть сумма k обратимых элементов.

Получены следующие факты:

Теорема 1. Кольцо K_n является k -хорошим, если R_i – k -хорошие кольца, $i = 1, \dots, n$.

Теорема 2. Любая матрица из K_n может быть записана как сумма диагональной и обратимой матриц из K_n .

Известен результат:

Лемма 3. Пусть $M_n(R)$ – кольцо матриц над произвольным кольцом R . Если R – кольцо с единицей, $n > 1$, то любая диагональная матрица из $M_n(R)$ есть сумма двух обратимых матриц из $M_n(R)$.

Из леммы 3 и теоремы 2 вытекает следующий известный факт:

Теорема 4. Если R – кольцо с единицей, $n > 1$, то $M_n(R)$ – 3-хорошее кольцо.

Литература

1. Melvin Henriksen. Two classes of Rings generated by their units. *J. Algebra* 31 (1974), 182–193.
2. Peter Vamos. 2-good rings. *Quart. J. Math.* 56 (2005), 417–430.

ОБ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТИ СВОБОДНОЙ БЕЛЕВОЙ ГРУППЫ СВОИМ ОТНОСИТЕЛЬНЫМ ГОЛОМОРФОМ

Разина А. В.

Научный руководитель: Гриншпон С. Я.

Томский государственный университет.

E-mail: anastacie.razina@mail.ru

При исследовании свойств группы G и её группы автоморфизмов $\text{Aut}(G)$ удобно рассматривать такую алгебраическую систему, в которую изоморфно вкладывались бы как сама группа G , так и группа ее автоморфизмов $\text{Aut}(G)$. Одной из таких систем является голоморф группы G – полупрямое расширение группы G с помощью группы ее автоморфизмов, обозначаемое через $\Gamma(G)$. Для групповой операции в группе $\text{Aut}(G)$ пользуемся мультипликативной записью, а для групповых операций в G и $\Gamma(G)$ – аддитивной записью. Голоморф группы можно рассматривать как множество пар вида (a, σ) , где $a \in G$, $\sigma \in \text{Aut}(G)$. $\Gamma(G)$ является группой относительно операции сложения, введенной следующим образом:

$$\forall (a, \sigma), (b, \tau) \in \Gamma(G) : (a, \sigma) + (b, \tau) = (a + \sigma b, \sigma \tau)$$

Если голоморфы групп изоморфны, то такие группы называются голоморфно изоморфными. Говорят, что группа A определяется

своим голоморфом в некотором классе групп, если любая группа из этого класса, голоморфно изоморфная группе A , изоморфна группе A . В [5] В. Миллс показал, что всякая конечно порожденная абелева группа определяется своим голоморфом в классе всех конечно порожденных абелевых групп. Полезные факты о свойствах голоморфов абелевых групп и об определяемости групп своими голоморфами содержатся в работах [1,2,3]. Часто вместо всей группы $\text{Aut}(G)$ рассматривается некоторая подгруппа Φ группы $\text{Aut}(G)$. В этом случае естественным образом возникает понятие относительного голоморфа, обозначаемого через $\Gamma(G, \Phi)$.

Отметим, что ряд интересных результатов об относительных голоморфах абелевых групп содержится в [1]. Ранее было доказано, что свободные абелевы группы с изоморфными голоморфами изоморфны [4]. Пусть группа Φ содержит автоморфизм, переводящий любой элемент группы в противоположный. Доказаны следующие результаты:

Теорема. Если G и G' – свободные абелевы группы, каждая из которых изоморфна нормальной подгруппе относительного голоморфа другой группы, то G и G' изоморфны.

Теорема. Всякая свободная абелева группа определяется своим относительным голоморфом в классе свободных абелевых групп.

Литература

1. Беккер И. Х. О голоморфах абелевых групп без кручения//Известия высших учебных заведений. Математика. 1974. № 3. С.3–13.
2. Гриншпон С. Я. Почти голоморфно изоморфные абелевы группы.//Труды ТГУ. Вопросы математики. Вып.3. 1975. Т. 220. С. 78-84
3. Гриншпон И. Э. Нормальные подгруппы голоморфов абелевых групп и почти голоморфный изоморфизм//Фундамент. и приклад.матем. 2007. N3. С.9-16.
4. Разина А.В. Голоморфы свободных абелевых групп.//Материалы Международной молодежной конференции "Современные проблемы прикладной математики и информатики" в рамках Фестиваля науки. Томск. 19-21 сентября 2012г. С.111–112.
5. Mills W. H. Multiple holomorphs of finitely generated abelian groups // Trans. Amer.Math. Soc. 1950. Vol. 71, no. 3. P. 379 –392.

СЕКЦИЯ «ГЕОМЕТРИЯ»

ОЦЕНКА РАЗМЕРОВ 2-REPTILES И ИХ ПОДНЯТИЙ В ГРУППУ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Бурбужук Д.Э. Гутман Т.С.

Научный руководитель: доцент, к.ф.м.н. Горбатенко Е.М.

Томский государственный университет

E-mail:dolbanmaa01@gmail.com

В статье [1] исследуются 2-reptiles специального вида: притягивающие множества СИФ $\{f_1, f_2\}$, где $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-i\varphi} \cdot x$, $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (e^{-i(\theta-\varphi)} \cdot x + e^{-i\varphi})$ и пара (φ, θ) имеет один из четырех видов: $(\frac{\pi}{4}, 0)$, $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$, $(\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$. Эти пары соответствуют фрактальным множествам, называемым двойным драконом, драконом Леви и драконом Хайвея. Четвертая пара соответствует равностороннему треугольнику.

Группа Гейзенберга H - это арифметическое пространство R^3 , снабженное координатами $(x, t) = (x_1, x_2, t)$ и законом умножения $(x, t) * (x', t') = (x + x', t + t' + 2 < x, x' >)$, где $J: R^2 \rightarrow R^2$, $J(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. Группа Гейзенберга снабжается одной из неевклидовых метрик, определенных условиями

$$d_H((x, t), (x', t')) = |(x, t)^{-1} * (x', t')|_i, i = 0, 1$$

где $|(x, t)|_i = (|x|_i^2 + |t|)^{\frac{1}{2}}$, $|x|_0 = \max\{|x_1|, |x_2|\}$, $|x|_1 = |x_1| + |x_2|$ аналогичной метрике Korányi [2].

Пусть $f: C \rightarrow C$ отображение вида $f(x) = a \cdot x + b$, где $0 < |a| < 1$ и $a, b \in C$, где C - поле комплексных чисел. Отображение $F: H \rightarrow H$ называется поднятием или лифтом f , если $\pi(F(x)) = f(\pi(x))$, для любого x , где $\pi: H \rightarrow C$, $\pi(x, t) = x$. Поднятие F задается в виде $F(x, t) = (Ax + ta + b, < d, x > + ct + \tau)$, где A вещественная 2×2 -матрица, $a, b, d \in C$ и $c, \tau \in R$. Тогда F является сжимающим отображением по отношению к метрике d_H , только если выполняются соотношения $a = 0$, $d = -2A^T J b$, $c = \det A$ [2].

Мы стремимся покрыть каждую из 2^n "копий" 2-reptiles замкнутым шаром $B_i = B(p(\bar{i}), r_i)$, с центром в соответствующей неподвижной точке $p(\bar{i})$, где $\bar{i} = (i_1, \dots, i_n)$, $i_1, \dots, i_n \in \{1, 2\}$ отображения $f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_n}$. Назовем объединение E_n

этих шаров "оболочкой" глубины n , радиусы r_i выбраны так, чтобы удовлетворить соотношения $r_i = s_i \max_{j \neq i} (d_{ij} + r_j)$ для $i, j = 1, \dots, 2^n$, тогда B_i будет содержать образ оболочки, d_{ij} - расстояние между неподвижными точками $p(i), p(j)$, s_i - коэффициент сжатия отображения $f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_n}$.

Алгоритм вычисления оболочки из [3] тестируется на примере четырех рациональных 2-reptiles и их поднятий в группу Гейзенберга.

Литература

1. Ngai S., Sirvent V., Veerman P., Wang Y., On 2-Reptiles in the plane, *Geom. Dedicat.*, 2000, pp 325-344.
2. Balogh, Z. M., Hofer-Isenegger, R., Tyson, J. T.: Lifts of Lipschitz maps and horizontal fractals in the Heisenberg group. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 26 (2006), 621-651.
3. Estimating the Spatial Extent of Attractors of Iterated Function Systems D. *Canright* 1993 13pp.

ЗАДАЧА О ФИГУРЕ, СОДЕРЖАЩЕЙСЯ В ЛЮБОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ ЕДИНИЧНОЙ ШИРИНЫ

Гичёва Н. И.

Научные руководители: доцент, к. ф.-м.н. Кизбикенов К. О.
(АлтГПА), Варкентина Т. И., учитель математики КГБОУШЛИ
«Алтайский краевой педагогический лицей»

E-mail: tashka-zenit@mail.ru

Актуальность: вопрос о фигуре, которую можно поместить в любую фигуру единичной ширины, стоит длительное время и пока не получил окончательного решения. Задача возникла в начале XX века и имеет связь с теоремой о выпуклых фигурах, открытой в 1913 году австрийским математиком Эдуардом Хелли. Известно одно из её решений - теорема Вильгельма Бляшке. Однако было доказано, что найденная Бляшке фигура не является максимальной по площади. Поискам универсальной фигуры, которая содержится в каждом треугольнике ширины 1, большей по площади среди известных ранее фигур, и посвящена наша работа.

Цель: найти универсальную фигуру как можно большей площади, которая содержится в любом треугольнике единичной ширины.

Задачи. 1. Предложить новую, наибольшую по площади среди известных, универсальную фигуру, которая содержится в любом треугольнике единичной ширины.

2. Вычислить площади найденных фигур и сравнить их с площадями известных фигур, помещающихся внутри каждого треугольника единичной ширины.

3. Изучить треугольник Рело, вписанный в правильный треугольник единичной ширины.

Результаты. В ходе работы нами были найдены несколько универсальных фигур, содержащихся в произвольном треугольнике единичной ширины. Вычислены площади всех найденных фигур, проведено их сравнение с площадями ранее известных универсальных фигур. Получено, что все найденные фигуры имеют площади, большие, чем известные ранее фигуры.

Литература

1. Болтянский В. Г., Яглом И. М. Выпуклые фигуры. - М.-Л.: ГТТИ, 1951. - 343 с. - («Библиотека математического кружка», выпуск 4).
2. Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры. Опыт математического мышления / Пер. с нем. В. И. Контовта. - М.: Физматгиз, 1962. - 263 с. - («Библиотека математического кружка», выпуск 10).
3. Эдуард Хелли [Электронный ресурс] / Ю. Белецкий. // Личности. - ООО Издательский дом «Личности», 2009-2011. URL: <http://persons-info.com>.

ТЕХНОЛОГИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ КОРРЕКТНОСТИ МЕТОДА МИНИМИЗАЦИИ ДЛЯ НЕГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Курганков К.Е.

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Бухтяк М.С.

Томский государственный университет

E-mail: kastetkos@mail.ru

Отражающая поверхность рефлекторной антенны должна быть близка к параболоиду вращения. Информация же о форме реальной поверхности всегда неполна, зачастую она сводится к конечному набору точек с измеренными координатами. Приходится учитывать, что отражающая поверхность близка (в интересующем нас смысле) не к параболоиду вращения, а к иной квадрике. Зачастую речь идет о поверхности в некотором определенном семействе поверхностей, для которой сумма квадратов отклонений от конечного набора точек минимальна. Эта задача уточняется в зависимости от того, о каких отклонениях идет речь. Наилучшим вариантом было бы рас-

стояние от измеренной точки до «идеальной» поверхности вдоль нормали, опущенной на эту поверхность. В общем случае, однако, попытка эффективно измерить такое отклонение неосуществима. Для класса квадратик алгоритм отыскания расстояния по нормали известен [1,2,3], однако его реализация требует непрямых вычислительных процедур. Обычно отклонение понимают как разницу в третьих координатах между измеренной точкой (a, b, c) и точкой $(a, b, f(a, b))$ – если уравнение поверхности $z = f(x, y)$. Для семейства функций $z = f(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n)$ и «облака точек» $T_i(X_i, Y_i, Z_i)$ вычисляется целевая функция $\sum_{i=1}^n (f(X_i, Y_i, c_1, c_2, \dots, c_n) - Z_i)^2$. Исследуется минимизация данной функции методом координатного спуска (имея в виду возможность негладкости), а также эффективность метода (численной оценкой матрицы Гессе).

Литература

1. Чезаро Э. Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых. с.360-361
2. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. М.Наука. 1975
3. Uteshev A.Yu., Yashina M.V. Distance Computation from an Ellipsoid to a Linear or a Quadric Surface in \mathbb{R}^n . Lect.Notes Comput. Sci. 2007. V.4770. P.392-401

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНИЧЕСКОГО ПЕРЕДАТОЧНОГО МЕХАНИЗМА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ УГЛОМ МЕЖДУ ОСЯМИ ВРАЩЕНИЯ ДЕТАЛЕЙ

Щёголева А.А.

Научный руководитель: д.ф.м.н. Щербаков Н.Р.

Томский государственный университет

E-mail: NSchegoleva@sibmail.com

В работе [1] была построена геометрическая модель конического передаточного механизма с эксцентриково-циклоидальным зацеплением [2], для случая, когда оси вращения деталей пересекаются под прямым углом. Целью данной работы является построение

геометрической модели кинематически согласованного движения деталей конического передаточного механизма с эксцентриково-циклоидальным зацеплением [1] с произвольным углом между осями вращения деталей. На рис.1 изображены поверхности контактирующих зубьев входной и выходной детали, рассматриваемой передачи.

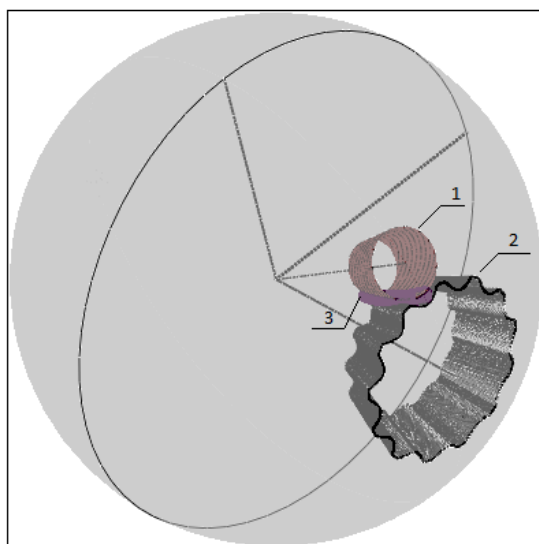


Рисунок 1 – 1 входная деталь; 2 выходная деталь;
3 зуб входной детали

Угол между осями может изменяться в пределах от 0° до 180° . При 0° передача превращается в цилиндрическую с внешним зацеплением, а при 180° - в цилиндрическую с внутренним зацеплением. Таким образом, коническая передача является более общим случаем зубчатой передачи, нежели цилиндрические. Получены уравнения поверхностей входной и выходной деталей конической зубчатой передачи, определены угла поворота деталей при работе механизма, обеспечивающие непрерывное контактирование поверхностей деталей. Эти результаты легли в основу создания анимационных файлов, иллюстрирующих работу механизма.

Литература:

1. Щёголева А.А. Геометрическое моделирование конического передаточного механизма с эксцентриково-циклоидальным зацеплением // Научная конференция студентов и школьников, посвященная 65-летию механико-

математического факультета: Сборник конференции (Томск, 22 – 25 апреля 2013 г.) – Томск: Томский Государственный университет, 2013 г. – 21 с.

2. Патент РФ 2439401. Эксцентриково-циклоидальное зацепление зубчатых профилей (варианты) / *В.В. Становской, С.М. Казакевичюс, Т.А. Ремнева, В.М. Кузнецов, А.В. Становской*. Заявлено 29.01.2010; опубл. 10.01.2012, Бюлл. № 1.

СЕКЦИЯ «ГИДРОМЕХАНИКА»

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ЗАМКНУТОЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ ПОЛОСТИ

Гибанов Н.С.

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. Шерemet М.А.

Томский государственный университет

E-mail: fire9n@mail.ru

В данной работе проводится математическое моделирование нестационарных режимов естественной конвекции в замкнутой треугольной полости с изотермическими вертикальной и горизонтальной стенками и адиабатической наклонной стенкой на основе уравнений Обербека–Буссинеска в безразмерных преобразованных переменных функция тока–завихренность:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \sqrt{\text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) + \frac{\partial \Theta}{\partial X}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\Omega, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{\text{Pr} \cdot \text{Ra}}} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right). \quad (3)$$

Здесь $\text{Pr} = \nu/a$ – число Прандтля; ν – коэффициент кинематической вязкости; a – коэффициент температуропроводности; $\text{Ra} = g\beta\Delta T L^3/\nu a$ – число Рэлея; L – длина полости; Ψ – безразмерный аналог функции тока; Ω – безразмерный аналог завихренности.

Дифференциальные уравнения (1)–(3) с соответствующими начальными и граничными условиями решены численно на основе метода конечных разностей. В результате было получено достаточно хорошее согласование полученных распределений функции тока и температуры с экспериментальными данными.

СЕКЦИЯ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ МЕТОДОМ ELECTRE

Бондаренко И.А.

Научный руководитель: ст. преп. Емельянова Т.В.

Томский государственный университет

E-mail: star_irish@bk.ru

Выбор профессии, работы, места проживания и отдыха - вот далеко не полный перечень важнейших личных задач, которые придется решать человеку на протяжении всей своей жизни. Важность и сложность проблем принятия решений обуславливает необходимость исследований, направленных на изучение того, как люди принимают решения, разработку специальных методов и компьютерных систем поддержки принятия решений (СППР) для осуществления разумного и рационального выбора. В данной работе рассмотрен один из таких методов многокритериальной оптимизации – метод ELECTRE. Метод ELECTRE состоит из 2 этапов: этап разработки индексов, этап исследования множества альтернатив.

В качестве реализации метода ELECTRE рассмотрена задача выбора оптимального депозита (суммой не более 100000 рублей) из вкладов: «Пополняй» Сбербанк России, «Оптимальный» Газпромбанк, «Доступный» УралСиб, «Активный» ВТБ; основываясь на критериях: комфортность, надежность, процентная ставка, т.е. задача выбора из 4 альтернатив и 3 критериев. В этом случае получен результат оптимизации: вклад «Пополняй» Сбербанк России. Далее рассмотрена та же задача выбора оптимального депозита при большем количестве критериев к уже имеющимся: снятие процентной ставки, штрафные санкции, начисление процента на процент, дополнительные взносы. Получено решение задачи в этом случае.

Литература

1. А. В. Лотов, И. И. Поспелова «Многокритериальные задачи принятия решений», Москва - 2008
2. Анич И., Ларичев О.И. Метод ЭЛЕКТРА и проблема ацикличности от носителей альтернатив // Автоматика и телемеханика. 1996. № 8.

АВТОРЕГРЕССИЯ В ДАННЫХ РЕАНАЛИЗА

Дарханов А.В.

Научный руководитель: Емельянова Т.В.

Томский государственный университет.

E-mail: darkhanov91@mail.ru

Реанализ – это научный метод для ведения полной истории изменения климата и погоды с течением времени. Продукт этого метода – данные реанализа. В нем скомбинированы наблюдения и численная модель, которая отображает один или несколько аспектов биосистемы, для получения смешанной оценки состояния биосистемы. Обычно данные реанализа охватывает несколько десятилетий и дает информацию обо всем мире, начиная от поверхности Земли до стратосферы. Данные реанализа широко используются в климатических исследованиях, включая мониторинг и сравнение текущих и прошедших климатических условий. Также его используют для установки причин вариаций и изменений климата, для подготовки прогнозов. Все больше и больше информацию из архивов используют в коммерческих и бизнес-приложениях страхования, энергетики, агрокультуры и водных ресурсов.[1]

Сделан прогноз динамики среднегодовой сезонной температуры по данным реанализа ERA-Int.6h 1979 – 2012 на 2013 год для территории Южной и Северной Западной Сибири. Для решения задачи использованы модели авторегрессии первого и второго порядка. [2] Задача реализована с помощью языка программирования высокого уровня Interactive Data Language 8.0 (IDL)

Литература

1. Reanalysis Intercomparison and Observations [Электронный ресурс] / URL: <http://www.reanalysis.org>
2. Дж. Бокс, Д.М. Дженкинс. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. 1969.

ЭФФЕКТИВНОЕ КОДИРОВАНИЕ

Завьялова А.В.

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Кривякова Э.Н.

Томский государственный университет

E-mail: alisa.zavjalova@rambler.ru

Эффективное кодирование представляет собой важный раздел теории вероятностей, в частности теории информации. В работе

исследуется распределение гласных букв русского языка с точки зрения теории информации. Рассматривается эффективное двоичное кодирование, которое основывается на теореме Шеннона [1] о кодировании для дискретных каналов без помех, где однозначное построение кода обеспечивается с помощью алгоритма Хаффмена [1]. Вычислена энтропия сообщений, состоящих из гласных букв русского языка [2]. Рассчитана средняя длина кодового слова и произведено сравнение с его минимально возможной длиной. Полученные результаты позволяют сделать вывод, что эффективность кодирования использованного метода не достигает своего максимального значения.

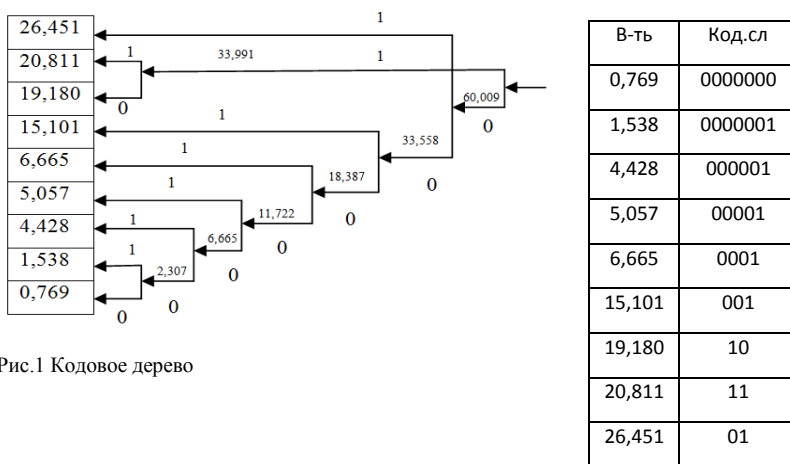


Рис.1 Кодовое дерево

Литература

1. Свирид Ю. В. Основы теории информации: Курс лекций. Ю. В. Свирид. - Мн.: БГУ, 2003. - 139 с.
2. <http://spectator.ru/entry/1041> [1 «Частота букв русского языка»]

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

Иващенко А.О.

Старший преподаватель: Емельянова Т.В.

Томский государственный университет

E-mail: anuta_i@bk.ru

При выборе решений главную роль играет анализ их последствий. Для большинства решений последствия нельзя точно рассчитать и оценить. В методах выбора из малого числа многокритери-

альных альтернатив широко используется идея построения решающего правила.

В работе рассматривается метод анализа иерархий (МАИ), разработанный американским математиком Т.Саати. Метод базируется на парных сравнениях альтернатив и критериев. Строятся матрицы парных сравнений относительной важности критериев для всех пар критериев. Для матриц вводится специальный числовой показатель «индекс согласованности», характеризующий степень доверия к полученным результатам.

Так как матрица A положительна, то по теореме Фробениуса-Перрона существует максимальное положительное собственное значение и собственный вектор. Собственное значение рассматривается как возмущение собственного значения невозмущенной матрицы. Поэтому собственный вектор матрицы A используется в качестве искомого набора весов.

В работе рассматривается задача выбора оптимального депозита. Выборка депозитов проводилась по возможности вложения 100 000 рублей сроком 1-2 года из депозитов «Управляй Online» (Сбербанк), «Оптимальный» (Газпромбанк), «Бизнес-класс» (Уралсиб) и «Комфортный-Телебанк» (ВТБ-24) по критериям: процентная ставка, надежность, срок работы и удобство.

В ходе исследования убедились, что матрицы парных сравнений имеют небольшое отклонение от совместной матрицы. Ответом является альтернатива, имеющая наибольшее значение обобщенного приоритета. Наиболее выгодным является депозит «Управляй online» Сбербанка.

Метод позволяет заменить процесс принятия сложного решения сравнением более простых критериев, по которым легко сделать заключение об их относительной важности.

Литература

1. А.В.Лотов, И.И.Поспелова Многокритериальные задачи принятия решений. – М.: Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, 2008. – 197 с.
2. Alessio Ishizaka, Philippe Nemery Multi-Criteria Decision Analysis. - WILEY, 2013. – 296 p.
3. Вклады и депозиты. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.banki.ru/products/deposits/> (Дата обращения: 17.02.2014)

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Мальшева В.Л.

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Соколов Б.В.

Томский государственный университет

E-mail: Malysheva_Viktoria@mail.ru

В работе рассмотрены теоретические вопросы, связанные с рядами и дифференциальными уравнениями. Рассмотрены примеры интегрирования дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

Решение многих дифференциальных уравнений не выражаются в элементарных функциях или квадратурах. В этих случаях пользуются приближенными методами интегрирования дифференциальных уравнений. Одним из таких методов является представления решения уравнения в виде степенного ряда, сумма конечного числа членов этого ряда будет приближенно равна искомому решению. Указанный степенной ряд находят способом неопределенных коэффициентов или способом, основанным на применении ряда Тейлора (Маклорена).

Литература

1. А. Н. Тихонов, А. В. Васильева, А. Г. Свешников. Дифференциальные уравнения, М., "Наука", 1985.
2. В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. Основы математического анализа ч. I, М., "Наука", 1971; ч. II, М., "Наука". 1973.
3. Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу, М., "Наука", 1972.
4. А. П. Прудников. Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. Интегралы и ряды, М., "Наука", 1981.
5. Г. И. Лизоркин Курс обыкновенных дифференциальных и интегральных уравнений. М.: "Наука", 1981.
6. Н. С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления для ВТУ-Зов, М., "Физматгиз", 1960.
7. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А., Дифференциальные уравнения в примерах и задачах, 2-е изд., перераб.-М.: Высш. шк., 1989.
8. А.И. Егоров Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. 2-е изд., испр. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
9. Л. С. Понтрягин Обыкновенные дифференциальные уравнения. - 4 изд. - М., Наука, 1974.
10. А. В. Васильева, Г. Н. Медведев, Н. А. Тихонов, Т. А. Уразгильдина Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЦЕН РИСКОВЫХ АКТИВОВ

Перелевский С.С.

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Пчелинцев Е.А.

Томский государственный университет

E-mail: slavaperelevskiy@mail.ru

В работе изучаются статистические методы исследования эконометрических временных рядов с целью построения их математических моделей, а также применяется подход Бокса-Дженкинса для прогнозирования динамики цен на рисковые активы на примере среднесуточных цен на нефть марки «Brent». Обработывались данные за период с 1 января 2013 по 30 июня 2013 (данные были взяты с сайта <http://www.forexpf.ru>).

В ходе решения задачи были проверены ряд статистических гипотез о ряде, в частности гипотезы о случайности, однородности, нормальности и независимости данных. При идентификации модели установлено, что наблюдения удовлетворяют следующему уравнению

$$y_t = \alpha y_{t-1} + \beta \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots, 180,$$

где α и β - параметры модели, а ε_t - белый шум. Видно, что данные описываются процессом $ARMA(1,1)$. Для оценивания параметров модели использовался метод наименьших квадратов [1]:

$$y_t = -0,32y_{t-1} + 0,66\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}.$$

Предложенная модель является адекватной исходным данным. Построен прогноз на пять шагов по времени, используя формулы из [2]. Найдены доверительные границы прогнозных значений. Численные расчеты и визуализация данных проводились с использованием пакета Matlab [3].

Литература

1. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, Т. 1. 1998.
2. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс. 2001.
3. Иглин С.П. Теория вероятностей и математическая статистика на базе MATLAB. Харьков НТУ «ХПИ». 2006.

МЕТОДЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Соболева А.А.

Научный руководитель: доцент Соколов Б.В.

Томский государственный университет

E-mail: Anna_soboleva_aleksandrovna@mail.ru

В данной работе рассматриваются методы разложения функций в степенные ряды. Теория рядов создавалась в тесной связи с теорией приближенного представления функций в виде многочленов. Важный шаг в этом направлении сделал Николай Кауфман более известный под именем Меркатора. В своем исследовании «Логарифмотехника» (1668) он впервые опубликовал разложение функции $\ln(1+x)$ в степенной ряд. Спустя несколько лет, в 1676 году

И. Ньютон публикует формулу, которую сейчас мы знаем как бином Ньютона. В 1715 году Б.Тейлор доказал, что любой функции, имеющей в точке x_0 производные всех порядков, можно сопоставить

ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$
. К. Маклорен в работе «Трактат о

флюксиях» (1742) установил, что степенной ряд, выражающий аналитическую функцию, – единственный, и это будет ряд Тейлора.

Формулы Тейлора и Маклорена являются одними из основных формул математического анализа и имеют многочисленное применение. С помощью степенных рядов можно находить приближенные значения функций и решений дифференциальных уравнений, вычислять пределы, производные, «неберущиеся» интегралы и т.д.

Для разложения элементарных функций в ряд Тейлора применяют следующие методы: непосредственное разложение; использование стандартных разложений; интегрирование и дифференцирование степенных рядов; использование алгебраических операций с рядами. На примерах показаны различные варианты применения этих методов.

Литература

1. Г.М. Фихтенгольц Курс дифференциального и интегрального исчисления, Москва «Физматлит» 2001.
2. А.П. Юшкевич История математики с древнейших времен до начала XIX столетия, Москва «Наука» 1970.
3. Л.Д.Кудрявцев «Курс математического анализа» учебник для вузов, Москва «Высшая школа»1998г.

ОЦЕНИВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Шеметова О.А.

Научный руководитель: ст. преп. каф. Емельянова Т.В.

Томский государственный университет

E-mail: Lesya_Shemetova@mail.ru

Одной из главных проблем в анализе временных рядов является прогнозирование значений стационарного процесса по его конечной реализации. Стационарные процессы широко используются в экономике, медицине, физике, механике и других областях человеческой деятельности. Одним из важных аспектов является оценка спектральной плотности процесса, представляющая собой преобразование Фурье ковариационной функции [1], [2]. В работе рассматривается задача оценивания спектральной плотности стационарного случайного процесса, задаваемого уравнением

$$dX_t = \theta X_t dt + \sigma dW_t, \quad (1)$$

где θ – параметр, W_t – винеровский процесс [3]. Используется последовательный план оценивания $(\tau_H(\xi), \theta^*)$, где

$$\tau_H(\xi) = \inf \left(t: \int_0^t a_s^2(\xi) ds \geq H \right), \quad (2)$$

$$\theta^*(\xi) = \frac{1}{H} \int_0^{\tau_H(\xi)} a_t(\xi) d\xi_t. \quad (3)$$

Он обладает следующими свойствами:

$$P_\theta(\tau_H(\xi) < \infty) = 1, -\infty < \theta < \infty,$$

$$M_\theta \theta^*(\xi) = \theta, -\infty < \theta < \infty,$$

$$M_\theta [\theta^*(\xi) - \theta]^2 \equiv \frac{1}{H}.$$

Случайная величина θ^* является гауссовской, $\mathcal{N}\left(\theta, \frac{1}{H}\right)$.

Проведено численное моделирование, при котором стохастическое дифференциальное уравнение (1) заменялось разностным, а интегралы в формулах (2)-(3) соответствующими интегральными суммами.

Литература

1. Булинский А. В. Теория случайных процессов / А. В. Булинский, А. Н. Ширяев. – М. : Физматлит, 2003. – 399 с.
2. Розанов Ю. А. Введение в теорию случайных процессов / Ю. А. Розанов. – М. : Наука, 1982. – 127 с.
3. Липцер Р. Ш. Статистика случайных процессов / Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. – М.: Наука, 1974. –696 с.

**СЕКЦИЯ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ,
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ»**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРОЦЕССОВ САМООЧИЩЕНИЯ
НА ПРЯМОУГОЛЬНОМ УЧАСТКЕ РЕКИ
С ПРИМЕНЕНИЕМ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ**

Абеляшев Д.Г.

Научный руководитель: ст. преп. Михайлов М.Д.

Томский Государственный Университет

E-mail: AbelyashevDG@Gmail.com

Рассматривается модель самоочищения участка реки, построенная на основе моделей: мелкой воды, Герберта и Стритера–Фелпса. Первые два уравнения представляют собой уравнения мелкой воды [1], а оставшиеся уравнения - модификацию комбинации моделей Герберта и Стритера-Фелпса [2]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial HU}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial HU}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(HU^2 + \frac{g}{2} H^2 \right) = 0, \\ \frac{\partial HL}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (HUL) + \frac{1}{Y} \mu_m \frac{HLX}{K_L + L} + k_1 HL = 0, \\ \frac{\partial HX}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (HUX) - \mu_m \frac{HLX}{K_L + L} + bHX = 0, \\ \frac{\partial HD}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (HUD) + k_1 HL - k_2 H(ds - D) = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

с соответствующими начальными и граничными условиями: в начальный момент времени L на рассматриваемом участке реки было равно 0, за исключением промежутка от 0.12 до 1.2 км, где L было равно L_0 . Остальные функции H, U, X и D равнялись H_0, U_0, X_0 и D_0 соответственно. На левой границе участка реки задавались: втекающий поток и постоянный уровень воды, а на правой - вытекающий поток и мягкие граничные условия.

Здесь $H(x, t)$ - уровень жидкости, измеряемый от отметки дна, $U(x, t)$ - скорость течения, $L(x, t)$ - концентрация попавшего в воду загрязнения, $X(x, t)$ - концентрация микроорганизмов на данном участке реки и $D(x, t)$ - концентрация кислорода в воде. Смысл констант, используемых в (1), пояснён в [2].

Уравнения мелкой воды – это система дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа, описывающая потоки под поверхностью жидкости. По теории мелкой воды предполагается, что вода течёт в поле действия силы тяжести, является несжимаемой, лишена внутреннего трения и трения о дно реки, а уровень жидкости H является малой величиной по сравнению с размерами участка реки.

Модификация моделей Герберта и Стритера–Фелпса предполагает уменьшение концентрации загрязнения вследствие окисления кислородом, который поступает в воду за счёт аэрации, а также вследствие бактериального окисления.

Для упрощения вычислений система решалась в поточном виде. Все потоки определены следующим образом:

$$\begin{aligned} P(x, t) &= H(x, t) \cdot U(x, t), \\ C(x, t) &= H(x, t) \cdot L(x, t), \\ R(x, t) &= H(x, t) \cdot X(x, t), \\ W(x, t) &= H(x, t) \cdot D(x, t). \end{aligned}$$

Тогда система (1) принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P^2}{H} + \frac{g}{2} H^2 \right) = 0, \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{CP}{H} \right) + \frac{1}{Y} \mu_m \frac{CR}{H \cdot K_L + C} + k_1 C = 0, \\ \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{RP}{H} \right) - \mu_m \frac{CR}{H \cdot K_L + C} + bR = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{WP}{H} \right) + k_1 C - k_2 (H \cdot ds - W) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Для решения системы (2) использовалась явная конечно-разностная схема первого порядка точности по времени, предложенная Лаксом и Фридрихсом [3]. Схема исследована на устойчивость по начальным данным, показано, что она условно устойчива:

$$\tau \leq \frac{h}{|U + \sqrt{gH}|}.$$

Для предотвращения осцилляций в разностном решении вводился метод коррекции потоков Колгана [4], суть которого во введении сглаживающего оператора определенного вида.

Результаты численных расчётов представлены в виде графиков функций, характеризующих процессы самоочищения. В качестве объекта исследования брался участок реки Селенги длиной 12 км. Сравнение полученных результатов с результатами из [5] показало совпадение времени самоочищения.

Литература

1. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. - М.: Изд. Наука, 1978. - 689 с.
2. Абеяшев Д.Г. Математическое моделирование процессов очистки водной среды с использованием моделей Моно и Стритера-Фелпса: бакалаврская работа. НИ ТГУ, Томск, 2012.
3. Toth G. Computational Magnetohydrodynamics. - Budapest: Dept. of Atomic Physics, Eotvos University, 1998. - 58 p.
4. Колган В.Н. Применение операторов сглаживания в разностных схемах высокого порядка точности. - Журн. вычислит. математики и мат. физики, 1978, т. 18, № 5. - С. 1340-1345.
5. Башенхаева Н.В. О самоочищающей способности вод реки Селенги. // Материалы 3-ей Всероссийской конференции с международным участием. Фундаментальные проблемы воды и водных ресурсов (Барнаул, 24-28 августа 2010 г.). - Барнаул: Изд. АРТ, 2010. - С. 14-17.

КЛАСТЕРИЗАЦИЯ ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ МЕТОДОМ FOREL

Амшарюк Е.И.

Научный руководитель: Федорова О.П.

Томский государственный университет

E-mail:katyshka.9305@mail.ru

Под кластерным анализом понимается множества вычислительных процедур, которые используются при решении задач классификации. В результате работы алгоритмов образуются группы “похожих” объектов или связанных признаков, описывающих объект.

Пусть каждый изучаемый объект характеризуется некоторым набором (вектором) из k признаков. Если признаки принимают вещественные значения, то каждый объект со своими значениями свойств будет отображаться в некоторую точку пространства признаков. Таким образом, объекты с почти одинаковыми значениями свойств отобразятся в близкие точки и их можно выделить в от-

дельный кластер, а с сильно различающимися значениями отобразятся далеко друг от друга[2].

В работе рассматривается алгоритм Forel [1,2], где количество кластеров при заданном радиусе определяется автоматически. Возникает вопрос выбора оптимального радиуса.

Были проведены исследования, в которых изучалась зависимость усредненной суммы квадратов расстояний между центрами кластеров

$$d_{эм} = \sum_{r=1}^q (x_r - \bar{x}_{эм})^2 / q - 1$$

и усредненной суммы квадратов рас-

стояний между объектами внутри кластеров $d_{эл} = \sum_i \sum_{x \in S_i} (x - x_i^{эм})^2 / n \cdot$

Оптимальный радиус соответствует наибольшему значению $d_{эм}$ и наименьшему значению $d_{эл}$. По результатам проведенных исследований построена модификация алгоритма Forel.

Литература

1. Загаруйко Н.Г. Алгоритмы обнаружения эмпирических закономерностей/Н.Г.Загаруйко, Г.С.Лбов, Н.В. Елкина- Новосибирск:Наука,1985-112с
2. Амшарюк Е.И. Кластеризация цифровых изображений методом Forel//Сборник научной конференции студентов и школьников, посвященный 65-летию механико-математического факультета.- Томск:Изд-во Том. Ун-та, 2013.-с. 37-38

ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ ИЗМЕНЕНИЯ ЗАРПЛАТЫ И ЗАНЯТОСТИ

Давыдова Ю.А.

Научный руководитель: ст. преп. Меркулова Н.Н.

Томский Государственный университет

kawade@mail.ru

Одна из важнейших целей деятельности математика – создание математических моделей различных процессов и явлений. В данной работе изучается простейшая математическая модель изменения зарплаты и занятости. Считаем, что на рынке труда взаимодействуют работодатели и рабочие. Рынок труда характеризуется зарплатой $p(t)$ и числом занятых $N(t)$. Это явление можно описать следующими уравнениями [1]:

$$\frac{dp}{dt} = -\alpha_1(N(t) - N_0), \alpha_1 > 0,$$

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_2(p(t) - p_0), \alpha_2 > 0.$$
$$p(0) = p_1, N(0) = N_1, t \in [0, T].$$

Проведено исследование системы несколькими способами. Найдено стационарное решение $N = N_0$, $p = p_0$. Установлен тип особой точки. Получено аналитическое решение, которое зависит от значений коэффициентов α_1, α_2 . Построены графики аналитического решения при разных значениях α_1, α_2 . Проведен анализ полученных результатов.

Литература

1. Самарский А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры.: 2-е изд., испр. / Самарский А.А., Михайлов А.П. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с. – ISBN 5-9221-0120-x

УСВОЕНИЕ СПУТНИКОВЫХ ДАННЫХ ASCAT С ПОМОЩЬЮ ФИЛЬТРА КАЛМАНА

Ерин С.И.

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Богословский Н.Н.

Томский государственный университет

E-mail: sergei.erin@mail.ru

В настоящее время проблема точности прогноза погоды достаточно актуальна. Если точность прогноза в свободной атмосфере достаточно высока, то ошибки прогноза метеовеличин в пограничном слое значительно выше. Ошибки в задании влажности почвы согласно данным Европейского центра среднесрочных прогнозов погоды [2] оказывают значительное влияние на качество краткосрочного и среднесрочного численного прогноза погоды и даже оказывают влияние на сезонные прогнозы.

Передовые прогностические центры используют усвоение спутниковых данных измерений для инициализации почвенных переменных. Данная задача решается с использованием расширенного фильтра Калмана для усвоения спутниковых данных измерений.

Этот метод активно применяется в европейском центре прогноза погоды для усвоения данных влажности почвы [1]. Фильтр Калмана требует больших вычислительных затрат, но дает более точные результаты по сравнению с методами оптимальной интерполяции. Применение фильтра Калмана так же позволяет при проведении усвоения использовать как спутниковые данные измерений, так и данные измерений температуры и влажности на высоте 2-х метров,

проводимых на наземных станциях наблюдений. Также проводится сравнение влагосодержания поверхностного слоя почвы, определяемого на метеорологических станциях и с использованием спутника.

В работе рассматривается использование спутниковых данных измерений ASCAT для инициализации начальных значений почвенных переменных. Проводится применение к спутниковым данным методов пересчета и их сравнение с прямыми измерениями влажности почвы на наземных станциях.

Показана хорошая согласованность с реальными данными прямых измерений влажности, что позволяет использовать данные спутниковых измерений влажности почвы в системах усвоения данных для численных моделей прогноза погоды

Литература

1. A simplified Extended Kalman Filter for the global operational soil moisture analysis at ECMWF : Technical report / P. de Rosnay [and oth.]. – Q. J. R. Meteorol. Soc., 2012. – URL: <http://www.ecmwf.int/publications/library/do/references/show?id=90374>
2. Mahfouf J-F. 1991. Analysis of soil moisture from near-surface parameters: A feasibility study. J. Appl. Meteor., 30, pp. 1534-1547.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

Иванов В.Г.

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. Старченко А.В.

Томский государственный университет

E-mail: ivgk26@gmail.com

Рассматривается задача о плоском течении вязкой несжимаемой жидкости с постоянными значениями плотности и коэффициента вязкости в прямоугольной области. Имеет место простейший случай изотермического движения. Верхняя стенка перемещается в своей плоскости с постоянной скоростью. Жидкость, целиком заполняющая каверну, вовлекается в движение силами вязкости.

Для численного исследования течения в каверне применяются уравнения Навье-Стокса в переменных «функция тока - вихрь».

Краевые условия формулируются только для функции тока, а для вихря записываются на основе его определения.

Получение конечно-разностного аналога исходной системы дифференциальных уравнений производится методом конечного объема.

Численное решение получено с помощью четырех методов:

1. Полученная система решается методом релаксации последовательно, сначала относительно завихренности, затем относительно функции тока.
2. Система преобразуется для совместного одновременного решения уравнений.
3. Последовательное решение методом Зверева.
4. Алгоритм SIMPLE решения уравнений Навье–Стокса в переменных «скорость - давление».

Для ускорения вычислений последовательного и совместного решений методом релаксации используется технология OpenMP.

В данной работе приведены четыре метода решений уравнений гидродинамики. Проведён их сравнительный анализ, получены численные решения, выявлены их сильные и слабые стороны.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПОМОЩЬЮ СХЕМЫ ПОКОМПОНЕНТНОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ

Ильин С.А.

Научный руководитель: профессор, д.ф.м.н. Старченко А.В.

Томский государственный университет, Томск

E-mail: sergei_i27@mail.ru

Цель работы — разработка параллельных алгоритмов для решения эволюционных уравнений в частных производных с помощью схемы покоординатного расщепления. Рассматриваются четыре подхода: алгоритм транспонирования, алгоритм Яненко, конвейерная схема, распараллеливание метода прогонки.

Постановка задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), 0 < x < A, 0 < y < B \\ u(x, y, 0) = 300^\circ K \\ \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \sigma \left(u \Big|_{x=0} - T^4 \right) \\ \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=A} = 0 \\ \lambda \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \alpha_1 \left(u \Big|_{y=0} - T \right) \\ \lambda \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=B} = \alpha_2 \left(T - u \Big|_{y=B} \right) \end{array} \right.$$

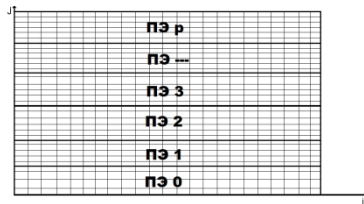


Рис.1 одномерная декомпозиция

Алгоритм Н.Н. Яненко будет осуществляться на основе принципа декомпозиции, т.е. последний узел предыдущей области совпадает с нулевым в последующей. Затем вычисляем значения решения на границе подобластей и восстанавливаем значения решения в промежуточных узлах для каждого процессора одновременно.



Рис.2 – Пример декомпозиции неизвестных при n=9, p=3

Идея конвейерной схемы прогонки заключается в том, что запуск как прямого, так и обратного хода прогонки происходит так что каждый процессор решает определенный круг задач и передает на следующий нужные данные, и это все происходит по принципу конвейера.

Применяя схему транспонирования, получаем, что направления, используемые для решения задачи методом прогонки, как бы меняются местами, т.е. x -направление становится y -направлением, а y -направление переходит в x -направление.

Рассмотрим еще один подход – это распараллеливание метода прогонки с помощью технологии OpenMP.

В работе рассмотрено несколько параллельных алгоритмов для решения двумерной задачи теплопроводности с помощью схемы покомпонентного расщепления, которые используют две парадигмы параллельного программирования.

Литература

1. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физике. Новосибирск: Наука, 1967. 197с
2. Яненко Н.Н., Коновалов А.Н., Бугров А.Н., Шустов Г.В. Об организации параллельных вычислений и распараллеливание прогонки // Численные методы механики сплошных сред - 1978 , №7, с. 136-139.
3. Старченко А.В., Берцун В.Н. Методы параллельных вычислений – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2013. – 223с.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ТАБЛИЧНО ЗАДАНЫХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ АППРОКСИМАЦИОННЫХ И ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ВЕСОВЫХ СПЛАЙНОВ

Карпова А.А.

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. Старченко А.В.

Томский государственный университет

E-mail: siriys.tomsk@gmail.com

Пусть на отрезке $[a, b]$ задано разбиение $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$.

Функция $S(x)$ называется сплайном степени n с узлами на сетке Δ , если на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ функция $S(x)$ является многочленом степени n . Разность между n и наивысшим порядком производной, непрерывной на отрезке $[a, b]$, определяет дефект сплайна.

Задача формосохраняющей аппроксимации состоит в построении достаточно гладкой функции $S(x)$ такой, чтобы она была монотонна и выпукла на участках монотонности и выпуклости исходных данных. Решение этой задачи позволит в дальнейшем использовать сплайны для решения задачи конвекции-диффузии.

В данной работе рассматривались три вида весовых сплайнов: аппроксимационный базисный и два интерполяционных, построенных через моменты и через наклоны.

В ходе численных экспериментов было установлено, что аппроксимационный сплайн имеет наименьшую погрешность, когда все весовые параметры равны единице. Гладкие функции приближаются с достаточно хорошей точностью. Но монотонность и выпуклость исходных данных для негладких функций не сохраняется. В связи с этим для использования данного сплайна в задачах конвекции-диффузии необходимы дополнительные исследования.

При весовых параметрах, равных единице, интерполяционные сплайны показывают худший результат, чем аппроксимационный. Для негладких функций значительно улучшить результат позволили два алгоритма, учитывающие монотонность и выпуклость таблично заданной функции. Для гладких данных погрешность при использовании алгоритмов не меняется.

Литература

1. Завьялов Ю. С. Методы сплайн-функций / Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко ; под ред. Н. Н. Яненко. – М. : Наука, 1980. – 352 с.
2. Квасов Б. И. Методы изогометрической аппроксимации сплайнами/Б.И. Квасов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 360с.

МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЕВА–ЭРМИТА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ПРАКТИКЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Кирова В.О.

Научный руководитель: ст. преподаватель Меркулова Н.Н.

Томский государственный университет

E-mail: Emily.bla@yandex.ru

В данной работе рассматриваются многочлены Чебышева–Эрмита в применении к численному интегрированию. Многочлены созданы великими учеными – Чебышевым и Эрмитом. Укажем вехи их биографий . Чебышев Пафнутий Львович(1821-1894) – российский математик и механик, с 1856 года член Петербургской академии наук, основатель Петербургской математической школы. Шарль Эрмит(1822-1901) – французский математик, признанный лидер математиков Франции во второй половине XIX века. Многочлены можно записать в дифференциальной форме [1]:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Из нее следует, что $H_0(x)=1$, $H_1(x)=2x$, $H_2(x)=4x^2-2$, $H_3(x)=8x^3-12x$. Изучаются следующие свойства многочленов:

- 1) $H_n(x)$ - многочлен степени n ;
- 2) при чётном n многочлен $H_n(x)$ содержит только чётные степени x , а при нечётном n - только нечётные степени x ;
- 3) коэффициент при x^n равен 2^n ;
- 4) полиномы Чебышева–Эрмита ортогональны с весом e^{-x^2} на промежутке $(-\infty, +\infty)$.

На примере интеграла $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(x) dx$ показывается, что численное решение сходится к точному на узлах-корнях многочленов Чебышева–Эрмита.

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, М.: Наука, 1966 г, 724 с.

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ СВЕРХЗВУКОВОГО ВЯЗКОГО ОБТЕКАНИЯ ЗАТУПЛЕННОГО ТЕЛА

Котов И.А.

Научный руководитель: Гольдин В.Д.

Томский государственный университет

E-mail: kia1992@bk.ru

Задача вязкого сверхзвукового обтекания затупленных тел часто встречается в природе и технике. Для решения данной задачи используется математическая модель вязкого ударного слоя в двумерной постановке.

Сложность задачи заключается в том, что основная система уравнений нелинейна, имеет переменный тип, и, кроме того, граница области определения неизвестных функций должна вычисляться в процессе решения.

В работе рассматривается создание быстрого и достаточно точного численного алгоритма решения этой задачи.

В основе данной задачи лежит система дифференциальных уравнений в частных производных, выражающая собой основные законы гидродинамики. Она решается оригинальным алгоритмом глобальных итераций с использованием численного метода И.В.Петухова [1-3], имеющего четвертый порядок аппроксимации по координате, ортогональной поверхности обтекаемого тела, и первый порядок – по продольной координате.

Разработанная схема реализована в среде Borland Delphi 7. Программа отлажена и запущена на тестовом примере. Получены результаты численного расчета и проведено сравнение с точными результатами.

Литература

1. Гиперзвуковая аэродинамика и теплообмен спускаемых космических аппаратов и планетных зондов / под ред. Г. А. Тирского. – М. : Физматлит. 2011. - 546 с.
2. Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы : сб.ст. / отв.ред. А. А. Дородницын. – М. : Наука, 1964. – 351 с.
3. Математическое моделирование. – М. : Издательство РАН, 1999.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С ПРИМЕНЕНИЕМ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ

Кошкина А.А.

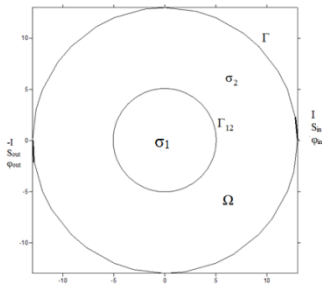
Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. Старченко А.В.

Томский государственный университет

E-mail: alisakoshkina@yandex.ru

Одним из методов медицинской визуализации является электроимпедансная томография (ЭИТ). В исследованиях ЭИТ в качестве зондирующего агента используется электрический ток, искомой величиной является распределение электрического сопротивления (импеданса) внутри биологического объекта. Реконструкция изображения ЭИТ требует решения прямой и обратной томографических задач. Прямая задача обычно решается аналитическими или численными методами и включает уравнение эллиптического типа с переменными коэффициентами и условия Неймана на границе.

Пусть дана дифференциальная задача вида



$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\sigma(x, y) \operatorname{grad} \varphi) = 0, \quad (x, y) \in \Omega \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_{air}; \\ \int_{S_{in}} \sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS = I, \\ \varphi(x, y) = \varphi_{in}, \quad (x, y) \in \Gamma_{in}; \\ \int_{S_{out}} \sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS = -I. \end{array} \right.$$

Расчетная область покрывается треугольной сеткой. Предполагается, что область разбита на множество непересекающихся треугольников. Полученная сетка определяется как триединая совокупность треугольных элементов, их вершин и ребер. Каждое ребро или принадлежит двум смежным элементам, или лежит на границе Γ расчетной области.

При построении разностной схемы рассматривается два варианта распределения функции $\sigma(x, y)$: кусочно-постоянная функция, заданная в узлах сетки или постоянная в треугольнике. При аппроксимации дифференциальной задачи используется метод конечного объема.

С помощью метода конечного объема получена устойчивая разностная схема, которая имеет погрешность аппроксимации $O(h)$ и приводит к системе линейных алгебраических уравнений. Для решения полученных СЛАУ использовались метод верхней релаксации, метод сопряженных градиентов и предобусловленный метод сопряженных градиентов с использованием метода верхней релаксации. Для метода релаксации экспериментально определен оптимальный параметр релаксации.

Расчеты проводились на сетке с различным количеством узлов от 218 до 20910. Согласно полученным результатам, можно сделать вывод, что наиболее эффективным численным методом является метод конечных объемов, где в качестве конечных объемов используются ячейки Дирихле-Воронного при аппроксимации множителя, отвечающего за электропроводимость, для варианта распределения значений в узлах сетки как среднее геометрическое.

Для определения таблицы значений численного решения, которое является искомым вектором при решении СЛАУ, оптимальным является метод сопряженных градиентов.

Литература

1. Кошкина А.А. Численное решение уравнений эллиптического типа на неструктурированных сетках / Современные проблемы математики и механики: Материалы III Всероссийской молодежной научной конференции / Под ред. Филькова. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2012 г. - С.312-316.

РАСПОЗНАВАНИЕ ШТРИХ-КОДОВ С ПОМОЩЬЮ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ШАБЛОНОВ

Кротов Е.В.

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Богословский Н.Н.

Томский государственный университет

E-mail: e.krotov@mail.ru

В настоящее время штрих-коды повсеместно вошли в повседневную человеческую жизнь. В торговле распознавание штрих-кодов осуществляется с помощью специальных лазерных сканеров. Но штрих-коды также могут принести пользу и конечному потребителю, существует множество приложений, которые на основе закодированной информации, предоставляют описание продукта, отзывы других пользователей и т.д.

Поэтому встает задача распознавания штрих-кодов с помощью более распространенных устройств, таких как смартфоны. Уже разработано множество различных алгоритмов распознавания штрих-кодов с изображений, но в большинстве своем они предъявляют значительные требования к качеству изображения.

Цель данной работы - проанализировать алгоритм Галло-Мандучи, способный корректно работать с размытыми, имеющими большой уровень шума изображениями, а также не зависящий от положения штрих-кода в кадре.

Для того чтобы распознать штрих-код на имеющемся изображении нужно решить две задачи: локализации области со штрих-кодом и декодирования. При локализации используется тот факт, что область со штрих-кодом обладает большим значением горизонтального градиента и малым значением вертикального градиента.

Это позволяет выделить штрих-код без измерения ширины полос штрих-кода. Затем в этой области выбирается линия сканирования и определяются точки пересечения этой линии с крайними полосами штрих-кода. После этого начинается декодирование. Ключевое отличие данного алгоритма в том, что он не использует бинаризацию

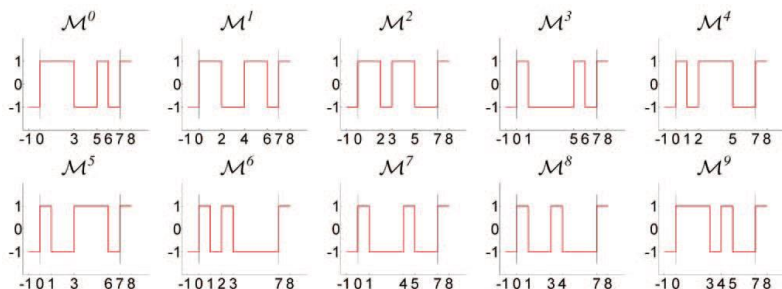


Рис. 1. Каждая цифра представляется последовательностью двух полос и двух пробелов.

при декодировании. Благодаря этому, он способен работать с зашумленными и размытыми изображениями. Для каждой цифры создается деформируемая модель $M(o, w)$, где o параметр смещения, w параметр масштабирования (значения параметров вычисляются отдельно для каждой цифры штрих-кода). Затем на сканируемой линии определяются предполагаемые позиции цифр и на основе сравнения значений предполагаемых позиций цифр и на основе сравнения значений сканируемой линии с созданными моделями определяются их значения.

Таким образом, данный алгоритм успешно распознает штрих-коды на изображениях с плохим качеством, при этом требуя только, чтобы полосы штрих-кода были наклонены не более, чем на 30 градусов и весь штрих-код присутствовал на изображении.

Литература

1. O. Gallo and R. Manduchi, "Reading 1D Barcodes with Mobile Phones Using Deformable Templates" The IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 33

МОДЕЛЬ СРАЖЕНИЯ ЛАНКАСТЕРА

Монголин А.С.

Научный руководитель: ст.преп. Михайлов М.Д.

Томский Государственный университет

E-mail: dagut@me.com

Рассматривается модель Ланкастера - простейшая модель борьбы двух противников. Состояние системы характеризуется двумя величинами x и y , где x и y – численности противостоящих армий.

Математически модель Ланкастера [1] представляет собой задачу Коши для системы однородных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = -b y, \\ \dot{y} = -a x \end{cases} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (2)$$

где a - мощность оружия армии x , b - армии y . Попросту говоря, предполагается, что каждый солдат армии x убивает за единицу времени a солдат армии y (и наоборот - каждый солдат армии y убивает b солдат армии x).

В работе проведена работа по исследованию системы: построено решение, фазовый портрет, проведена работа по проверке на устойчивость, проведены численные решения. Результаты решения представлены в виде графиков, проведён анализ результатов, приведены примеры альтернативных областей использования модели.

Литература

1. В. И. Арнольд ""Жесткие" и "мягкие" математические модели" [Электронный ресурс] : научная сеть / ООО "Мир Науки и Культуры" – Электрон. дан. – URL: <http://nature.web.ru/db/msg.html?mid=1156628&uri=arnold21.html> (дата обращения: 19.04.2014).

ПРИМЕНЕНИЕ АДАПТИВНЫХ СЕТОК ДЛЯ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИЗМЕНЕНИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ АУКСИНА

Осипов В. А.

Научный руководитель: Меркулова Н. Н.

Томский государственный университет

E-mail: Viktor456a@mail.ru

Перспективным направлением при численном решении дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих нестационарные физические процессы, является применение подвижных или адаптивных сеток. Адаптивные разностные сетки имеют сгущение узлов в областях высоких градиентов решения [1], тем самым могут существенно увеличить точность и экономичность вычислительных алгоритмов[2]. Особенно эффективны такие сетки при расчетах многомерных задач.

В данной работе рассматривается математическая модель изменения концентрации ауксина (гормон, вырабатываемый в апикаль-

ных меристемах побегов) на ранних стадиях развития растений[3]. Модель описывается системой дифференциальных уравнений параболического типа

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu(1-u) - g_1 uv, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + duv(1-v) - g_2 uv. \end{cases} \quad (1)$$

где $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$ соответственно ауксин и ингибитор.

К (1) добавляются начальные

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in [0, 10], \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

и граничные условия

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=10} = 0; \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=10} = 0. \quad (3)$$

Здесь b, g_1, D_v, D_u, d, g_2 – параметры модели, которые должны быть заданы.

Для решения поставленной задачи применяется вариационный метод построения адаптивной сетки[4], который управляет свойствами сетки:

- а) гладкость,
- б) сгущение узлов в области сильных градиентов,
- в) слабое искажение сетки за шаг по времени.

Информация о поведении решения берется из физического пространства[4].

Метод подвижных сеток сводится к решению системы уравнений (1), записанной в координатах вычислительного пространства, и нелинейного уравнения для определения узлов сетки.

Нелинейное уравнение для сетки решается с использованием итерационного процесса, на каждой итерации для определения нового положения узлов используется метод прогонки. Для определения значений u, v на новом временном слое выполняется итерационный процесс с прогонкой.

Численные расчеты проводились в области $\bar{G} = \{(x, t) | 0 \leq x \leq 10, 0 \leq t \leq 10\}$ с шагом по пространству $h=0.1$ и по времени $\tau = 0.01$. При построении адаптивной сетки рассматривались различные значения коэффициентов, управляющих ее поведением и сильно влияющих на расположение узлов сетки. В одних случаях сетка резко подстраивалась под решение, а затем оставалась неизменной. В других сетка вела себя как равномерная.

Результаты расчетов, полученные с помощью подвижных сеток, совпадают с результатами для равномерной сетки. Расчеты на равномерной сетке проводились по схеме Самарского А.А.[5] прогон-

кой с итерациями. Результаты оформлены в виде графиков и адекватно описывают физику рассматриваемого процесса, однако не носят окончательного характера.

Литература

1. Иваненко С.А. Вариационные методы построения адаптивных сеток. // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2003 г., т.43, №6, с. 830 - 844.
2. Лисейкин В.Д. Обзор методов построения структурных адаптивных сеток. // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1996 г., т.36, №1, с. 3 - 41.
3. Гельфанд Е. В. Математическое моделирование изменений концентраций ауксина на ранних этапах эмбриогенеза растений / Е. В. Гельфанд, О. В. Демин, Е. Э. Данилина // Биофизика. - 1999. - Т. 44, вып. 1. - С. 112-119.
4. Дмитриева И.С., Каниметов К.А., Саранча Д.А. Метод подвижных сеток в задаче моделирования миграции леммингов. // Численное моделирование в проблеме окружающей среды. - Фрунзе: Илим, 1989г., с. 109 -126.
5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука, 1989. - 432 с.

МЕТОД ГЛОБАЛЬНЫХ ИТЕРАЦИЙ В ЗАДАЧЕ СВЕРХЗВУКОВОГО НЕВЯЗКОГО ОБТЕКАНИЯ ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ

Помогаева С. В.

Научный руководитель: Гольдин В. Д.

Томский государственный университет

E-mail: lanapom92@gmail.com

В данной работе рассматривается задача невязкого обтекания затупленных тел при сверх- и гиперзвуковых скоростях [2]. Задача сводится к решению нелинейной системы уравнений Эйлера. К особенностям этой системы относятся переменность её типа и неопределённость границы рассматриваемой области – положения ударной волны [1,2].

Для решения задачи используется новый вариант метода глобальных итераций [2]. Для определения отхода ударной волны $f(x)$ на основе граничных условий выводится уравнение вида:

$a(x)\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + b(x)\frac{df(x)}{dx} + c(x)f(x) = d(x)$, где коэффициенты удо-

влетворяют условиям: $a(0) = 0$, $a(x) > 0$ при $0 < x < x_*$,

$a(x_*) = 0$, $a(x) < 0$ при $x > x_*$, $b(x) < 0$, $c(x) < 0$.

В области $(0, x_*)$ уравнение в узле $x = x_i$ аппроксимируется конечными разностями, используя значения неизвестной в точках x_{i+1}, x_i, x_{i-1} . При $x > x_*$ уравнение в узле $x = x_i$ аппроксимируется с использованием значений функции в точках x_{i-2}, x_{i-1}, x_i .

В окрестности точки x_* используется первый способ аппроксимации слева от нее и второй справа, что позволяет получить замкнутую систему линейных алгебраических уравнений. В результате для определения неизвестной функции в области $(0, x_*)$ необходимо применить метод прогонки. Вне этой области решение определяется по явным формулам.

Литература

1. Научная конференция студентов и школьников, посвященная 65-летию механико-математического факультета. Сборник конференций. – Томск 2013. - с. 62.
2. Гиперзвуковая аэродинамика и теплообмен спускаемых космических аппаратов и планетных зондов / под ред. Г. А. Тирского. – М. : Физматлит. 2011. - 546 с.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ О РАЗРУШЕНИИ ПЛОТИНЫ

Потоцкая А.А.

Научный руководитель: ст. преп. Михайлов М.Д.

Томский государственный университет

E-mail: bubuzyonok@yandex.ru

Рассматривается одномерное течение жидкости в горизонтальном канале. Задается сечение, в котором находится плотина и уровень воды справа и слева от нее. В заданный момент времени плотина внезапно разрушается.

Уровень воды и ее скорость описываются системой дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими начальными условиями:

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}(\bar{W})}{\partial x} = 0,$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0 = 0, \\ h(x, 0) = \begin{cases} h_1, & x \leq x_0, \\ h_0, & x \geq x_0, \end{cases} \end{cases}$$

где $\bar{W} = (h, p)^T$, $\bar{F}(\bar{W}) = \left(p, \frac{p^2}{h} + \frac{g}{2}h^2\right)^T$, $p = uh$, h - уровень воды(м) и - скорость воды(м/с), x - пространственная переменная(м), t - время(с).

Для проведения численных расчетов используется метод Мак-Кормака второго порядка точности [1]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{W}_j^{n+1} = \bar{W}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{F}_{j+1}^n - \bar{F}_j^n), \\ \bar{W}_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left(\tilde{W}_j^{n+1} + \bar{W}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{F}_j^{n+1} - \tilde{F}_{j-1}^{n+1}) \right). \end{array} \right.$$

Для сглаживания разрывов в решении используется модификация метода Бориса – Бука [2]. В ходе численного эксперимента установлено, что коэффициент сглаживания в случае мелкой воды, в отличие от определенного в [2], необходимо брать из промежутка [0.01;0.0167].

Результаты численных расчетов, представленные в виде графиков изменения скорости и уровня воды с течением времени, с коэффициентом сглаживания, взятым из этого промежутка, совпали с данными из [3].

Литература

1. Уорминг Р.Ф. Нецентральные разностные схемы второго и третьего порядка точности для решения нелинейных уравнений гиперболического типа /Р.Ф. Уорминг, П. Кутлер, Г. Ломакс//Ракетная техника и космонавтика. – 1973. - т11. - №2. - С 76-85.
2. Войнович П.А. О расчете разрывных течений газа./П.А. Войнович, А.И. Жмакин, Ф.Д. Попов, А.А. Фурсенко. – М.: 1977. – 35 с
3. Богомолов С. В. Моделирование волн на мелкой воде методом частиц/С.В. Богомолов, Е.В. Захаров, С.В. Зеркаль //Математическое моделирование. – 2002. – Т. 14. – №. 3. – С. 103-116.

РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Семёнов Е. В.

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. Старченко А.В.

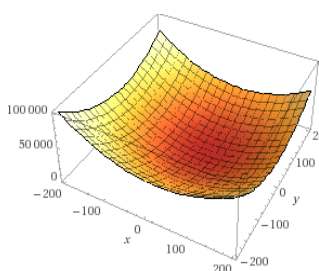
Томский государственный университет

E-mail: semenov.evgeny.92@gmail.com

Искусственные нейронные сети позволяют решать задачи, где обычные алгоритмы и методы применять затруднительно. Определяются нейронные сети, как правило, следующей формулой:

$y = F[Wx^T + b]$, где W – матрица весов, x – вектор входных данных, b – пороговое значение функции активации F , а y – вектор на выходе сети [1]. Если в качестве функции активации взять линейную функцию вида $F(x) = x$, и пороговое значение b приравнять к нулю, то формула примет следующий вид: $y = Wx^T$. Нетрудно заметить, что эта формула описывает систему линейных алгебраических уравнений относительно переменной x : $Ax = b$. Для случая, когда известны параметры A и b , существует множество методов, позволяющих отыскать значение вектора x (прямая задача). Но когда известны x и b , и требуется найти коэффициенты матрицы A (обратная задача), появляются трудности. В свою очередь, для искусственных нейронных сетей решение обратной задачи не составляет труда. Нейронные сети обучаются путем изменения коэффициентов весов, связывающих отдельные нейроны, по заданной обучающей выборке, включающей в себя векторы входных значений и соответствующие им векторы, которые ожидаются на выходе из сети. Тем самым любая искусственная нейронная сеть вида $y = Wx^T$ способна решить обратную задачу по нахождению коэффициентов матрицы СЛАУ.

В 1960 году Бернард Уидроу и студент Тед Хофф произвели некоторые модернизации персептрона и ввели в теорию нейронных сетей новое понятие "Adaline" (Adaptive Linear Neuron - адаптивный



линейный нейрон). Правило для нейронных сетей типа Adaline было названо дельта-правило. Оно основано на методе градиентного спуска, где в качестве направления градиента используется направление градиента ошибки. Сама же функция ошибки по виду является эллиптическим параболоидом вращения

$F(W) = c + Wh + WRW^T$, что позволяет говорить об однозначности решения [2, 3]. По своей структуре Adaline отличается от персептрона тем, что передаточная функция активации является непрерывной (сигмоид или линейная) и не имеет порогового ограничения, тем самым позволяя сети на выходе получать не только бинарные значения, но и значения из \mathbb{R}^n . Тем не менее, что персептрон, что сеть типа Adaline способны решать лишь линейно отделимые задачи. Конечно, спустя какое-то время на это был сделан акцент и

была введена сеть типа Madaline(Multiple Adaline) которая обходила ограничения перцептрона на линейную отделимость, на выходе такая сеть имела не один нейрон, а несколько. Эта сеть включала в себя множество Adaline подсетей. Сеть такого вида и была использована для решения обратной задачи в представленной работе.

Следует отметить, что искусственные нейронные сети поддаются распараллеливанию. Это связано с тем, что каждый нейрон каждого слоя рассчитывается отдельно от других, у него есть свой набор весов, характеризующих соединение с нейронами предыдущего слоя. Для подсчёта значения нейрона на любом слое, необходимо лишь предоставить вектор выходов нейронов предыдущего слоя каждому процессору. В таком случае мы получим ускорение работы программы на любом слое примерно во столько раз, сколько нейронов на этом слое расположено. Можно рассчитывать отдельно значение каждого элемента выхода предыдущего слоя умноженное на соответствующий ему весовой коэффициент, и после просуммировать все эти значения для каждого нейрона. Тогда каждый нейрон из m в слое получит одинаковое количество процессоров k , отсюда получим ускорение примерно в mk раз.

Литература

1. Уоссермен Ф. Нейрокомпьютерная техника. Москва: Мир, 1992.
2. Widrow B. and Stearns S.D., *Adaptive Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1985.
3. Widrow B. and Lehr M.A., "30 Years of Adaptive Neural Networks: Perceptron, Madaline, and Backpropagation," *Proceedings of the IEEE*, 78(9):1415-1442, September 1990. Also appears as a chapter in *Neural Networks: Theoretical Foundations and Analysis*, C. Lau, ed., pp.27-53, IEEE Press, 1992; and in *Artificial Neural Networks: Paradigms, Applications, and Hardware Implementation*, E. Sanchez-Sinencio and C. Lau, eds., pp.82-108, IEEE Press, 1992.

ОБ ОДНОЙ СХЕМЕ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

Ситников Г.И.

Научный руководитель: Старченко А.В.

Томский государственный университет

E-mail:SGI93@mail.ru

В атмосферном пограничном слое наиболее интенсивно протекают термодинамические процессы. Одной из актуальных задач

является построение математических моделей атмосферы с высоким порядком точности.

В 1964 году И.В. Петуховым был предложен метод численного интегрирования нелинейного уравнения параболического типа с краевыми условиями общего вида[1].

В данной работе методом Петухова решается краевая задача: уравнение теплопроводности $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$, $a = const$, с соответствующими начальными и граничными условиями. Идея метода заключается в выводе соотношений на основе формулы Симпсона и формуле Тейлора.

Для удобства от уравнения переходим к следующей системе:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial m}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{m}{a^2} \end{cases}$$

Проинтегрировав уравнения системы, используя формулы четвертого порядка точности по координате, полученные Петуховым, получаем две системы трёхточечных уравнений для Φ и m . Данные системы обладают свойством диагонального преобладания, что позволяет решать их методом прогонки.

Полученная разностная схема была апробирована на конкретной задаче и показала высокий порядок точности.

Литература

1. Петухов И.В. «Численный расчет двумерных течений в пограничном слое» // В кн. «Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений». М.: ВЦ АН СССР. 1964. С.304-324.

ИССЛЕДОВАНИЕ АТМОСФЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ НАД АЭРОПОРТОМ БОГАШЕВО С ПОМОЩЬЮ ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ АТМОСФЕРНОГО ПО- ГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Терентьева М. В.

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. Старченко А. В.

Томский государственный университет

E-mail: mariya-terenteva@mail.ru

Для авиации необходимы сведения о состоянии атмосферы от подстилающей поверхности до высот 10–12 км. На полет самолетов влияют: распределение температуры на высотах полета, вертикаль-

ный сдвиг ветра в пограничном слое, облачность, видимость, осадки, возможность обледенения.

Для интервалов времени порядка суток влияние земной поверхности ограничено значительно более тонким слоем - планетарным (или атмосферным) пограничным слоем (АПС). В связи с этим разработана одномерная микромасштабная метеорологическая модель высокого разрешения для прогноза и исследования погодных явлений в пограничном слое [1].

Построенная модель использует микрофизику «теплого дождя», предложенную Кесслером. Предполагается, что в атмосфере влага может присутствовать только в виде водяного пара, облачной и дождевой воды. Учитываются процессы аккреции, автоконверсии, конденсации и испарения. Для моделирования радиационного переноса тепла, как при ясном небе, так и при наличии облачности используется подход, основанный на делении всего спектра излучения на коротковолновую и длинноволновую составляющие. Также разработан вычислительный блок, отвечающий за прогнозирование обледенения воздушных судов с помощью метода Годске.

В качестве начальных и граничных условий для модели используются результаты расчетов по крупномасштабной модели ГУ Гидрометцентра России ПЛИАВ. Результаты модели сравниваются с расчетами трехмерной модели TSU-NM3 и данными метеостанции находящейся в аэропорту Богашево.

Литература

1. Терентьева М.В., Ситников Г.И., Старченко А.В. Использование модели однородного пограничного слоя для прогнозирования атмосферных процессов // Тезисы докладов 14-й Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. – 2013.-Томск: Из-во Институт вычислительных технологий Сибирского отделения РАН, С. 31.

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МОРФОГЕНЕЗА РАСТЕНИЙ

Уколов Р.Ю.

Научный руководитель: ст. преп. Меркулова Н.Н.

Томский государственный университет

Е-mail: roman.ukolov@bk.ru

В настоящее время имеется несколько способов моделирования разных аспектов морфогенеза растений. Однако это направление науки всё ещё находится в стадии становления. Каждая из суще-

ствующих на сегодняшний день моделей отражает лишь фрагмент широкого диапазона процессов, происходящих во время развития организма растения.

В данной работе изучается классическая модель «брюсселятор» типа «реакция-диффузия», которая имеет вид [1]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a + u^2 v - (b+1)u + D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial v}{\partial t} = bu - u^2 v + D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{cases}$$

Здесь $u(x, t)$, $v(x, t)$ – концентрации двух реагирующих веществ, D_u , D_v – их коэффициенты диффузии, a и b – параметры реакции, x, t – пространственная и временная переменные.

Рассмотрим реактор с непроницаемыми стенками длины l . Считаем, что в момент времени $t = 0$ известны начальные концентрации:

$$u(x, 0) = U_0(x), \quad v(x, 0) = V_0(x).$$

граничные условия задаются в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(l, t) = 0.$$

Допустим, что реактор имеет достаточно малый объём и время усреднения реакции по объёму за счёт диффузии много меньше характерного времени всей реакции. Тогда процесс будет протекать во всех точках объёма одинаково во времени, и будет описываться системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = a + u^2 v - (b+1)u; \\ \frac{dv}{dt} = bu - u^2 v. \end{cases}$$

Начальные условия задаются в виде:

$$\begin{cases} u(0) = 0; \\ v(0) = 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} u(0) = 1; \\ v(0) = 1. \end{cases}$$

Проведено исследование системы ОДУ: найдены стационарные решения, установлена их устойчивость и получены ограничения на параметры модели. Затем проведено численное решение системы ОДУ методами Эйлера и Рунге-Кутты 4 порядка точности[2]. Ре-

результаты расчётов оформлены в виде графиков и иллюстрируют характер поведения функций $u(t)$, $v(t)$ с течением времени в зависимости от начальных данных и параметров модели. Полученные результаты согласуются между собой и правильно отражают физику процесса.

Литература

1. Ризниченко Г. Ю. Математические модели биологических процессов : учеб. пособие / Г. Ю. Ризниченко, А. Б. Рубин – М. : Изд-во МГУ, 1993. – 302 с.
2. Меркулова Н. Н. Методы приближённых вычислений: учеб. пособие / Н. Н. Меркулова, М. Д. Михайлов – Томск: ТМЛ-Пресс, 2007. – Ч. 2.– 288 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПЕРЕРАБОТКИ ОТХОДОВ КРУПНЫХ ЖИВОТНОВОДЧЕСКИХ ПРЕДПРИЯТИЙ

Цыденов Б.Б.

Руководитель: ст. преп. Михайлов М.Д.

Томский государственный университет

E-mail: bairtsydenov@mail.ru

Рассматривается математическая модель, в основе, которой лежит модель роста популяции бактерий Моно, уравнение Колпикова описывает процесс отмирания [1]. Скорость образования биогаза выбиралась прямо пропорционально концентрации бактерий. В соответствии с вышесказанным математическая модель имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \left(\frac{\mu_1 L}{a+L} - \frac{\mu_2 b}{b+L} - p \right) X, \\ \frac{dL}{dt} = pLo - pL - \frac{\beta \mu_1}{a+L} X, \\ \frac{dV}{dt} = \gamma X(t), \end{cases} \quad (1)$$

Особенностью этой системы является отсутствие переменной V в правой части. Поэтому третье уравнение можно рассматривать независимо от остальных. Для получения точек стационарного равновесия приравняем правые части системы (1) к нулю. В результате получим 3 точки. Для линеаризации системы (1) проведем разложение правой части (1) в ряд Тейлора, и после отбрасывания одночленов с порядком выше первого получим систему первого приближения. Затем составляем соответствующее характеристическое уравнение относительно λ . В итоге приходим к тому, что рассматривается стационарное решение системы (1), соответствующее

одной из 3 точек покоя, являющееся устойчивым узлом. Для решения системы (1) применяется неявный метод Эйлера [2]. Метод заключается в последовательном уточнении значений функции в каждой точке сеточной области, с точностью ϵ . Результаты численных расчетов представлены в виде графиков. Проводится их анализ.

Литература

1. С.А.Королев, Д.В.Майков. Исследование стационарных решений и оптимизация параметров математической модели метаногенеза // Вестник ТГУ. Математика и механика. -2012.- №3.- С. 15-22.
2. В.М.Вержбицкий. Численные методы (Математический анализ, ОДУ): учебник для вузов. М.: Высшая школа, 2001. 382 с.

СЕКЦИЯ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРО- ЦЕССОВ ЭПИДЕМИИ

Безменникова Ю. Ю.

Научный руководитель: ст. преп. Емельянова Т. В.

Национальный исследовательский
Томский государственный университет
E-mail: Lapushka3@mail.ru

В настоящее время проблема сохранения и укрепления здоровья населения является актуальной. В решении этой задачи ключевыми аспектами являются предупредительные меры защиты иммунитета человека. Прогнозирование динамики распространения какого-либо заболевания является значимой частью профилактики заболеваний, позволяющей разработать и применить меры противодействия.

В настоящей работе проведено статистическое моделирование числа заболевших в зависимости:

- 1) от времени;
- 2) от температуры с временным лагом $\Delta t = 1$ и $\Delta t = 2$;
- 3) от количества заболевших на предыдущем этапе.

Проведена оценка качества прогноза. Информационной основой прогноза в рассматриваемой области служат статистические данные, предоставленные центральной районной больницей Первомайского района, о распространении гриппа и острых респираторных вирусных инфекций. Исследование направлено на разработку методов и моделей, позволяющих получать прогноз развития эпидемий и оценку эффективности различных мер противодействия их развитию с приемлемой для решения практических задач точностью.

Литература.

1. Кондратьев М. А. Разработка модели распространения инфекционных заболеваний на основе агентного подхода [Электронный ресурс]: Бесплатная библиотека авторефератов и докторских диссертаций., 2013. - URL: <http://netess.ru/3informatika/288479-1-razrabotka-modeli-rasprostraneniya-infekcionnih-zabolevaniy-osnove-agentnogo-podhoda.php>. (Дата обращения: 18.01.2014).

2. Ивченко Г. И. Математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. / Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев. - М.: Высш. шк., 1984. - 248 с.
3. Фёрст Э. Методы корреляционного и регрессионного анализа: пер. с нем. и предисловие В. М. Ивановой. / Э. Фёрст, Б. Рёнц. - М.: Финансы и статистика, 1983. - 302 с.
4. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. - М.: Мир, 1976. - 757с., ил.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧКИ ПЕРЕХОДА ДЛЯ МОДЕЛИ AR(1)

Дьяченко Ю.В.

Научный руководитель: ст. преп. Емельянова Т.В.

Томский государственный университет

E-mail: YuliaDyatchenko1994@mail.ru

В данной работе рассматривается задача обнаружения точки перехода с помощью критерия отношения правдоподобия. Анализ точек перехода, как и изучение регрессионных моделей, широко применяются во многих областях, таких как промышленный контроль качества, финансовый рынок, и медицинская диагностика.

Для нахождения точки перехода была получена критическая область для проверки гипотезы $H_0: X_t = \varphi * X_{t-1} + \omega_t, t = 1, 2, 3$ против альтернативной гипотезы

$$H_1: \exists k, \text{ т. ч. } X_t = \begin{cases} \varphi_0 * X_{t-1} + \omega_t, & t \leq k \\ \varphi_1 * X_{t-1} + \omega_t, & k < t \leq n, \varphi_0 \neq \varphi_1. \end{cases}$$

Модель AR(1) является частным случаем модели AR(p), для которой Дэвис, Хуан и Яо представили следующую теорему [1]:

Пусть процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$ определен равенством:

$$X_t = \begin{cases} \varphi_0 + \varphi_1 X_{t-1} + \dots + \varphi_p X_{t-p} + \epsilon_t, & -\infty < t \leq \tau \\ \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \dots + \alpha_p X_{t-p} + \epsilon_t, & t \leq \tau + 1. \end{cases}$$

Пусть при гипотезе H_0 (точки перехода нет, т.е. $\varphi_0 = \alpha_0, \varphi_1 = \alpha_1, \varphi_p = \alpha_p$), ошибка ϵ_t удовлетворяет условиям: $M(\epsilon_t) = 0, \sup_t M|\epsilon_t|^{4+\delta} < \infty$ для некоторого $0 < \delta \leq 1$, и ковариационная функция этого процесса $p(n) \ll n^{-(1+\epsilon)(1+\frac{\delta}{2})}$, для некоторого $\epsilon > 0$.

Тогда при гипотезе H_0 $P \left[\frac{\sigma^2 \Lambda_n - b_n(p+1)}{a_n(p+1)} \leq x \right] \rightarrow \exp(-2e^{-x/2})$, при этом $\Lambda_n = \max_{p < k < n} \Lambda_n(k)$ – статистика отношения правдоподобия, $b_n(d) = (2 \ln \ln n + (d/2) \ln \ln n - \ln \Gamma(d/2))^2 / (2 \ln \ln n)$ и $a_n(d) = \sqrt{b_n(d) / (2 \ln \ln n)}$ константы нормализации и $\Gamma(\cdot)$ – гамма функция.

В работе проведено численное моделирование в среде программирования R. Приводятся соответствующие результаты.

Литература

1. Fang Yuan. Tests for Change-Point of the AR(1) Model – May, 2013. - 40 с.

КРИТЕРИЙ ТОЧЕК ИЗМЕНЕНИЯ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СТОИМОСТИ АКЦИЙ

Иванюк Ю.В.

Научный руководитель: ст. преп. Емельянова Т.В.

Томский государственный университет.

[E-mail: yuliya.ivanyuk.90@mail.ru](mailto:yuliya.ivanyuk.90@mail.ru)

Для временных рядов структурная устойчивость имеет огромное значение, поэтому задача обнаружения точки разрыва является одной из важнейших задач в теории прогнозирования случайных процессов, в том числе и временных рядов.

Рассматривается AR(1) модель стоимости акций, которая имеет следующий вид:

$$X_t = \theta X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где X_t - стационарный процесс, описывающий цену акций в момент времени t , θ - параметр сдвига, ε_t - гауссовский белый шум.

Построим критерий отношения правдоподобия для гипотезы H_0 , о том, что процесс (1) не имеет точки перехода

$$H_0: X_t = \theta X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots$$

против альтернативы H_1

$$H_1: \exists k, \text{ такое что } X_t = \begin{cases} \theta_0 X_{t-1} + \varepsilon_t, & t \leq k \\ \theta_1 X_{t-1} + \varepsilon_t, & k < t \leq n \end{cases}$$

где $\theta_0 \neq \theta_1$ и k - момент времени, в который происходит разрыв [1].

Критическая область имеет вид: $\{\lambda_k(X) < c\}$. Постоянная c выбирается из условия $P\{\lambda_k(X) < c\} = \alpha$, где α - уровень ошибки 1-го рода, а λ_k - отношение правдоподобия, имеющее следующий вид:

$$\lambda_k = L_0(\hat{\sigma}_n^2, \hat{\theta}_0) / L_1(\hat{\sigma}_k^2, \hat{\theta}_{0k}, \hat{\theta}_{1k}) = (\hat{\sigma}_k^2 / \hat{\sigma}_n^2)^{n-1/2}.$$

Если нулевая гипотеза неверна, т.е. в некоторый момент времени k происходит разрыв, то оценка $\hat{\sigma}_n$ больше, чем $\hat{\sigma}_k$, что делает λ_k

небольшим. Для оценивания предельного распределения λ_k , используется теорема [2].

Литература

1. Fang Yuan. Tests for Change-Point of the AR(1) Model. Minnesota. 2003.
2. R. Davis, D. Huang, and Y. Yao. Testing for a Change in the Parameter Values and R. Davis, D. Huang, and Y. Yao. Testing for a Change in the Parameter Values and Order of an Autoregressive Model. The Annals of Statistics, 1995.

ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ БЕЛЛМАНА – ХАРРИСА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Кошкенбаева Г.А.

Научный руководитель: ст. преп. Емельянова Т.В.

Томский государственный университет

E-mail: Gul92shat@mail.ru

Ветвящиеся процессы описывают широкий круг явлений, связанных с размножением и превращением количества объектов (например, частиц в физике, молекулярной химии, количество особей популяции в биологии и т.п.). Ветвящиеся процессы применяются так же для моделирования численности популяции, распространения эпидемии и др.

Одно из современных направлений в исследовании популяционной динамики связано с применением теории случайных процессов, описывающих миграцию, репродукцию, гибель и превращение особей. Наиболее разработанный подход к построению моделей опирается на случайный процесс рождения и гибели, а также ветвящиеся процессы, включая процессы с взаимодействием частиц.

Одним из важных аспектов в исследовании динамики популяций является учет нестационарных условий среды обитания особей. На динамику популяций оказывают влияние разнообразные факторы, среди которых можно выделить ресурсы питания, температурный режим, емкость среды, загрязняющие и токсичные вещества. Перечисленные факторы могут быть подвержены значительным изменениям, что в свою очередь отражается на продолжительности жизни особей, численности их потомства и миграционной активности.

Задачи работы:

Исследование построенных в [3] моделей на основе изучения вспомогательных систем разностных и дифференциальных уравнений для математических ожиданий численностей популяций.

Для моделей с сезонным размножением особей, можно установить, что динамика популяций определяется репродуктивным потенциалом особей $A > 0$, вычисляемом в рамках линейной мажорирующей системы для математических ожиданий численностей популяций: для $A < A^*$ популяции вырождаются с вероятностью 1; при $A > A^*$ вероятность вырождения популяций за достаточно длительный период времени практически равна нулю, где $A^* > 1$ — некоторое пороговое значение.

Литература

1. Севастьянов Б.А. Ветвящийся процессы. – М.: Изд-во Наука главная редакция физико-математической литературы, г. Москва, 1971.
2. В.А. Ватутин, А.М. Зубков Ветвящиеся процессы. - М. : Изд-во Наука, 1989.
3. Интернет ресурс : <http://www.dissers.ru/avtoreferati-kandidatskih-dissertatsii/a8.php>

ОСОБЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СДУ В МОДЕЛЕ КОКСА-ИНГЕРСОЛЛА-РОССА

Лысикова А.С.

Томский государственный университет

E-mail: asya_lysikova@mail.ru

Рассматривается модель Кокса–Ингерсолла–Росса для процентной ставки. Исследуется доказательство теоремы существования и единственности решения стохастического дифференциального уравнения для данной модели.

Рынок государственных ценных бумаг играет большую роль в экономике страны. Распространенной практикой финансирования дефицитного бюджета и реализации государственных инвестиционных проектов стали операции на открытом рынке. Более того, покупка и продажа облигаций является основным инструментом денежно-кредитной политики центрального банка.

Благодаря активному изучению теории финансовых рынков, появилось большое число моделей и разработок по функционированию сегментов финансового рынка, в том числе и рынка государственных ценных бумаг. Одним из предметов исследования теории финансовых рынков является анализ временной структуры про-

центных ставок, т.е. анализ соотношения между доходностью государственных облигаций и сроком их погашения. Данное направление включает в себя модели, которые используются при теоретическом анализе финансовых рынков на макроэкономическом уровне, а также при практической работе на рынках срочных и производных финансовых инструментов.

В большинстве моделей процентную ставку считают постоянной, но в действительности процентная ставка зависит от момента времени, т.е. $r = r(t, T)$, где T – момент предъявления опциона.

В настоящее время наиболее популярной моделью процентной ставки является модель Кокса-Ингерсолла-Росса, когда моделирование процентной ставки имеет следующий вид

$$dr(t) = (a - br(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW_t \quad (1)$$

где $\sigma > 0, b \in \mathbb{R}$, процесс $q(t)$ -цена вида $q(t) = -\alpha\sqrt{r(t)}, \alpha \in \mathbb{R}$.

В [1] авторы рассмотрели модифицированную модель Мертона для сравнения динамики цен без рискованных займов с переменной ставкой процента и займов с риском дефолта и показали, что единственное решение стохастического уравнения может быть найдено в обоих случаях.

Заметим, что мы не можем применить к этому уравнению теорему существования и единственности решения в классическом виде, поскольку функция корень квадратный, определена лишь на \mathbb{R}_+ и не удовлетворяет условию Липшица, однако, учитывая, что корень квадратный – функция, удовлетворяющая условию Гёльдера, доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть $(W_t)_{t \geq 0}$ – стандартное броуновское движение на $[0; +\infty)$ и функции $A(t, y)$ и $B(t, y)$ удовлетворяют условию Гельдера по переменной y с показателем $1/2$. Тогда для всех $x \in \mathbb{R}_+$ существует единственный согласованный процесс с непрерывными траекториями, принимающий значения из \mathbb{R}_+ и удовлетворяющий уравнению

$$dX_t = A(t, X_t)dt + B(t, \sqrt{X_t})dW_t, X_0 = x \quad (2)$$

В случае когда на β и m наложены следующие условия:

$$1 - 2m \leq \beta \leq 0, m > \frac{1}{2}$$

нашли для нее функцию Ляпунова, что и позволило доказать данную теорему.

Литература

1. J.C.Cox, J.E. Ingersoll, Jr and S.A. Ross: "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, vol.53, NO.2-March, 1985, 385-407
2. Damien Lambertson et Bernard Lapeyre Introduction au Calcul Stochastique appliqué à la finance. Editions Ellipses, 1997, 2ème
3. Yuri Kabanov, Sergei Pergamenschchikov Two-scale Stochastic Systems - Springer, 2003.

ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ ПО КАНАЛАМ СВЯЗИ С ПОМЕХАМИ

Пинясов О.О.

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Кривякова Э.Н.

Томский государственный университет

E-mail: pinyasov_oleg@mail.ru

В системе передачи информации наиболее важными звеньями являются сообщение и канал связи, по которому сообщение принимает получатель. Пропускная способность канала – это максимальное количество передаваемой информации, которую можно восстановить со сколь угодно малой наперед заданной вероятностью ошибки.[1]

В работе оценивается количество информации, полученное при обнаружении цели, когда считается, что цель обнаружена и задана вероятность ложной тревоги (причем считается, что сигнал цели и помеха подчиняются нормальному закону распределения), то есть оценивается потеря информации с учетом действия помех при обнаружении сигнала.[2]

В качестве источника сообщения был взят летательный аппарат, находящийся на расстоянии от РЛС от 150 до 170 километров с максимальной дальностью обнаружения станцией целей в данном режиме до 300 километров.

Количество информации, полученное при обнаружении цели с вероятностью, равной 0,977, на данном расстоянии равно 3,8594 бит, а количество информации, полученное при обнаружении цели с вероятностью, равной 1, на том же расстоянии равно 3,907 бит.

Таким образом, при обнаружении цели с заданной вероятностью ложной тревоги полученное количество информации меньше, чем когда вероятность ложной тревоги отсутствует, то есть считается, что цель обнаружена достоверно.[2]

Литература

1. Свирид Ю. В. Основы теории информации – БГУ, 2003 – 139с.
2. Бакеев Д. А. Радиотехнические системы передачи информации. Изд. КамчатГТУ, 2006 – 69с.

Сравнительная характеристика мощности непараметрических критериев

Седлецкая М. М.

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Кривякова Э. Н.

Томский государственный университет

E-mail: sedletskaya_margo@mail.ru

Работа носит обзорный характер. Целью является исследование мощности критериев для проверки основной и конкурирующей гипотезы при близких альтернативах. Рассматривается простая гипотеза о нормальном распределении против простой альтернативы о гама-распределении. Трудность состоит в том, чтобы подобрать соответствующие параметры так, чтобы альтернативное распределение было близко к основному. Выбирая метод исследования, мною изучена современная литература. Подобные задачи изучаются группой новосибирских математиков под руководством доктора технических наук, профессора Б. Ю. Лемешко [1, 2].

В их работах сравниваются мощности различных критериев. Рассматривается мощность критериев при простой нулевой гипотезе и простой альтернативе, мощность при сложной нулевой гипотезе и сложной альтернативе. При этом рассматриваются именно близкие гипотезы, так как распознавание отличия в далеких законах распределения, как правило, не составляет проблем [1]. Ими рассмотрены две пары конкурирующих гипотез: первая - нормальный и логистический законы, а вторая – распределение Вейбулла и гамма-распределение.

Я планирую применить их методы и сравнить мощность критериев Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова, Андерсона-Дарлингга, хи-квадрат Пирсона.

Литература

1. Б. Лемешко, С. Лемешко, С. Постовалов. Сравнительный анализ мощности критериев согласия при близких конкурирующих гипотезах // Сибирский журнал индустриальной математики. 2008. Т. 11, № 2 (34).
2. Б. Лемешко, С. Лемешко. Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия // Измерительная техника. 2009. № 8. – С. 17-26.

ХЕДЖИРОВАНИЕ В МОДЕЛИ БЛЭКА-ШОУЛСА ПРИ НАЛИЧИИ ТРАНЗАКЦИОННЫХ ИЗДЕРЖЕК

Шевченко Е.А.

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Пчелинцев Е.А.

Томский государственный университет

E-mail: work.shea@gmail.com

В работе рассматривается задача хеджирования европейского опциона обмена при наличии транзакционных издержек в модели Блэка-Шоулса. Портфель состоит из двух рисковый активов, описывающихся уравнениями
$$\begin{cases} dS_1(t) = \sigma_1 S_1(t) dw_1(t), S_1(0) > 0 \\ dS_2(t) = \sigma_2 S_2(t) dw_2(t), S_2(0) > 0 \end{cases},$$
 где $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$ - волатильности, w_1, w_2 - независимые винеровские процессы. Транзакционные издержки постоянны и равны κ .

Для решения задачи хеджирования при наличии транзакционных издержек используется стратегия, предложенная Леландом, в которой количество акций $\psi^n = (\psi_1^n, \psi_2^n)$ в портфеле в момент времени

t определяется $\psi_k^n = \sum_{r=1}^n \psi_k^n(t_{r-1}) \chi_{(t_{r-1}, t_r)}(t)$, где n - число интервалов пересмотра,

$$t_i = \frac{i}{n}, \quad \psi_k^n(t_r) = \partial_k \hat{u}(t_r, S(t_r)) -$$

$$- \sum_{i \leq r} \partial_{kt}^2 \hat{u}(t_{i-1}, S(t_{i-1})) \Delta t - \sum_{i \leq r} \sum_{l \neq k} \partial_{kl}^2 \hat{u}(t_{i-1}, S(t_{i-1})) \Delta S_l(t_i).$$

Тогда стоимость портфеля во время t имеет вид

$$V_i^n(t) = V^n(0) + \int_0^t \psi^n(t) dS_t - \kappa \sum_{k=1}^m J_k^n,$$

где $J_k^n = \sum_{i=1}^n S_k(t_i) |\psi_k^n(t_i, S(t_i)) - \psi_k^n(t_{i-1}, S(t_{i-1}))|$.

Используя формулу Ито, найдена ошибка хеджирования

$$V^n(1) - h(1) = \sum_{k=1}^n (I_k^n + \frac{1}{2} I_k^n - \kappa J_k^n), \quad \text{где} \quad L_k^n = \int_0^1 (\psi_k^n(t) - \psi_k(t)) dS_k(t),$$

$$I_k^n(t_r) = \sum_{j=1}^m \rho_{kj} \int_0^1 (\sigma_k(t) \sigma_j(t) - \hat{\sigma}^2(t)) S_k(t) S_j(t) \partial_{kj}^2 \hat{u}(t, S(t)) dt$$

Литература

1. Kabanov, Yu.M. and Safarian, Mh.M. (1997). On Leland's strategy of option pricing with transaction costs. *Finance and Stochastics*, 1 (5) 239-250.
2. Pergamenshchikov S.M. (2009). Limit theorem for Leland's strategy.

СЕКЦИЯ «ТОПОЛОГИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

ПРИМЕРЫ ОТОБРАЖЕНИЙ С s -УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Алипова К.А.

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Малютина А.Н.

Томский Государственный Университет

E-mail: ksusha_ast@mail.ru

Объект исследования - негомеоморфные пространственные отображения, заданные на произвольной области $D \subset R^n$, $n \geq 3$, называемые далее отображениями с s -усредненной характеристикой.

В последнее десятилетие XX века и до настоящего времени интенсивно изучаются различные отображения с конечным искажением (в работах *Iwaniec T.*, *V. Šverák*, *Astala K.*, *Koskela P.*, *Martin G.*, *Onninen J.*, *Игнатъев А.А.*, *Рязанов В.И.*), естественным образом обобщающие конформные, квазиконформные и квазирегулярные отображения. Во всех этих обобщениях, как и в классической теории, модульная техника играет ключевую роль. Имея в виду такую её значимость, О. Мартио предложил следующую общую концепцию – теорию Q -гомеоморфизмов, основы которой были заложены, начиная с работы *Игнатъева А.А.* и *Рязанова В.И.*, а в работе *Мартио О.*, *Рязанова В.*, *Сребро У.* и *Якубова Э.* концепция Q -гомеоморфизмов была распространена на отображения с ветвлением, так называемые Q -отображения. Отображения с s -усредненной характеристикой – негомеоморфные пространственные отображения, введенные в работе [1], являются естественным обобщением класса отображений с искажением, ограниченным в среднем на случай произвольной области $D \subset R^n$, $n \geq 3$. В тоже время теорема об оценке модуля, доказанная нами, указывает на непосредственную связь исследуемых отображений с вышеназванными классами гомеоморфизмов.

В работе построен пример, показывающий, что класс отображений является отображением с s -усредненной характеристикой, не пуст, и не является отображением с ограниченным искажением, а также что построенное отображение f не является Q -гомеомор-

физмом, несмотря на то, что в данной работе удалось установить оценку модуля типа (2) [2], [3] с подходящей мажорантой $Q(x)$.

Литература

1. Малютина А.Н., Елизарова М.А. Дифференциальные свойства отображений с s -усредненной характеристикой. // Вестник ТГУ. Томск: Изд-во науч.-техн. лит. 2008. – № 4(8), С. 124-129.
2. Малютина А.Н. Елизарова М.А. Отображения с s -усредненной характеристикой. Определение и свойства LAP LAMBERT Academic Publishing. 121С. 7,3 (п.л.). <http://d-Publishing>, 2013. –121 с nb.info/1029918708.
3. Малютина А.Н. Поведение s -ограниченных отображений в окрестности изолированной особой точки. Исследования по математическому анализу и алгебре: Сборник статей. Томск: Томский государственный университет. 2000. Вып.2. С. 77 – 86.

ВЕЕР КНАСТЕРА – КУРАТОВСКОГО

Бадмаев О. О.

Научный руководитель: доцент, к. ф. м. н. Лазарев В. Р.

Томский государственный университет

E-mail: badmaev1995@bk.ru

Данная работа посвящена изучению топологического свойства связности, и, в частности, весьма интересного примера связного пространства удаление из которого единственной точки превращает его во вполне несвязное. Этот пример – так называемый веер Кнастера–Куратовского.

Напомним, что связным называется пространство, которое нельзя представить в виде объединения двух открытых, не пустых, непересекающихся подмножеств. Пространство называется вполне несвязным, если для каждой его точки наибольшее связное подмножество, которому она принадлежит, состоит только из этой точки.

Опишем построение веера Кнастера–Куратовского.

Веер Кнастера–Куратовского X – это подпространство плоскости R^2 с евклидовой топологией. Будем считать, что на плоскости задана, декартова система координат. Рассмотрим множество Кантора на сегменте $[0,1]$ оси абсцисс, обозначив его C_0 . Возьмем точку $c^*(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и соединим её отрезком I_c с каждой точкой c множества C_0 . Получившиеся отрезки «проредим» таким образом: если точка c – точка первого рода, то на отрезке I_c рассмотрим подмножество A_c , состоящее из точек с рациональными ординатами; если же точка c – точка второго рода, то на отрезке I_c рассмотрим подмножество A_c , состоящее из точек с иррациональными ординатами.

Веер Кнастера–Куратовского $X = \cup\{A_c | c \in C_0\}$.

Как уже упоминалось, справедлива

Теорема. Пространство X связно. Пространство $X \setminus \{c^*\}$ – вполне несвязно.

Литература

1. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.:Наука, 1974. 424 с.

ИЗОМОРФНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ $C_p(X)$, ЗАДАННЫХ НА ПРОСТРАНСТВАХ $X \subset [1, \omega^\omega)$

Ичигеев Ж.О.

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Хмылева Т.Е.

Томский государственный университет

E-mail: ichigeev_jo@mail.ru

Изучение отношения l -эквивалентности пространств функций является важным инструментом в описании свойств пространств, на которых они заданы. Существуют различные примеры как линейно гомеоморфных пар пространств функций, так и не эквивалентных в этом отношении пространств. Для пространств X и Y , одно из которых локально компактно, а второе не является таковым, известно, что не существует линейного гомеоморфизма между $C_p(X)$ и $C_p(Y)$. В случае не локально компактного подпространства $X \subset [1, \alpha)$ пространства $C_p(X)$ и $C_p(\mathbb{Q})$ не являются l -эквивалентными (\mathbb{Q} - множество рациональных точек в естественной топологии). В данной работе описаны классы подпространств X отрезка ординалов $[1, \omega^\omega)$, для которых пространства функций $C_p(X)$ линейно гомеоморфны. Классификация проведена с точки зрения свойств множеств предельных точек пространства X , т.е. производных множеств $X^{(n)}$.

Теорема. Для всякого пространства $X \subset [1, \omega^\omega)$ существует число n такое, что пространство $C_p(X)$ линейно гомеоморфно пространству $s(c_0(\underbrace{s(\dots)}_n)))$ или пространству $c_0(s(c_0(\underbrace{s(\dots)}_n)))$, или их произведению. Под обозначением $A(B)$ понимается произведение $(B \times B \times \dots)_A$.

Литература

1. Cembranos P. The Banach spaces $l_\infty(c_0)$ and $c_0(l_\infty)$ are not isomorphic / P. Cembranos, J. Mendoza. - Journal of Mathematical Analysis and Applications, 367 (2), 2010. - pp. 461-463. - (ISSN 0022-247X)
2. Lindenstrauss J. Classical Banach Spaces I / J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. - Ergeb. Math. Grenzgeb., vol. 92, Springer-Verlag, 1977.

ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА, ГОМЕОМОРФНЫЕ ПРЯМОЙ ЗОРГЕНФРЕЯ

Сухачева Е.С.

Научный руководитель: доцент, к. ф. - м. н. Хмылева Т.Е.

Томский государственный университет

E-mail: sirius9113@mail.ru

Множество вещественных чисел с заданной на нем естественной топологией обозначается через \mathbb{R} . Символ S обозначает прямую Зоргенфрея, представляющую собой множество вещественных чисел с топологией, порожденной базой $\{(a,b]: a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Пространство S - это пример сепарабельного пространства, не имеющего счетной базы, все компактные подмножества которого не более чем счетны [1]. Для подмножества $A \subset \mathbb{R}$ рассмотрим на множестве вещественных чисел топологию τ , порожденную базой, состоящей из множеств вида $[a, a+\varepsilon)$, если $a \in A$ и $(x-\varepsilon, x]$, если $x \in \mathbb{R} \setminus A$. Множество вещественных чисел, наделенное топологией τ , обозначим S_A .

Известно, что если $F \subset S$ замкнутое подмножество без изолированных точек, то F гомеоморфно S [2]. Однако, пространство S не гомеоморфно множеству иррациональных чисел T , наделенных топологией Зоргенфрея [3]. В данной работе мы рассматриваем гомеоморфизм пространств S и S_F , где $F \subset S$.

Теорема 1. Если F замкнутое подмножество в пространстве \mathbb{R} , то пространство S_F гомеоморфно пространству S .

Теорема 2. Пусть A подмножество пространства \mathbb{R} , замыкание которого счетно. Тогда пространство S_A и S гомеоморфны.

Заметим, что если на множестве A задать естественную топологию, то теоремы, аналогичные теоремам 1-2 можно найти в работе [4].

Литература

1. Энгелькинг Р. Общая топология. –М.:Мир, 1986. -752 с.
2. Burke D.K., Moore J.T., Subspaces of the Sorgenfrey Line. Topoloigy and its Applications. Vol.90, 1998, pag. 57-68.
3. Eric K. Van Douwen, Retracts of the Sorgenfrey line. Compositio Mathematica, Vol. 38, Fasc. 2, 1979, pag. 155-161.
4. Chatyrko V.A., Hattory Y., A poset of topologies on the set of real numbers. Comment.Math.Univ.Carolin. 54,2(2013), pag. 189-196.

СЕКЦИЯ «ФИЗИЧЕСКАЯ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА»

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРОВ ИЗЛУЧЕНИЯ ПЛАМЕНИ И ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ ГОРЕНИИ РАЗЛИЧНЫХ ГОРЮЧИХ МАТЕРИАЛОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ ИК-ДИАГНОСТИКИ

Агафонцев М. В.

Научный руководитель: Лобода Е.Л.

Томский государственный университет

E-mail: kim75mva@gmail.com

При исследовании процессов горения значительную трудность представляет получение распределения термодинамических температур в пламени. Применение традиционных контактных методов измерений температуры связано с техническими трудностями, заключающимися в использовании термопар, которые вносят возмущения в исследуемую среду. Следует отметить, что использование микротермопар с диаметром спая не более 25 мкм, которые вносят минимальные возмущения, возможно только в лабораторных условиях, и, тем не менее, не обеспечивает хорошего пространственного разрешения результатов измерений. Применение современных методов ИК-диагностики позволяет отказаться от использования большого количества термопар и дает возможность получать хорошее разрешение по пространству и времени. Однако, использование этих методов сопряжено с необходимостью решения исследователем ряда задач, а именно: правильно выбрать спектральный интервал исследования, определить коэффициент излучения пламени, оценить влияние излучения других объектов и отражение излучения от них.

В работе представлены результаты экспериментальных исследований спектральных характеристик пламени, образующегося при горении горючих материалов, с применением методов ИК-диагностики. Приводится анализ спектра излучения пламени следующих горючих материалов: спирт, пропан-бутановая смесь, бензин, керосин, растительные горючие материалы (березовые, сосно-

вые и кедровые дрова, опад хвои сосны, кедр и полевые горючие материалы). На основании анализа спектра излучения пламени делается вывод о выборе спектральных интервалов для решения некоторых практических задач (измерение полей температуры в пламени и для регистрации высокотемпературных объектов, экранированных слоем пламени).

Также представлен анализ и частотный спектр изменения во времени температуры в пламени, где отчетливо выделяются характерные частоты для некоторых типов горючих материалов, которые не зависят ни от размера очага горения, ни от массы горючих материалов, а связаны с физическими процессами, протекающими в пламени, в том числе с турбулентностью течения в пламени.

ВЛИЯНИЕ РАЗМЕРА ОБРАЗЦА ТОРФА НА ПРОЦЕСС ПИРОЛИЗА

Андреюк С.М.

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Фильков А.И.;

зав. лаб., к.т.н. Кузнецов В.Т.

Томский государственный университет

E-mail: 8sergei91@mail.ru

Введение. Математическое моделирование возникновения и распространения природных пожаров в настоящее время сдерживается отсутствием полноценных информационных баз данных о параметрах математических моделей (например, термокинетических постоянных), усложнение которых идет в направлении все более полного и детального учета структуры и многообразия физико-химических превращений, использования сопряженных и двух- и трехмерных постановок задач. Стандартные средства исследования кинетических процессов, такие как термогравиметрические анализаторы, позволяют изучать образцы порядка 10 мг, при этом образцы растирают в порошок. Такая подготовка образцов нарушает структуру и представительность некоторых типов природных горючих материалов. Так, например, для торфа, который является сложной неоднородной смесью более чем ста органических соединений, притом непостоянного состава, это может повлиять на результат исследования. Кроме того, известно [1], что масштабные эффекты оказывают влияние также и на характеристики горения. В связи с этим, целью данной работы стало изучение влияния размера образца одного из

типов природных горючих материалов (в нашем случае торфа) на кинетику пиролиза.

Методы и результаты. Т.к. стандартные средства не позволяют исследовать образцы различного размера и в естественном состоянии, т.к. ограничены размером тигеля, то в работе использовалась специальная установка [2]. Для исследования процесса пиролиза были взяты торфяная залежь верхового типа, собранная в районе Томской области. Экспериментальные исследования процесса пиролиза проводились в изотермических условиях в кислороде воздуха при температурах 200, 220 и 240 °С. Перед тем, как исследовать пиролиз, все образцы предварительно высушивались при температуре 100 °С до абсолютно сухого состояния с целью удаления свободной воды. Масса образцов, используемых для исследования процесса пиролиза составляла $1-3 \pm 0.02$ г (сухой образец). Образцы представляли собой кубики со сторонами 10, 15 и 20 мм.

На первом этапе исследовалась разница температур печи и образцов при заданной температуре печи. Для этого в середину образца торфа внедрялась термопара. Вторая термопара располагалась на расстоянии 10 мм сбоку от образца.

Из анализа кривых следует, что для образца со стороной 10 мм максимальная разница между температурой образца и печи после 40 с не превышает 5 %. При этом, для образцов со стороной 20 мм, температуры выравниваются только через 5 мин.

На втором этапе исследовалось влияние выхода температуры образца на стационарный режим при различных температурах в печи. Анализ результатов показал, что минимальное время около 2 минут составляет для образцов со стороной 10 мм.

Заключение. В результате проделанной работы были получены зависимости температуры образцов и печи от размера образцов и температуры нагрева.

Литература

1. Morvan D. Physical Phenomena and Length Scales Governing the Behaviour of Wildfires: A Case for Physical Modelling // (2011) Fire Technology, 47 (2), pp. 437-460.
2. А.И. Фильков, В.Т. Кузнецов, Д.В. Новиков, О.В. Шарыпов, В. Лерой, Д. Кансильери, Э. Леони, А. Симеони, Г. Рейн Кинетические исследования процесса пиролиза торфа // Горение твердого топлива: Доклады VIII Всерос. конф. с междунар. участием, Новосибирск, 13-16 ноября 2012 г. – Новосибирск: Изд-во Института теплофизики СО РАН, 2012. – 115 докладов. – С. 99.1-99.8. (электронная публикация ISBN 978-5-89017-032-3).

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СМЕШЕНИЯ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ В ЗАКРУЧЕННЫХ ПОТОКАХ

Брага К.П.

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. Матвиенко О.В.

Томский государственный университет

E-mail: brkr@sibmail.com

В работе рассматриваются результаты исследования структуры течения и смешения двух коаксиальных закрученных потоков вязкой жидкости. Для описания поля течения и смешения потоков следующие допущения. Потоки жидкости предполагается стационарным, осесимметричными, турбулентными, закрученными по закону вращения твердого тела на входе. При моделировании поля течения используются уравнения Рейнольдса, записанные относительно осредненных по времени осевой u , радиальной v , тангенциальной w составляющих скорости, а также давления p . В настоящей работе исследование характеристик турбулентности осуществлялось с использованием двухпараметрической $k - \varepsilon$ модели, адаптированной Джонсом и Лаундером для расчета течений с низкими числами Рейнольдса.

В работе представлены результаты расчетов, выполненные для потоков имеющих среднерасходные скорости $u_1 = 2$ м/с и $u_2 = 0,2$ м/с., представлены линии тока, изолинии постоянных значений турбулентной кинетической энергии, температуры и концентрации. Оба потока, как внешний так и внутренний являются незакрученными.

Анализ линий тока в камере смешения позволяет сделать следующие выводы. На начальном участке течения наблюдается расширение внутреннего потока. Этот процесс связан с тем, что внутренний поток имеет большую скорость (скорость внутреннего потока в 10 раз больше скорости внешнего). Перепад давления в радиальном направлении приводит к оттоку жидкости из внешнего потока к центру. Вниз по течению примерно на расстоянии двух диаметров камеры внешний поток начинает отесняться внутренним и смещается к стенке. Максимум турбулентной кинетической энергии образуется на границе раздела струй, где перепад скорости и динамические напряжения имеют высокие значения. Вниз по потоку наблюдается реламинизация.

Температура внутренней струе изменяется слабо, а внешней - меняется значительно, причем во внешней струе формируется два пограничных слоя. Наличие внутреннего пограничного слоя связано с нагревом внутренним потоком. Внешний пограничный слой формируется за счет охлаждения потока холодной стенкой. Показаны изолинии концентрации. Поля концентрации характеризуются наличием слоя смешения, локализация которого совпадает с внутренним тепловым пограничным слоем.

Слабая закрутка практически не изменяет картину течения. Однако с увеличением закрутки в центральной приосевой области из-за центробежного эффекта появляются зоны с разряжением или меньшим статическим давлением. Вследствие этого при умеренной закрутке потока формируются провалы в поперечном профиле осевой составляющей вектора скорости, а в случае сильной закрутки возникают обратные токи.

Закрутка потока влияет не только на структуру течения, но и на характеристики турбулентности. Один из механизмов такого влияния достаточно очевиден. Закрутка потока вызывает значительные градиенты скорости потока и тем самым генерирует турбулентные напряжения. В закрученном потоке влияние центробежной силы на структуру потока по своему характеру аналогично действию температурной стратификации в поле силы тяжести. В этом случае в зависимости от характера радиального распределения компонент скорости кинетическая энергия может переходить в потенциальную энергию, или наоборот. При активном характере воздействия центробежная сила способствует усилению турбулентных пульсаций, при - консервативном приводит к их подавлению. Наиболее заметно это в потоках с умеренной закруткой потока. В слабо закрученных потоках это явление незаметно вследствие малости самого воздействия. В сильно закрученных потоках на первую роль выдвигается первый механизм влияния закрутки на турбулентность, связанный с появлением значительных градиентов скорости осредненного течения и, как следствие этого, ростом турбулентных напряжений. В работе представлены линии тока в случае сильной закрутки как внутреннего, так и внешнего потоков. Сильная закрутка внутреннего потока, как уже отмечалось, приводит к формированию приосевой зоны рециркуляционных течений, максимальная ширина которой совпадает с начальным радиусом внутренней струи. Совместная закрутка потоков приводит к увеличению рециркуляционной зоны как в осевом, так и в радиальном направлении. При этом в зону рециркуляции попадает масса жидкости из внешне-

го потока. Если два потока закручены в противоположные стороны, то размеры рециркуляционной зоны существенно ниже. В случае если закручен только внешний поток, картина течения имеет иной вид, отчетливо видно, как сильно закрученный внешний поток оттесняется к стенке, а в зоне разделения двух потоков образуется система вихрей, которые способствуют перемешиванию.

Слабая закрутка внешнего потока ($Ro_2 < 8$) приводит к ухудшению качества смешения. Это связано с оттеснением внешнего потока к стенке и уменьшения слоя смешения. Когда $Ro_2 > 8$, в потоке образуется периферийная зона возвратных течений, в которую вовлечены массы жидкости из обоих потоков. Качество смешений резко улучшается. При слабой закрутке внутреннего потока $Ro_2 \leq 8$ зависимость Q_m от интенсивности закрутки внешнего потока качественно сохраняет свой вид: слабая закрутка внешнего потока приводит к увеличению Q_m , а сильная - к уменьшению. Отметим, что качество смешения двух слабо закрученных потоков оказывается худшим, чем в незакрученном. Это объясняется процессами реламинизации и, соответственно, уменьшения турбулентного диффузионного переноса. В случае сильной закрутки внутреннего потока $Ro_1 > 8$, когда в приосевой области возникает зона возвратных течений, зависимость $Q_m = Q_m(Ro_2)$ характеризуется наличием максимума. Величина этого максимума уменьшается с увеличением закрутки внутреннего потока, что свидетельствует об улучшении качества смешения. Максимальное значение Q_m локализуется в области отрицательных значений Ro_2 , то есть в том случае, когда потоки закручены в разные стороны. Анализ поля течения позволяет сделать вывод, что наибольшего качества смешения можно добиться с помощью организации в потоке рециркуляционной зоны, в которую будут вовлечены оба потока. Для потоков с соотношением среднерасходных скоростей $u_1/u_2 > 1$ это достигается при совместной сонаправленной закрутке.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВОСПЛАМЕНЕНИЯ ДРЕВЕСИНЫ ПОД ВОЗДЕЙ- СТВИЕМ УБЫВАЮЩЕГО ПОТОКА ЛУЧИСТОЙ ЭНЕРГИИ

Гук В.О.

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Фильков А.И.;
зав. лаб., к.т.н. Кузнецов В.Т.

Томский государственный университет
E-mail: bwriddler@mail.ru

Введение. Процесс зажигания существенно зависит от типа теплового потока, является ли он статическим или динамическим (когда зажигание горючих материалов происходит при переменных, зависящих от времени значений теплового потока). При этом зажигание горючих материалов в динамических условиях изучено недостаточно. Если учесть, что в реальных условиях преобладает динамический тип теплового потока, то актуальность данной проблемы очевидна.

Методы и результаты. В данной работе приводится анализ результатов зажигания образцов древесины уменьшающимся со временем тепловым потоком. В качестве исследуемых образцов использовалась древесина сосны. Образцы представляли собой цилиндры диаметром $1,9 \cdot 10^{-2}$ м и высотой $1,5 \cdot 10^{-2}$ м. Поверхность образцов, поглощающая излучение, покрывалась ламповой копотью. Световое излучение поступало на образцы перпендикулярно волокнам древесины.

Для сравнения времен задержки зажигания в статических и динамических условиях, тепловой поток в динамических условиях осреднялся. Для этого использовали следующую методику. Измеряли с помощью микрокалориметра на фиксированных расстояниях от фокальной плоскости отражателя интенсивность потока излучения. При известной скорости перемещения образца вдоль оптической оси эллиптического отражателя можно перейти от фиксированных значений расстояния ко времени.

Измерение времени задержки зажигания осуществляли с помощью фотодиода по появлению пламени. Имея время задержки зажигания образца, можно найти тепловой поток в момент зажигания, используя кривую распределения $q(t)$.

На рисунке представлено сравнение времен задержки зажигания образцов сосны при динамических ($q=f(t)$) и статических ($q=const$) условиях подвода тепла.

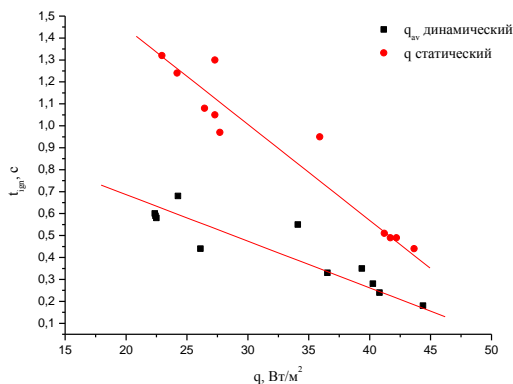


Рис. Сравнение зависимостей времен задержки зажигания образцов сосны от теплового потока для динамических и статических условий

Так для образцов сосны при убывающем потоке излучения время задержки зажигания в 2-2.5 раза меньше, чем для постоянного потока. При этом из рисунка видно, что с уменьшением величины теплового потока время задержки зажигания в статических условиях растет быстрее, чем для динамических условий. Полученные результаты не противоречат работе [1], где экспериментально показано, что в случае возрастающего теплового потока время задержки зажигания нитроклетчатки больше, чем при постоянном потоке.

Заключение. В результате проделанной работы были получены времена задержки зажигания древесины сосны при нагреве в условиях убывающего теплового потока. Проведено сравнение полученных данных для постоянного теплового потока [2].

Литература

1. Еналеев Р.Ш., Матеосов В.А., Синаев К.Н., Динавецкий В.Д., Гайнутдинов Р.Ш. – Экспериментальное исследование процесса зажигания конденсированных веществ при динамических условиях подвода лучистой энергии. – В КН; физика горения и методы ее исследования, - Чебоксары: изд-во Чувашского ун-та 1973, с.80-86.
2. Kuznetsov V.T., Fil'kov A.I. Ignition of various wood species by radiant energy // Combustion, Explosion, and Shock Waves. 2011, Vol. 47, No. 1. Pp. 65-69.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАКРУЧЕННОГО ПОТОКА ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ

Казьмина Д.И.

Научный руководитель: профессор, д.ф.м.н. Матвиенко О.В.

Томский государственный университет

E-mail: llutka@mail.ru

В настоящее время при производстве строительных и ремонтных работ в дорожной отрасли широкое распространение получили холодные технологии с использованием водно-битумных эмульсий.

Известно, что водно-битумные эмульсии, содержащие не менее 50% битума, обладают неньютоновскими свойствами и могут быть описаны с использованием реологической модели Шведова-Бингама. Целью настоящей работы является исследование структуры течения закрученного потока вязкопластической жидкости в цилиндрическом канале.

Для описания поля течения используются двумерные осесимметричные уравнения реодинамики, описывающие баланс массы и количества движения.

Закрутка потока приводит к появлению в потоке тангенциальной составляющей скорости и формированию центробежной силы. Умеренная закрутка незначительно изменяет структуру потока. На начальном участке заметны искривления линий тока, связанные с радиальным движением жидкости под действием центробежных сил. Затем линии тока становятся параллельны оси течения. При сильной закрутке потока в результате действия центробежных сил в приосевой части канала формируется зона пониженного давления, которая приводит к формированию зоны возвратных течений. Вниз по потоку, под действием вязких сил закрутка потока непрерывно уменьшается и на значительном удалении от завихрителя закрутка потока вырождается, и распределение скоростей приближается к распределению скоростей в незакрученном течении.

Радиальное распределение тангенциальной скорости, характеризуется максимумом, локализованным в периферийной части потока. В центральной части потока профиль тангенциальной скорости является линейным, что свидетельствует об отсутствии в этой части потока сдвиговых напряжений, а также квазитвердом вращении среды в ядре потока. В результате действия вязких сил происходит

замедление вращения жидкости, приводящее к уменьшению значений тангенциальной составляющей скорости. Интересно отметить, что увеличение предельного напряжения сдвига слабо влияет на изменение тангенциальной скорости. Этот факт может быть объяснен тем, что с ростом предельного напряжения сдвига происходит увеличение эффективной вязкости в области непосредственно примыкающей к оси течения. Эффективная вязкость в ядре потока и в окрестности стенки при этом изменяется незначительно, что не сказывается на замедлении вращения жидкости. Увеличение пластической вязкости приводит к заметному росту эффективной вязкости во всей области течения и, как следствие этого, к уменьшению тангенциальной скорости.

Отток жидкости из центральной части потока в пристеночную область, связанный с действием центробежных сил приводит к увеличению скорости течения в периферийной части потока. В периферийной области течения при слабой закрутке потока формируется зона с локальным минимумом значений осевой скорости. В приосевой зоне течения распределение осевой скорости становится равномерным. При более сильной закрутке жидкость, движущаяся вблизи оси канала, также начинает оттесняться к периферии. В результате этого происходит формирование «провала» осевой скорости в окрестности оси. Величина этого провала возрастает с ростом числа Россби, и при $Ro > 5$ в приосевой области формируется зона возвратных течений. Отметим, что по мере удаления от входного сечения закрутка потока ослабевает, это приводит к исчезновению «провала» осевой скорости и постепенному формированию поля скорости, соответствующего гидродинамически стабилизированному течению.

В ядре потока в области, где градиент скорости имеет наименьшие значения, эффективная вязкость более чем на два порядка превышает значения пластической вязкости. В окрестности стенки, в области максимальных градиентов скоростей происходит уменьшение значений эффективной вязкости. Влияние закрутки на эффективную вязкость в потоках со слабой, умеренной и сильной закруткой различно. В потоках со слабой закруткой $Ro < 3$, характеризующихся монотонным распределением осевой скорости в центральной части потока, с ростом Ro в приосевой зоне происходит уменьшение значений эффективной вязкости, что связано с ростом сдвиговых напряжений. Приосевая область высоковязкого течения с ростом числа Россби становится шире, что определяется особенно-

стями относительно равномерным радиальным распределением осевой скорости в ядре потока при слабой закрутке потока. В потоках с умеренной закруткой потока $3 < Ro < 5$ на внешней границе «провала» осевой скорости происходит увеличение значений сдвиговых напряжений, приводящее к уменьшению эффективной вязкости. В результате радиальное распределение эффективной вязкости становится немонотонным. В потоках с рециркуляцией $Ro > 5$ высокие значения сдвиговых напряжений в центральной и пристеночной части потока приводят к уменьшению в этих областях течения эффективной вязкости. В сформировавшейся в приосевой зоне возвратных течений движение жидкости характеризуется равномерным распределением скорости. Это приводит к значительному увеличению эффективной вязкости в зоне возвратных течений. Вниз по потоку, в зоне безрециркуляционного течения происходит уменьшение значений эффективной вязкости. На еще большем удалении от входного сечения, на участке гидродинамической стабилизации, вновь происходит рост эффективной вязкости в ядре потока. С увеличением значений предельного напряжения сдвига и пластической вязкости воздействие закрутки на структуру течения становится менее выраженным: глубина провала осевой скорости уменьшается, вплоть до полного его исчезновения; гидродинамическая стабилизация течения осуществляется на меньшем расстоянии от входа в канал. В результате действия центробежных сил в приосевой части канала формируется зона пониженного давления, которая приводит к формированию зоны возвратных течений. При этом при одном и том же числе Россби интенсивность рециркуляции тем больше, чем меньше значения предельного напряжения сдвига и пластической вязкости.

Причины исчезновения зоны возвратных течений в вязкопластических жидкостях достаточно понятны: увеличение эффективной вязкости и связанное с этим менее интенсивное радиальное движение жидкости к стенке, приводящее к повышению давления в окрестности оси по сравнению с ньютоновскими жидкостями. Кроме того, повышение эффективной вязкости способствует затуханию закрутки и обеспечивает меньшую протяженность зоны возвратных течений.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

Матюшина М.В.

Научный руководитель: профессор, д.ф.м.н. Матвиенко О.В.

Томский государственный университет

E-mail: sag@sibmail.com

Главная отличительная особенность турбулентных течений заключается в том, что все характеристики потока пульсируют случайным образом на фоне своих средних значений. Поэтому для математического исследования турбулентного течения целесообразно его мгновенные характеристики представить как сумму осредненного и пульсационного движения.

Разделяя мгновенную составляющую скорости и концентрации на осредненную и пульсационные составляющие

$$\vec{v}_p = \langle \vec{v}_p \rangle + \vec{v}'_p, \quad M_p = \langle M_p \rangle + M'_p \quad (1)$$

и осредняя по Рейнольдсу уравнение сохранения массы дисперсной среды, получим уравнение турбулентной диффузии частиц:

$$\frac{\partial \rho_p \langle M_p \rangle}{\partial t} + \text{div}(\rho_p \langle M_p \rangle \langle \vec{v}_p \rangle) = -\text{div}(\rho_p \langle M'_p \rangle \langle \vec{v}'_p \rangle). \quad (2)$$

Таким образом, возникает задача определения турбулентного потока частиц: $-\rho_p \langle \vec{v}'_p M'_p \rangle$.

Для определение турбулентного диффузионного потока дисперсной фазы воспользуемся следующими предположениями:

- частицы дисперсной фазы предполагаются сферическими, взаимодействие между частицами не учитывается;
- период турбулентной пульсации может быть оценен как отношение турбулентной кинетической энергии k к скорости ее диссипации ε : $\delta t = k/\varepsilon$;
- величина пульсации скорости несущей среды может быть моделирована следующим образом:

$$\vec{v} = \begin{cases} \vec{v}' & 0 \leq t < \frac{\delta t}{2}; \\ -\vec{v}' & \frac{\delta t}{2} \leq t \end{cases} \quad (3)$$

- в начале пульсации частица движется вместе с основным потоком, так что скорость ее движения относительно потока равна нулю.

В рамках этих предположений уравнение движения одиночной частицы можно представить в следующем виде:

$$\frac{d\vec{v}_p}{dt} = \frac{3}{4} \frac{\rho}{\rho_p} C_D d_p^{-1} |\vec{v} - \vec{v}_p| (\vec{v} - \vec{v}_p). \quad (4)$$

Рассмотрим сначала турбулентный перенос дисперсной фазы вследствие турбулентных пульсаций, вызывающих движение частиц, описываемого законом сопротивления Стокса:

$$\vec{F}_D = 3\pi\mu d_p (\vec{v} - \vec{v}_p); \quad (5)$$

Интегрирование уравнения движения (5) позволяет оценить изменение массы частиц в элементарном объеме за период пульсации следующим образом:

$$M'_p = -\psi \vec{v}' \frac{k}{\varepsilon} \text{grad}(\langle M_p \rangle), \quad (6)$$

где ψ - фактор, отражающий инерционность частиц:

$$\psi = 1 - \frac{1}{2\alpha} \frac{d_p}{L} \left[3 - \exp\left(-\alpha \frac{L}{d_p}\right) \right] \left[1 - \exp\left(-\alpha \frac{L}{d_p}\right) \right], \quad (7)$$

где $\alpha = 18 \frac{\rho}{\rho_p} \text{Re}_t^{-1}$ - безразмерный параметр обратный времени

релаксации частиц, $L = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$ - масштаб турбулентности,

$\text{Re}_t = \frac{\rho \sqrt{k} d_p}{\mu}$ - турбулентное число Рейнольдса.

Анализ движения частиц в результате действия ньютоновской силы сопротивления позволяет определить инерционность частиц как

$$\psi = 1 - \frac{1}{2\beta} \left(\frac{d_p}{L} \right) \ln \left[1 + 2\beta \left(\frac{L}{d_p} \right) + 2 \left(\beta \frac{L}{d_p} \right)^2 \right], \quad (8)$$

где $\beta = \frac{4}{3} \frac{\rho}{\rho_p} C_D^{-1}$ - безразмерный параметр, характеризующий путь

релаксации.

Таким образом, уравнение сохранения массы дисперсной среды в случае турбулентного режима течения после осреднения по Рейнольдсу приобретает вид уравнения диффузии и может быть записано в виде

$$\frac{\partial \rho_p \langle M_p \rangle}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_p \langle M_p \rangle \langle \bar{v}_p \rangle) = -\operatorname{div}(\rho_p \psi D_t \operatorname{grad} \langle M_p \rangle), \quad (18)$$

Анализ формул (7, 8) показывает, что в стоковском режиме коэффициент турбулентной диффузии определяется отношением размера частицы к размеру энергосодержащего вихря d_p/L , а также интенсивностью пульсаций несущей среды, характеризуемой турбулентным числом Рейнольдса Re_t . В ньютоновском режиме диффузия частиц определяется только их относительными размерами.

Коэффициент турбулентной диффузии частиц для мелких частиц достаточно высок, и частицы переносятся турбулентным потоком также как и жидкость. Однако с увеличением размера частиц подвижность частиц резко ослабевает. Таким образом, крупные частицы не могут диффундировать, несмотря на высокий уровень турбулентности.

УСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ БАКЛИ-ХЕРШЕЛЯ В ТРУБЕ

Павлова О. Д.

Научный руководитель: профессор, д.ф.м.н. Матвиенко О.В.

Томский государственный университет

E-mail: pod404@mail.ru

В случае нелинейной кривой течения вязкопластической среды говорят о нелинейно-вязкопластичных жидкостях. Трехпараметрическая модель Балкли-Хершеля, учитывающая нелинейность кривой течения при $n=1$ сводится к модели Шведова-Бингама, причем $k = \mu_{pl}$, а при $\tau_Y = 0$ - к степенному закону Оствальда-де Виля.

Реологический закон Балкли-Хершеля нелинейно вязкопластических сред для установившегося течения в канале записывается в виде:

$$\tau_{rx} = -\tau_Y + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^n \quad \text{если} \quad \tau_Y < \mu \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^n, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad \text{если} \quad \tau_Y > \mu \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^n. \quad (2)$$

Рассматривается осесимметричное установившееся течение в круглой трубе, которое происходит под действием заданного постоянного градиента давления

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\Delta p}{L} = \text{const.}$$

Уравнение динамики для жидкости Балкли-Хершеля приобретает вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^n - \tau_Y \right) \right] = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3)$$

Характерной особенностью данной задачи является то, что кроме условий симметрии на оси течения и условий прилипания на твердой стенке необходимо задать условия перехода к пластическому режиму течения на границе жесткой зоны, которая в свою очередь подлежит определению. Таким образом, при течении вязкопластичной жидкости необходимо дополнительно определить границу области деформаций, на которой должны выполняться условия непрерывности скорости (как на поверхности твердого тела) и равенства нулю тензора деформаций (или, что эквивалентно, его интенсивности). В результате граничные условия имеют вид:

$$r = 0: \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad r = r_Y: \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad r = R: \quad u = 0. \quad (4)$$

Интегрирование уравнения (3) с учетом условий (4) приводит к следующему результату:

$$\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^n - \tau_Y = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} r. \quad (5)$$

Таким образом, граница жесткой зоны может быть определена как:

$$r_Y = 2\tau_Y \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|^{-1}. \quad (6)$$

В центре канала образуется зона движения, в которой деформации отсутствуют. При этом величина r_Y определяет условие, при котором возможно течение в канале. Течение в канале реализуется

при выполнении условия $r_Y < R$, если $R < r_Y$, то происходит записание канала и течение становится невозможным.

Во внутренней области течения $r < r_Y$ среда движется как твердое тело с плоским профилем осевой скорости:

$$u = u_Y = \frac{n}{n+1} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|^{-1} \left(\frac{\tau_Y}{k} \right)^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{R}{r_Y} - 1 \right)^{\frac{n+1}{n}} \quad (7)$$

В пристеночной области распределение осевой скорости имеет степенной характер:

$$u = u_Y \left[1 - \left(\frac{r - r_Y}{R - r_Y} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (8)$$

Радиальное распределение безразмерной осевой скорости для установившегося течения жидкости Балкли-Хершеля в цилиндрическом канале для различных положений жесткой зоны имеет основные отличительные черты вязкопластического течения: квазитвердый профиль в приосевой зоне и параболический в пристеночной. Кроме того, наблюдаются особенности, характерные для нелинейновязких жидкостей. При малых значениях показателя нелинейности наблюдается уменьшение толщины пограничного слоя, при больших-распределение осевой скорости в зоне течения приближается к линейному, что свидетельствует о проявлении дилатантных свойств.

ВЛИЯНИЕ ПЛАМЕНИ НА РЕГИСТРАЦИЮ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ОБЪЕКТОВ В ИК-ДИАПАЗОНЕ

Столярчук Н.Д.

Научный руководитель: доцент, д.ф.м.н. Лобода Е.Л.

Томский государственный университет

E-mail: loboda@mail.tsu.ru

Проведено экспериментальное исследование особенностей регистрации высокотемпературных объектов в ИК-диапазоне и влияние пламени, образованного при горении различных горючих материалов.

В настоящее время одним из перспективных бесконтактных подходов для измерения температурных характеристик объектов является определение температуры объекта по его излучению в ИК-диапазоне с использованием тепловизоров [1]. При использовании этого подхода возникает ряд трудностей связанных с оптикофизическими свойствами исследуемых объектов, например, такими как коэффициент излучения, которые достаточно хорошо изучены для твердых тел, но при этом для пламени мало исследованы и зависят от множества факторов, как, например, влагосодержание природных горючих материалов [2]. При исследовании природных пожаров при помощи методов ИК-диагностики, возникает задача по определению температуры реперного объекта, излучение которого экранируется пламенем фронта пожара, находящимся между тепловизором и регистрируемым объектом.

В данной работе представлены результаты экспериментального исследования влияния пламени, образующегося при горении различных горючих материалов на энергетическую яркость абсолютно черного тела (АЧТ).

Интенсивность ИК-излучения пламени и модели АЧТ и их распределение температуры регистрировалось при помощи тепловизора JADE J530SB с узкополосными дисперсионными оптическими фильтрами со спектральными интервалами: 2.5-2.7 мкм, 2.64-3.25 мкм, 3.1-3.3 мкм, 3.7-3.9 мкм, 4.0-5.0 мкм и 4.35 мкм с полосой пропускания 180 нм и частотой регистрации 50 кадров/с. При измерениях использовались калибровки завода-изготовителя для выбранного типа объектива и фильтра. Расстояние от тепловизора до АЧТ составляло 3 м, а расстояние от тепловизора до центра пламени составляло 2 м. Температура пламени дополнительно контролировалась термопарой и по ней корректировалось среднее значение коэффициента излучения пламени.

В результате проведения эксперимента было установлено, что регистрируемая тепловизором температура АЧТ при появлении перед ним пламени возрастает не более чем на 10% от истинной температуры АЧТ. При этом регистрируемая температура АЧТ имеет многократные изменения, как и изменения температуры в пламени, измеренные вне оси видимости АЧТ.

В заключении можно сделать вывод, что при регистрации высокотемпературных реперных объектов с коэффициентом излучения $\epsilon \approx 1$ в ИК-диапазоне через слой пламени их регистрируемая температура будет выше истинной и спектр ее колебаний будет схож со спектром изменения температуры в пламени. В случае если иссле-

дования проводятся в спектральном интервале, где присутствуют мощные линии излучения пламени, и температура регистрируемого объекта ниже температуры пламени, то пламя экранирует объект, и достоверные данные о нем получить не представляется возможным.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 12-01-0142-а, № 14-01-0211-а.

Литература

1. В.П. Вавилов Инфракрасная термография и тепловой контроль. – М.: ИД Спектр, 2009. – 544 с.
2. Лобода Е.Л., Рейно В.В. Влияние коэффициента излучения пламени на измерение температур ИК - методами при горении лесных и степных горючих материалов при различном влагосодержании. Частотный анализ изменения температуры // Оптика атмосферы и океана, 2011, № 11. С. 1002-1006.
3. Гришин А.М., Фильков А.И., Лобода Е.Л., Рейно В.В., Руди Ю.А., Кузнецов В.Т., Караваев В.В. Экспериментальные исследования возникновения и распространения степного пожара в натуральных условиях // Вестник Томского государственного университета "Математика и механика", 2011, №2. С. 91 - 102